

Моделювання біофізичних процесів

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт

для студентів спеціальності 7.090804

„Фізична та біомедична електроніка”

Київ -2008

Навчальне видання

Моделювання біофізичних процесів

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт

для студентів спеціальності 7.090804

„Фізична та біомедична електроніка”

Укладач Лошицький Павло Павлович, проф.

Відповідальний редактор Ю.С. Синькоп, проф.

Рецензент О.С. Мельник, к.т.н.

Вступ

Методичні вказівки до виконання практичних робіт призначаються для студентів, які вивчають курс „моделювання біофізичних процесів”.

У практикумі охоплюються всі теми, що входять до лекційного курсу, тому теоретичні відомості по кожному розділу містять тільки основні положення, необхідні для розв’язування задач, а також методи, що дозволяють найбільш простим шляхом отримати якісний розв’язок нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку. У вказівках є завдання, які дозволяють перевірити засвоєння матеріалу, що вивчається. Для самоперевірки є відповіді та докладні розв’язки кожного завдання.

Таким чином, ціллю даних методичних вказівок до виконання практичних робіт є закріплення теоретичних знань, вивчення спеціальних методів та прийомів розв’язку диференціальних рівнянь, розвиток практичних навичок якісного розв’язку нелінійних диференціальних рівнянь графічними методами.

1. ВВЕДЕННЯ В КІНЕТИКУ ОРГАНІЧНИХ РЕАКЦІЙ

1.1 Основні кінетичні закони

Хімічна кінетика має справу зі швидкостями хімічних реакцій і з параметрами, від яких ці швидкості залежать. Найбільш важливими і вивченими із цих параметрів є концентрація, температура і тиск. Послідовно досліджуючи вплив всіх цих параметрів на швидкість реакцій, можна дійти до певного висновку про деталі механізмів, по яким протікають хімічні реакції. Ймовірно, правильно буде сказати, що кінетичні дослідження є обов'язковими при вивченні механізму реакції. Некінетичні дослідження як, наприклад, стереохімічні, можуть дати дуже важливу інформацію про механізм реакції, і їх завжди потрібно враховувати при кінетичних дослідженнях.

В будь-якій області науки спочатку зручно привести поняття про феноменологічні чи емпіричні закони, які мають певний зміст в даній області, а потім сформулювати її теоретичні основи, щоб пояснити ці закони.

Кінетика органічних реакцій часто виявляються основною ланкою, яка визначає результати впливу зовнішніх фізичних факторів на біологічний об'єкт в цілому. Саме з цієї причини ми ознайомимось з основними поняттями та законами, за якими протікають біохімічні процеси як в окремій клітині, так і в організмі в цілому.

Швидкість хімічних реакцій може бути виражена різними способами. В деяких випадках зручно вимірювати концентрацію продукту реакції x в різні моменти часу. На рисунку 1.1 схематично зображено зміну концентрації від часу (крива a). Нахил дотичної до цієї кривої, $\frac{dx}{dt}$, в деякій точці і являє собою швидкість реакції у даний момент часу. Якщо концентрація вимірюється в молях на літр, то

швидкість виразиться в $\frac{\text{моль}}{\text{л}} \cdot \frac{1}{\text{сек}}$. Крім того, можна виміряти зміни концентрації вихідних продуктів (крива *b*). Нахил дотичної до цієї кривої $\frac{dc}{dt}$ завжди буде величиною від'ємною.

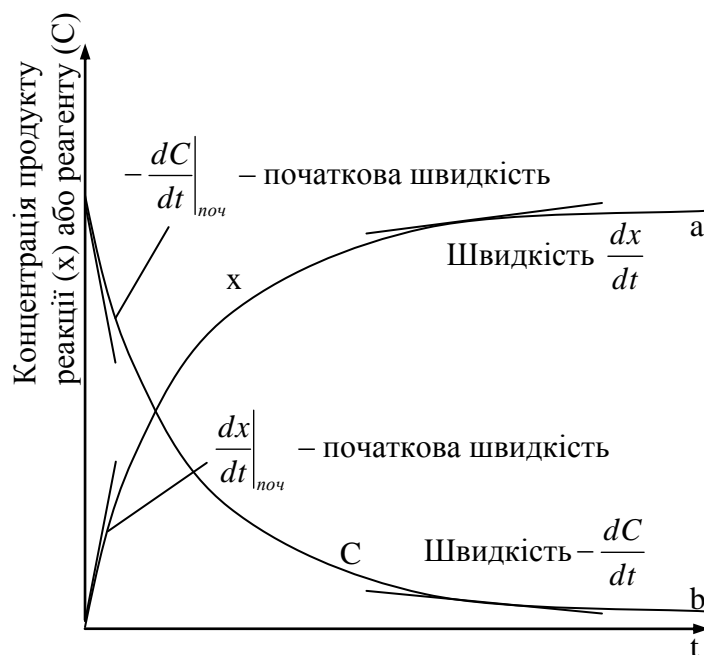


Рис.1.1

Важливо відмітити, що швидкість хімічних реакцій може мати різні числові значення в залежності від способу її вимірювання.

Наприклад, реакція $N_2 + 3H_2 = 2NH_3$. Так як в кожен момент часу одна молекула азоту призводить до утворення двох молекул аміаку, то, очевидно, швидкість утворення аміаку V_{NH_3} дорівнює подвійній швидкості зникнення азоту V_{N_2}

$$V_{NH_3} \equiv \frac{d[NH_3]}{dt} = -2 \frac{d[N_2]}{dt} \equiv 2 V_{N_2}.$$

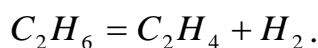
Аналогічно, швидкість зникнення водню V_{H_2} дорівнює потрійній швидкості зникнення азоту V_{N_2}

$$V_{H_2} \equiv -\frac{d[H_2]}{dt} = -3\frac{d[N_2]}{dt} \equiv 3 V_{N_2}.$$

Порядок реакції. В деяких реакціях швидкість пропорціональна концентрації реагентів у деякій степені, і в таких випадках зручно ввести поняття про *порядок* реакції. Таким чином, якщо швидкість прямо пропорційна першій степені концентрації, тобто

$$V = kC$$

реакцію називають реакцією *першого порядку*. Прикладом такої реакції може бути реакція розкладу етану в газовій фазі:



В звичайних експериментальних умовах швидкість з'явлення етилену, дорівнює швидкості отримання етану, пропорційна концентрації етану в першій степені чи тиску його в системі.

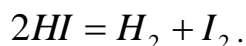
Термін *другий порядок* можна віднести до реакції двох типів: до таких, для яких швидкість реакції пропорційна квадрату концентрації реагенту

$$V = kC^2,$$

і до таких, коли швидкість пропорційна першим степеням концентрації різних реагентів

$$V = kC_A C_B.$$

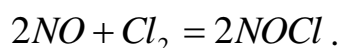
Реакцію розкладу йодистого водню в газовій фазі можна віднести до процесів першого типу



Для реакції, яка іде зліва направо, швидкість пропорційна квадрату концентрації йодистого водню.

Швидкість зворотної реакції $H_2 + I_2 = 2HI$ пропорційна добутку концентрацій водню і йоду, тому зворотня реакція також має другий порядок: перший порядок по водню, і перший – по йоду.

Відомі також реакції третього порядку. До них належать реакція окису азоту з хлором



Швидкість цієї реакції пропорційна квадрату концентрації азоту і першій степені концентрації хлору

$$V = k[NO]^2 \cdot [Cl_2].$$

Таким чином, ця реакція має другий порядок по окису азоту і перший по хлору; її загальний порядок дорівнює трьом.

Розглянуте вище можна узагальнити наступним чином. Якщо швидкість реакції пропорційна концентрації реагенту A в степені α , концентрації реагенту B у степені β і т.п., то швидкість реакції дорівнює:

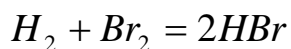
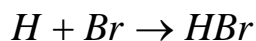
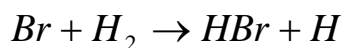
$$V = k \cdot C_A^\alpha \cdot C_B^\beta.$$

і тоді кажуть, що порядок реакції по A дорівнює α , а по B - β і т.д.

Загальний порядок такої реакції дорівнює $n = \alpha + \beta + \dots$.

Існують деякі невірні уявлення, пов'язані з поняттям порядку реакції.

1. Не про всі реакції можна сказати, що вони мають якийсь визначений порядок. Так швидкість реакції бромів з воднем описується рівнянням:



$$\frac{d[\text{HBr}]}{dt} = \frac{k[\text{H}_2][\text{Br}_2]^{1/2}}{1 + \frac{k^1[\text{HBr}]}{[\text{Br}_2]}}.$$

Цей складний вираз є результатом складності самої реакції, яку детальніше розглянемо згодом.

В цьому випадку доцільно говорити не про визначення порядку такої реакції, а про залежність, виражену рівнянням.

2. Ніколи не можна виводити порядок реакції по її стехіометричному рівнянню. Тільки у випадках дуже простого механізму, такий висновок може бути вірним; так, реакція $\text{H}_2 + \text{I}_2 = 2\text{HI}$ дійсно має другий порядок (перший по водню, і перший по йоду), як це і впливає із стехіометрії. Проте, реакція $\text{H}_2 + \text{Br}_2 = 2\text{HBr}$, як уже вказувалось, не є реакцією другого порядку, так як вона протікає по складному механізму.

Із сказаного повинно бути очевидним, що порядок реакції – строго експериментальна величина, яка показує характер залежності швидкості реакції від концентрації. Термін *порядок* не повинен розглядатись як термін *молекулярність* реакції: який позначає число молекул, що вступають в елементарну реакцію.

Нарешті, необхідно відмітити, що можливі нецілі порядки реакцій. Так, реакція термічного перетворення пара-водню в орто-водень має дробовий порядок – 3/2:

$$V = k[\text{p-H}_2]^{3/2}.$$

Дробові порядки також є наслідками складних механізмів реакцій.

Константа швидкості. Множник k , який зустрічався в виразах для швидкості реакцій простих порядків, називається *константою швидкості* реакції. Інколи, особливо коли ця величина змінюється зі

зміною умов проведення реакції, множник k розглядається як коефіцієнт швидкості даної реакції. Величина k чисельно дорівнює швидкості реакції, коли концентрації всіх реагентів дорівнює 1, тому її часто називають *питомою швидкістю*.

Розмірність константи швидкості, яка змінюється з порядком реакції, легко отримати з виразу для швидкості реакції. Так, для реакції першого порядку, для якої $V = kC$, розмірність k визначається діленням розмірності $V \left(\frac{\text{моль}}{\text{л} \cdot \text{сек}} \right)$ на розмірність концентрації $C \left(\frac{\text{моль}}{\text{л}} \right)$: в цьому випадку розмірність k буде $(\text{сек})^{-1}$.

Швидкість реакції другого порядку описується виразом $V = kC_A C_B$ чи $V = kC^2$, тому розмірність константи виводять діленням розмірності швидкості на квадрат концентрації, і таким чином, вона дорівнює $\left(\frac{\text{л}}{\text{моль} \cdot \text{сек}} \right)$. В загальному випадку, для реакції n -го порядку

$$V = kC^n, \text{ розмірність константи складає } \left(\frac{\text{моль}^{1-n}}{\text{л}^{1-n} \cdot \text{сек}} \right).$$

Слід зазначити, що швидкість реакції може змінитись в залежності від того, за яким із компонентів реакції спостерігає дослідник. Звичайно, також буде змінюватись і константа швидкості.

1.2 Аналіз кінетичних результатів

При каталітичному дослідженні прямим чи непрямим способом вимірюють зміну концентрації речовин за часом. Задача полягає в тому, щоб виразити швидкість реакції через концентрацію реагентів, а іноді й продуктів реакції чи інших сполук, які знаходяться в системі (каталізаторів, ферментів). Якщо порядок реакції низький, варто

визначити як порядок реакції, так і константу швидкості. Якщо ж це не так, як, наприклад, у випадку реакції броду з воднем, то необхідно визначити вид виразу для швидкості реакції та значення констант.

Для розв'язку такої задачі існує два основних методи:

- а) інтегральний;
- б) диференціальний.

Розрахунок результатів за допомогою інтегрального методу починають з виразу для швидкості реакції, який вважають придатним в даному випадку; наприклад, якщо припускається, що порядок реакції – перший, то починають з виразу:

$$-\frac{dC}{dt} = k \cdot c,$$

де C – концентрація реагенту.

Розрахунки за допомогою інтегрального методу починають з виразу для C як функції від t , а потім порівнюють винайдену функцію з експериментальною зміною C за часом. Якщо значення майже збігаються, то графічно можна визначити значення константи швидкості реакції. Якщо не має збігу, то застосовуючи деякі прийоми, намагаються вивести інше рівняння для швидкості, доки не досягнуть задовільного збігу. Цей метод часто виглядає як метод проб та помилок, але, не зважаючи на це, він виявляється корисним, особливо якщо відсутні будь-які ускладнення.

1.2.1 Диференціальний метод

У диференціальному методі мають справу з рівнянням швидкості в його диференціальній формі. Значення $\frac{dC}{dt}$ визначають, будуючи графік

залежності C від t , та кут нахилу визначеної залежності порівнюють безпосередньо з рівнянням для швидкості реакції.

Основні труднощі, які виникають, пов'язані з тим, що неможливо точно здобути значення кута нахилу, але не дивлячись на цей недолік, метод в цілому знаходить більше використання й, на відміну від інтегрального, не призводить до значних ускладнень в тих випадках, коли оперують зі складними кінетичними результатами.

Диференціальний метод, запропонований Вант-Гоффом, заснований на вимірюванні швидкості реакції шляхом визначення нахилу кривих, що описують залежність концентрації від часу. Точне вимірювання нахилу пов'язане з деякими практичними труднощами, але в наш час для таких цілей виготовлено спеціальні пристрої. Якщо протікає яка-небудь реакція n -го порядку, її швидкість в залежності від концентрації може бути описана рівнянням:

$$v = k \cdot C^n .$$

Логарифмування цього виразу дає:

$$\lg v = \lg k + n \cdot \lg C .$$

Якщо тепер визначити швидкість реакції при різних значеннях концентрації реагентів і побудувати залежність логарифму швидкості реакції від логарифму концентрації, можна отримати пряму лінію. Нахил отриманої прямої буде представляти собою порядок реакції відносно речовини, концентрацію якої вимірювали, а відрізок, що відтинається на осі $\lg v$, буде дорівнювати $\lg k$. Цей метод можна застосувати у двох різних варіантах. У першому – основний вплив приділяється початковим швидкостям, тобто дотичною до кривої на самому початку реакції: в цьому випадку швидкості вимірюються при різних початкових концентраціях. Схематично це показано на рис. 1.2. На рис. 1.3 показана

залежність, яка отримана у дослідях з різними концентраціями реагентів, й до кожної кривої проведена дотична на самому початку реакції.

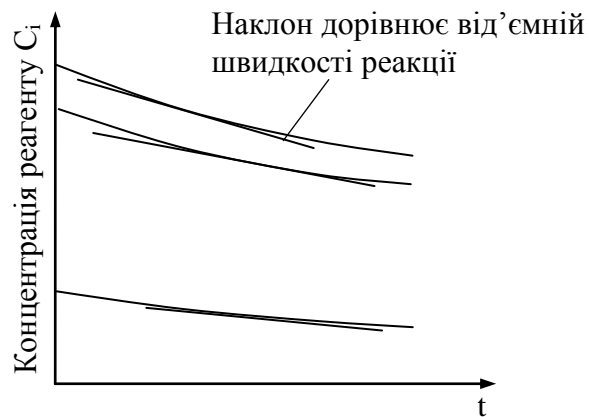


Рис. 1.2

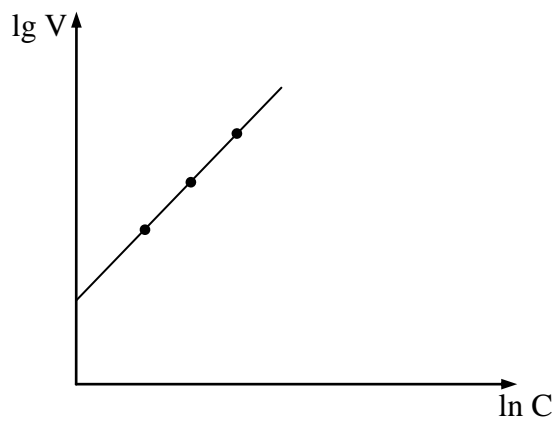
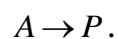


Рис. 1.3

1.2.2 Інтегральний метод

Кінетика реакції першого порядку. Реакцію першого порядку можна схематично зобразити наступним чином:



Вважають, що на початку реакції, при $t=0$, концентрації A та P дорівнюють a та 0 відповідно. Із закінченням деякого часу t концентрація

P становить x , а концентрація $A - (a - x)$. Швидкість, утворення P становить $\frac{dx}{dt}$, тому для реакцій першого порядку можна написати, що

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot (a - x).$$

Розділяючи змінні, отримуємо:

$$\frac{dx}{(a - x)} = k \cdot dt.$$

Інтегрування дає:

$$-\ln(a - x) = k \cdot t + I,$$

де I – константа інтегрування. Вона може бути визначена при наступних граничних умовах: $x=0, t=0$. Тоді

$$-\ln(a) = I.$$

Підставляючи вираз для I , отримуємо:

$$\ln \frac{a}{(a - x)} = k \cdot t.$$

Цей вираз можна переписати або як $x = a(1 - e^{-kt})$, або як $(a - x) = a \cdot e^{-kt}$.

З останнього рівняння видно, що концентрація реагенту $(a - x)$ за експоненціально зменшується за часом від початкової концентрації до нульової.

Існує декілька різних шляхів для того, щоб перевірити, відповідають ці рівняння експериментальним даним чи ні. На малюнку зображено два графічних способи.

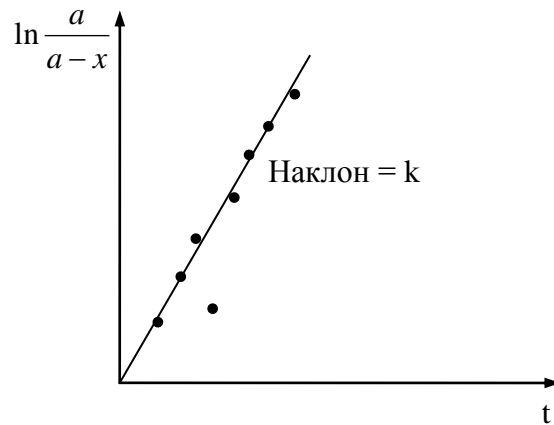


Рис. 1.4

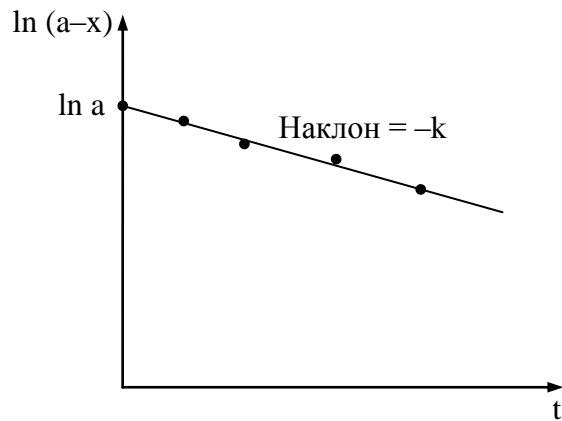


Рис. 1.5

На рисунку 1.4 відкладено $\ln \frac{a}{(a-x)}$ від t . Всі точки лежать на прямій, що проходить через нуль: нахил цієї прямої дає величину k . Ще простіше побудувати залежність $\ln(a-x)$ від t (рис.1.5) у відповідності з декілька іншою формою рівняння:

$$\ln(a-x) = \ln a - k \cdot t.$$

За нахилом отриманої прямої розраховують величину $-k$, а на осі ординат ця пряма відтинає відрізок, що дорівнює $\ln a$.

Інший прийом полягає в розрахунку чисельних значень функції $\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{a}{(a-x)}$ для різних значень t .

Якщо досліджувана реакція дійсно є реакцією першого порядку, значення k не повинні мінятися за часом. Але якщо є відхилення, необхідно намагатися обробити експериментальні дані за допомогою виразу для реакції першого порядку.

Іноді зручно користуватися величиною так званого часу *напівперетворення* чи *напівперіоду* реакції: це час, за який прореагує половина вихідної речовини. Існує просте співвідношення між часом напівперетворення τ та константою k ; це співвідношення можна вивести для реакції першого порядку. Зробивши заміну в отриманих раніше виразах x на $\frac{a}{2}$ та t на τ , отримаємо

$$\tau = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{(a - \frac{a}{2})} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0,693}{k}.$$

Таким чином час напівперетворення обернено пропорційний константі швидкості реакції. Причому час напівперетворення не залежить від початкової концентрації a .

1.3 Завдання

1. Для реакції другого порядку $2A \rightarrow P$ вивести вирази залежностей:
 - а) зміни концентрації продукту P від часу;
 - б) часу напівперетворення.
2. Для реакції другого порядку $A+B \rightarrow P$ знайти вираз залежності концентрації продукту P від часу.
3. Для реакції n -го порядку $nA \rightarrow P$ вивести вирази залежностей:
 - а) зміни концентрації продукту P від часу;
 - б) часу напівперетворення.

2. ТОПОЛОГІЧНІ МЕТОДИ І ГРАФІЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

2.1 Інтегральні криві рівнянь другого порядку

Топологічний метод аналізу диференціальних рівнянь є одним з найважливіших засобів дослідження різних явищ, що пов'язані з нелінійними коливаннями та процесами.

Цей метод використовується для вивчення автономних систем. З його допомогою розв'язки диференціальних рівнянь шукаються не як явні функції часу, а у вигляді інтегральних кривих у фазовому просторі або, у більш загальному випадку, у просторі станів. Дослідження інтегральних кривих дозволяє отримати достатнє уявлення про якісний характер розв'язку, а також деякі кількісні дані. Графічні методи представлення розв'язків використовують в основному для систем малого порядку.

Умові рівноваги, коли система знаходиться у стані спокою, відповідають *особливій точці* у просторі станів; періодичним розв'язкам відповідають *граничні цикли*. Таким чином, інтегральні криві, які прямують до таких особливих точок або граничним циклам, можуть зображувати перехідні режими системи.

Для автономної системи, яка описується двома диференціальними рівняннями:

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y);$$

$$\frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

інтегральна крива має вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}$$

Точка (x_0, y_0) , у якій функції $X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0$, називається особливою точкою.

2.2 Класифікація особливих точок

У залежності від характеру інтегральних кривих біля особливих точок, тобто в залежності від коренів характеристичних рівнянь особливі точки є такими, що класифікуються на:

- ✓ вузлова точка (вузол), якщо корені характеристичного рівняння обидва дійсні та одного знаку:

$$\begin{aligned}(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 &\geq 0; \\ a_1b_2 - a_2b_1 &> 0\end{aligned}$$

- ✓ сідло, якщо обидва корені дійсні, але мають різні знаки:

$$\begin{aligned}(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 &> 0; \\ a_1b_2 - a_2b_1 &< 0\end{aligned}$$

- ✓ фокус, якщо корені комплексно-спряжені:

$$(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 < 0;$$

- ✓ центр або фокус, якщо обидва корені уявні:

$$\begin{aligned}(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 &< 0; \\ a_1 + b_2 &= 0\end{aligned}$$

Для стійких особливих точок дійсна частина коренів характеристичного рівняння від'ємна, а для недійсних – додатна.

Для дослідження стійкості особливих точок, розглядають лінеаризовану систему диференціальних рівнянь, що описують рух поблизу положення рівноваги (особливої точки).

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y) = a_1x + a_2y + X_2(x, y);$$

$$\frac{dy}{dt} = Y(x, y) = b_1x + b_2y + Y_2(x, y)$$

де, $X_2(x, y)$ $Y_2(x, y)$ функції порядку вище за перший.

Розкладемо праві частини системи за степенями ξ та η – малим відхиленням від стаціонарних значень x_0, y_0 :

$$\xi = x - x_0; \quad \eta = y - y_0$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \eta = a_1\xi + a_2\eta;$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \xi + \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \eta = b_1\xi + b_2\eta;$$

Корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[a_1 + b_2 \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4(a_1b_2 + a_2b_1)} \right];$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[a_1 + b_2 \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1} \right]$$

Межа стійких фокусів та вузлів визначається виразом:

$$a_1 + b_2 = 0$$

Межа сідел:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$$

Межа фокусів:

$$(a_1 + b_2)^2 - 4(a_2b_1 - a_1b_2) = 0$$

2.3 Метод ізоклін

Метод ізоклін дає можливість досліджувати поле інтегральних кривих графічним методом, не розв'язуючи диференціальних рівнянь.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} \equiv F(x, y) = \text{const};$$

$F(x, y) = C$ – ізокліна, тобто крива на площині x, y , вздовж якої нахил $\frac{dy}{dx}$ інтегральних кривих постійний.

Після того, як крива $F(x, y) = C_i$ проведена, уздовж неї наносять короткі відрізки прямих, що мають заданий нахил $\frac{dy}{dx} = C$. Повторюючи ці побудовання для інших значень C_i отримують ряд кривих $F(x, y) = C_i$ із відповідними нахилами, що вказані на цих кривих. Ці нахили визначають поле напрямів дотичних та інтегральних кривих. Починаючи з точки x_0, y_0 та прямуючи завжди згідно напрямлення ліній поля можна накреслити деяку неперервну криву. Крива, що отримана, є інтегральною кривою, яка проходить крізь початкову точку x_0, y_0 .

2.4 Завдання

2.4.1 Знайти розв'язки рівнянь методом ізоклін

1. $\frac{dx}{dt} = x + 5t - 2;$ $x_0 = 5, \quad t_0 = 0$

2. $\frac{dx}{dt} = -2t - x;$ $x_0 = -1, \quad t_0 = 0$

3. $\frac{dx}{dt} = -x + t;$ $x_0 = 0,2, \quad t_0 = 0$

$$4. \frac{dx}{dt} = 3x + 2t - 5; \quad x_0 = 4, \quad t_0 = 0$$

$$5. \frac{dx}{dt} = -4x - 5t; \quad x_0 = 0, \quad t_0 = 0$$

$$6. \frac{dx}{dt} = x + 3t; \quad x_0 = 0, \quad t_0 = 0$$

$$7. \frac{dx}{dt} = 2x + 3t; \quad x_0 = 0, \quad t_0 = 0$$

$$8. \frac{dx}{dt} = -4x - 5t; \quad x_0 = 0, \quad t_0 = 0$$

2.4.2 Знайти розв'язки рівнянь

$$1. \frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 16; \quad \text{з мінімальним значенням } X_{min} = 2$$

$$2. \frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 25; \quad \text{з максимальним значенням } X_{max} = 4$$

$$3. \frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 100; \quad \text{з мінімальним значенням } X_{min} = 6$$

$$4. \frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 106; \quad \text{з максимальним значенням } X_{max} = 5$$

$$5. \frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 64; \quad \text{з мінімальним значенням } X_{min} = 5$$

2.4.3 Дослідити особливі точки системи рівнянь

1. Знайти межу сідел системи:

$$\dot{x} = 1 - y \ln |x|;$$

$$\dot{y} = x(x^2 + 2y - a^2);$$

2. Дослідити особливі точки системи:

$$\dot{x} = x + 8 - y;$$

$$\dot{y} = xy + 7$$

3. Знайти межу стійких вузлів та фокусів системи:

$$\dot{x} = -x + xy^2;$$

$$\dot{y} = x + y$$

4. Знайти межу сідел системи:

$$\dot{x} = x + 5y^2;$$

$$\dot{y} = x^2 + xy$$

5. Знайти межу фокусів системи:

$$\dot{x} = y(x + y + 4) + x^2;$$

$$\dot{y} = 5x + 4y - 6$$

6. Знайти умови стійкості системи:

$$\dot{x} = y(5 + x + x^2) - 2x;$$

$$\dot{y} = (y + 2y^2) + x + x^2$$

7. Знайти межу фокусів системи:

$$\dot{x} = 1 - y \ln |x|;$$

$$\dot{y} = x(x^2 + 2y - a^2);$$

8. Дослідити стаціонарні точки системи:

$$\dot{x} = x + y + 6;$$

$$\dot{y} = x(x + y^2);$$

9. Дослідити стаціонарні точки системи:

$$\dot{x} = xy;$$

$$\dot{y} = y - 6$$

10. Знайти межу стійкості вузлів та фокусів системи:

$$\dot{x} = 1 - y \ln |x|;$$

$$\dot{y} = x(x^2 + 2y - a^2);$$

3. ФАЗОВИЙ ПОРТРЕТ

3.1. Маятник. Основні співвідношення

Розглянемо найпростішу динамічну систему – маятник без тертя. У будь-якій точці A рух відбувається під дією тангенціальної складової сили тяжіння.

$$F = -mg \cdot \sin \varphi,$$

де m – маса маятника,

g – прискорення вільного падіння,

φ - кут відхилення маятника від вертикалі $O-O'$,

l – довжина підвісу маятника.

$$l = S' = l\varphi';$$

$$a = V' = l\varphi'';$$

$$ma = -mg \sin \varphi';$$

$$ml\varphi'' = -mg \sin \varphi;$$

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0;$$

$$\varphi'' + \omega_0^2 \sin \varphi = 0; \quad (\omega_0^2 = \frac{g}{l}).$$

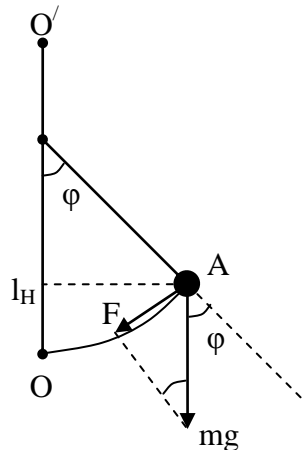


Рис.3.1

Отримане рівняння руху маятника є нелінійним і тільки для малих коливань, коли $\sin \varphi = \varphi$ ($\varphi \approx 8,5 - 10^\circ$), воно лінійне:

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0$$

з відомим розв'язком $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t)$, і періодом $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Кінетична енергія маятника

$$E_{\text{кін}} = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\varphi')^2.$$

Потенціальна енергія маятника (див. рис. 3.1)

$$E_{\text{пот}} = mg(OH) = mg(AO) \sin \frac{\varphi}{2} = mg * 2l * \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2mg * l * \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Повна енергія

$$E = \frac{1}{2} m l^2 (\varphi')^2 + 2mgl * \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Нормуємо величину повної енергії маятника на величину $E_0 = \frac{1}{2} m (l\omega_0)^2$ - кінетичну енергію маси m , що рівномірно обертається по

окружності радіуса l з періодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{\varphi'}{\omega_0}\right)^2 + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

3.2. Фазовий портрет маятника

На фазовій площині зв'язок між кутовою швидкістю φ' й кутом відхилення φ визначається рівнянням для енергії

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{\varphi'}{\omega_0}\right)^2 + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

При $E=0$ система перебуває в спокої і на фазовій діаграмі в точці O .

Якщо $\frac{E}{E_0} < 4$, то існує $\varphi_{\text{max}} < \pi$, тому що повинна виконуватися

нерівність $\frac{E}{E_0} - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} > 0$. Тому φ не може досягати значення π (точка O')

на мал. 3.1). Маятник коливається між $-\varphi_{\max}$ і $+\varphi_{\max}$. Рух періодичний.

При малих кутах φ ($\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$) вираз для енергії відповідає колу 1 рис. 3.2.

$$\left(\frac{\varphi'}{\omega_0}\right)^2 + \varphi^2 = \sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2}.$$

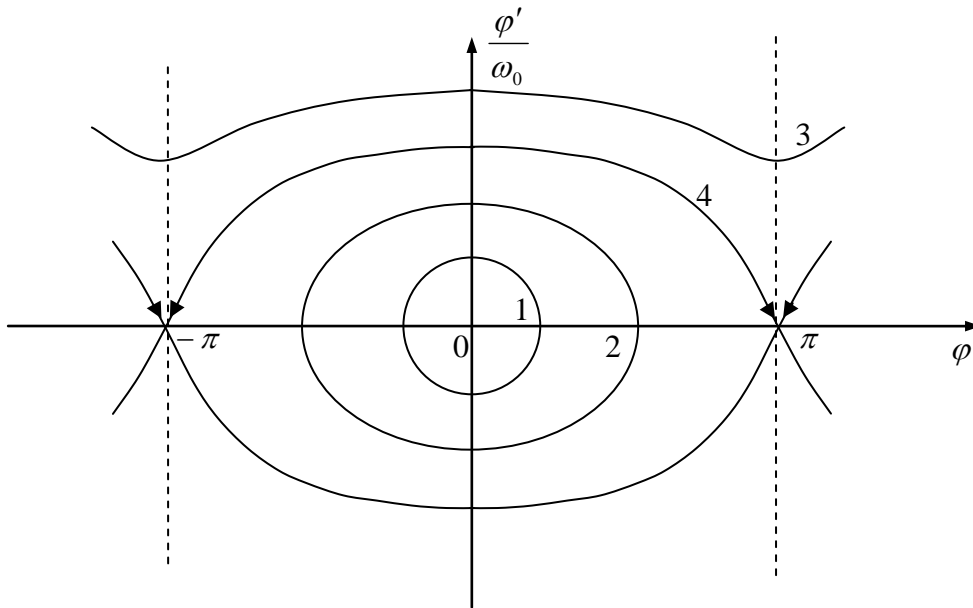


Рис.3.2

При більших кутах відхилення коло трансформується в "овал". Нелінійна сила дає менше прискорення, чим лінійна. Тому період нелінійних коливань більше, ніж період лінійних коливань. (крива 2, рис. 3.2).

Якщо $\frac{E}{E_0} > 4$, то навіть при максимальній потенціальній енергії (при $\varphi = \pi$) $4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 4$ і кінетична енергія $\left(\frac{\varphi'}{\omega_0}\right)^2 \neq 0$ й маятник проскакує верхню точку $0'$, переходячи в обертальний рух. Крива 3, рис. 3.2.

Якщо $\frac{E}{E_0} = 4$, тоді

$$\left(\frac{\varphi'}{\omega_0}\right)^2 = 4 * (1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}) = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Якщо $\varphi = \pi$ або $\varphi = -\pi$ (точка 0' рис. 3.1), швидкість дорівнює нулю, маятник перебуває в нестійкій точці рівноваги. Крива 4, рис.3.2 сепаратриса, що відокремлює фазові траєкторії коливальних рухів від фазових траєкторій обертових рухів.

При $\frac{E}{E_0} = 4$ можливо й інший рух маятника. Нехай при $t=0$ $\varphi' = 2\omega_0$, тоді $\frac{E}{E_0} = 4$ й маятник рухається у верхній точці так, що його швидкість у положенні φ дорівнює $\varphi' = 2\omega_0 * \cos(\frac{\varphi}{2})$. Чим ближче φ до π , тим менша швидкість. Якщо кут відхилення близький до π , то малий кут $\pi - \varphi \equiv 2\alpha$.

Звідси

$$\alpha' \approx -\omega_0 \alpha.$$

Це рівняння має розв'язок $\alpha(t) = \alpha_0 * e^{-\omega_0 t}$.

3.3 Солітонні розв'язки на сепаратрисі

Метод гіперболічних функцій. Знайдемо геометричною побудовою розв'язок рівняння

$$\varphi' = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Для цього використаємо властивості гіперболічних функцій.

На площині (x, y) побудуємо графік гіперболи $y = \frac{1}{x}$.

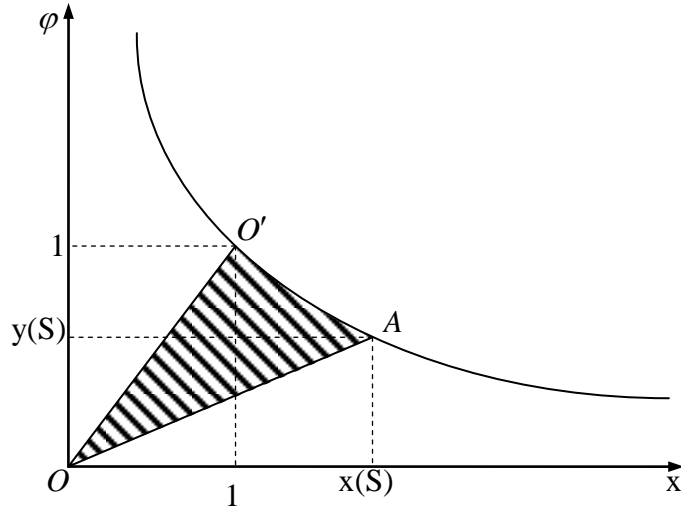


Рис. 3.3

Позначимо площу фігури $OO'A \equiv S'$.

Проекція точки A на вісь Ox є

$$x(S) = \exp(s) = e$$

Покажемо це.

Площа $OO'A =$ площа $O'A \cdot x(s) \cdot 1$, тому що ці дві фігури отримують вирахованням рівновеликих трикутників $OO'Ax(S)$ і $OO'1$ з однієї й тієї ж фігури $OO'A$ $x(S)$.

$$\text{Площа трикутника } OAx(S) \equiv \frac{1}{2} y(S) * x(S) = \frac{1}{2} * y(S) * \frac{1}{y(S)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Площа трикутника } OO'1 \equiv \frac{1}{2} * 1 * 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Площа фігури } O'A * x(S) * 1 = \int_1^{x(S)} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{x(S)} = \ln x(S)$$

$$S' = \ln x(S), \text{ тобто } x(S) = \exp(S) = e^S.$$

Знайдемо геометричною побудовою рішення рівняння

$$\varphi' = 2\omega_0 * \cos \frac{\varphi}{2}.$$

$$\text{Позначимо } \angle O'OA = \frac{\varphi}{4} :$$

$$\angle OAx = \psi .$$

Тоді очевидно, що

$$\psi \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4} = \frac{\pi - \varphi}{4};$$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{e^{-s}}{e^s} = e^{-2s} = \exp(-2S);$$

$$\operatorname{tg} \psi = \exp(-2S).$$

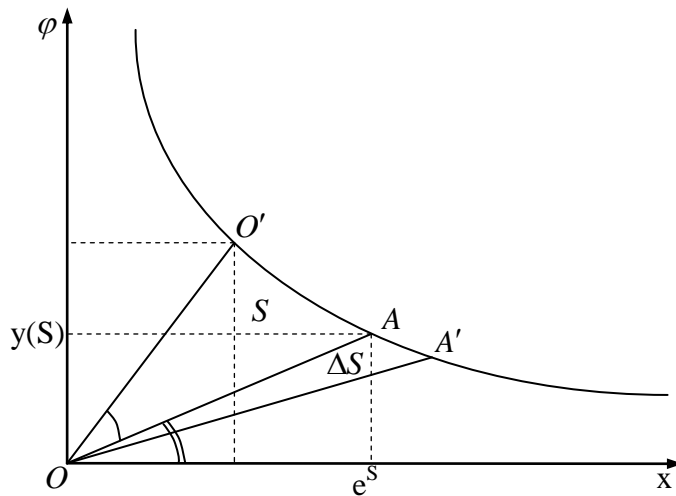


Рис.3.4

Збільшення площі ΔS при малих зсувах точки A по гіперболі можна записати як площу малого сектора з радіусом $OA \approx OA'$ і кутом $\Delta \psi = \angle \hat{A} \hat{A}'$.

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \Delta \psi (OA)^2 .$$

$$(AO) = \exp(S) / \cos \psi \quad \Delta \hat{A} \hat{A}' e^{-S}$$

$$\text{Тоді } \frac{\Delta \psi}{\Delta \varphi} = -\frac{2}{(OA)^2} = -2 \cos^2(\psi) * e^{-2S} = -2 \cos^2(\psi) * \operatorname{tg} \psi = -\sin 2\psi .$$

Повертаючись до кута φ .

$$4\psi = \pi - \varphi \rightarrow \varphi = \pi - 4\psi .$$

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta S} = -4 \frac{\Delta \psi}{\Delta S} = 4 \sin 2\psi = 4 \sin\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right) = 4 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Покладемо $S = \frac{1}{2} \omega_0 t$, тоді $\Delta S = \frac{1}{2} \omega_0 \Delta t$;

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta S} = \frac{2\Delta \varphi}{\omega_0 t} = 4 \cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2};$$

$$\varphi' = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2};$$

$$\operatorname{tg} \psi = \exp(-2S) = \exp(-\omega_0 t);$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right) = \exp(-\omega_0 t).$$

Ми показали, що $\varphi(t)$ залежність якого від t визначена цим рівнянням задовольняє рівнянню $\varphi' = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}$.

Рух маятника, що відповідає сепаратрисі фазової діаграми, можна записати за допомогою елементарних функцій

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right) = e^{-\omega_0 t}. \text{ При } S(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow 0.$$

Звідси $\varphi = \pi - 4 \operatorname{arctg}(e^{-\omega_0 t})$ побудуємо графік цієї функції.

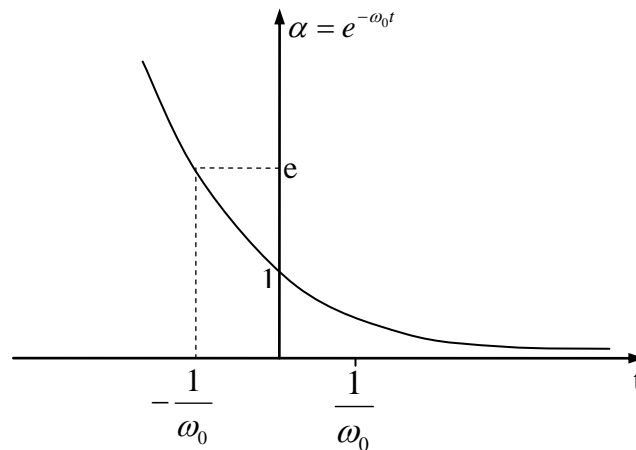


Рис.3.5

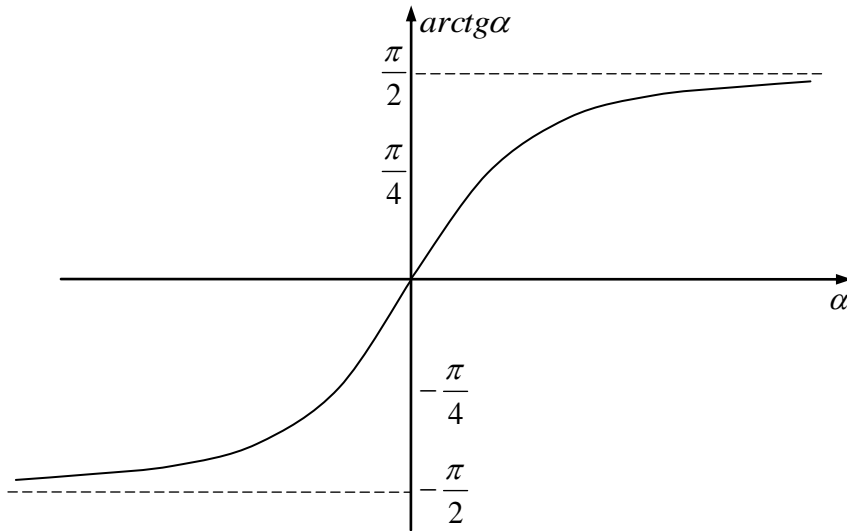


Рис.3.6

Коли t зростає від $-\infty$ до $+\infty$, $\alpha = e^{-\omega_0 t}$ зменшується $+\infty$ до 0 , при цьому $\arctg \alpha$ пробігає значення від $\frac{\pi}{2}$ до 0 , а φ змінюється від $-\pi$ до $+\pi$.

Таким чином, написаний розв'язок відповідає сепаратрисі, що йде із точки $-\pi$ в точки $+\pi$. $\varphi' = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow \varphi' = \frac{2\omega_0}{ch(\omega_0 t)} = \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}$.

Покажемо це. $ch(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}) = \frac{1}{2} * \frac{1}{\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}}$, тому що

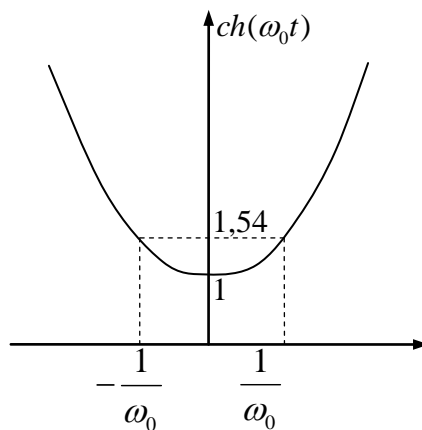


Рис.3.7

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= e^{-2S}; \\ \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} &= e^{2S}; \\ e^{2S} + e^{-2S} &= \operatorname{tg} \psi + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\psi}; \\ \sin 2\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned}$$

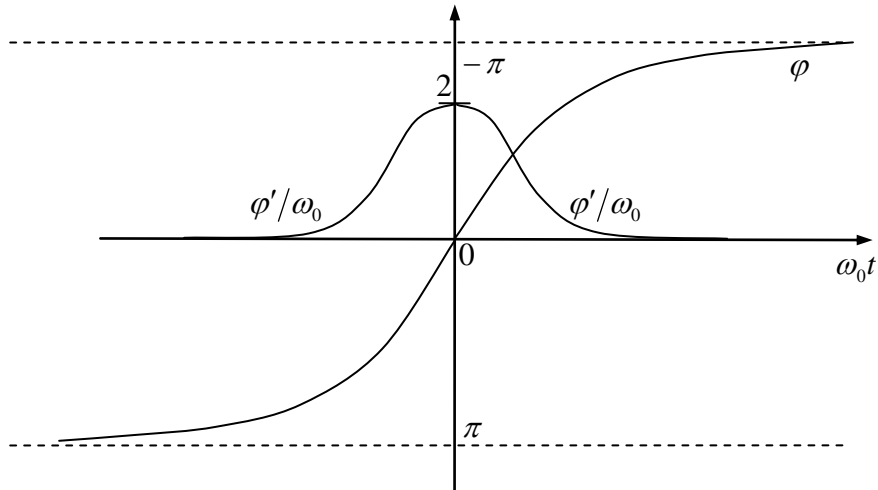


Рис.3.8. "Солітонний" розв'язок рівняння маятника

Поблизу сепаратриси частота $\omega \rightarrow 0$, швидкість системи наближається до періодичної послідовності солітоноподібних імпульсів.

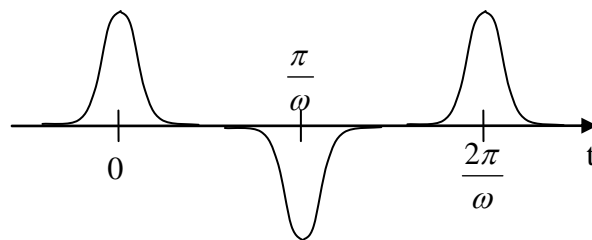


Рис.3.9

3.4 Завдання

1. Розв'язати рівняння $\varphi' = \pm 2\omega_0 * \cos \frac{\varphi}{2}$, використовуючи табличні інтеграли.

4. БІФУРКАЦІЇ

4.1 Біфуркація у простій дисипативній системі

Виберемо спочатку просту абстрактну математичну модель, на якій простіше зобразити деякі механізми, відповідальні за якісні зміни поведінки, а потім поєднаємо цю модель з реальними фізико-хімічними системами.

Розглянемо єдину змінну x , яка змінюється відповідно з рівнянням:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) = -x^3 + x\lambda. \quad (1)$$

Ця проста система має єдиний управляючий параметр λ . Причому швидкість зміни x , позначена як функція f , залежить від цього параметра суворо лінійно. Знаходимо стаціонарні стани:

$$0 = -x_s^3 + \lambda x_s.$$

Це алгебраїчне рівняння завжди має один тривіальний розв'язок:

$$x_s = 0.$$

Але можуть бути і нетривіальні розв'язки. Вони задовольняють рівнянню, яке отримують з кубічного після скорочення на x_s :

$$-x_s^2 + \lambda = 0.$$

При від'ємному λ – це рівняння має уявний розв'язок, що не може відповідати будь-якій фізично можливій ситуації. При позитивному λ це рівняння допускає два розв'язки:

$$x_{\pm} = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Ці розв'язки зливаються з x_0 при $\lambda = 0$, та відхиляються від нього при $\lambda > 0$. Це і є явище біфуркації. На рис.4.1. зображено графік стосовно нашого завдання. Суцільною та штриховою лініями позначені асимптотично стійкий та нестійкий розв'язки.

Симетрична біфуркація (типу камертона), при якій стандартний стан x_0 утрачає стійкість при $\lambda > 0$ та призводить до двох гілок розв'язків x_+ та x_- , що зливаються з x_0 .

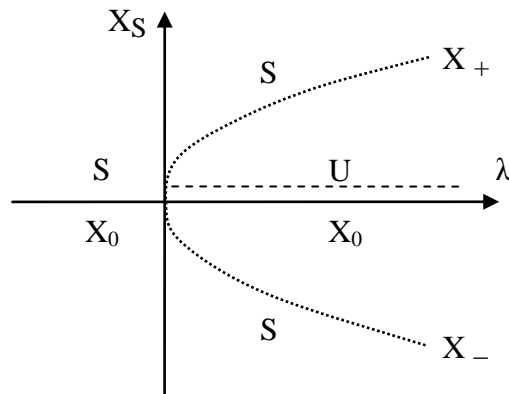


Рис.4.1

У розглянутій тут простій моделі проблема стійкості досить тривіальна, оскільки рівняння (1) допускає точний розв'язок за допомогою стандартних методів.

Іншими словами, гілки x_{\pm} з'являються в результаті біфуркації в той момент, коли стандартний стан $x_0 = 0$ утрачає стійкість, причому коли ці гілки стійкі. Таку біфуркацію інколи називають *надкритичною*.

Пригадаємо, що ми на початку мали просте кубічне рівняння, яке плавно залежало від параметру λ . Тепер видно, що повільна динаміка призводить до особливості. Дійсно в околі точки біфуркації $\lambda = 0$ розв'язки x_{\pm} не можуть бути розкладені в ряд по степеням параметра λ . Отже, вони залежать від λ *не аналітично*. Це являється математичним відображенням якісної зміни поведінки, обумовленим біфуркацією.

Розглянемо ще більш простий приклад дисипативної системи:

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu.$$

Керуючий параметр позначимо через μ . Вирази для нерухомих точок x_s мають вигляд:

$$x_{\pm} = \pm\sqrt{\mu}.$$

Цю залежність зображено на рис.4.2.

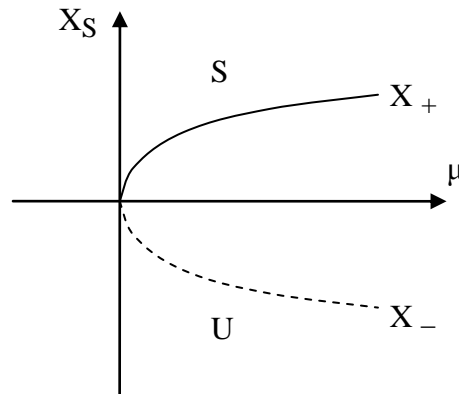


Рис.4.2

В цьому випадку також можна знайти точний розв'язок динамічного рівняння, та показати, що гілка x_- не стійка, а x_+ – асимптотично стійка. Зазначимо, що при зменшенні позитивних μ у точці $\mu = 0$ виникає зіткнення та анігіляція стійкої та нестійкої гілки. За цією причиною точка $\mu = 0$ називається *граничною точкою*, чи згорткою.

Тепер об'єднаємо два попередніх приклади, розглянувши дисипативну систему, яка описується рівнянням:

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \lambda x + \mu. \quad (2)$$

Тут немає квадратичного члену, який фігурує в рівнянні (2), оскільки його завжди можна усунути відповідною заміною змінних. Таким чином ми приходимо до завдання з двома параметрами (λ та μ). Нерухомі точки тепер визначаються канонічною формою кубічного рівняння загального виду:

$$-x_s^3 + \lambda x_s + \mu = 0.$$

Це рівняння може мати три реальні розв'язки. Більш того, при зміні параметрів відбувається злиття трьох розв'язків, в результаті чого залишається єдиний реальний розв'язок.

Область існування трьох реальних коренів закінчується в точці (початок координат), в якій залежність λ від μ має особливість. Це відома *особливість типу вістря*.

На рис. 4.3 та 4.4 приведені залежності розв'язків від параметрів. На рис.4.3 зображена залежність x_s від μ при фіксованому λ . S – подібна форма кривої обумовлена безліччю розв'язків в відповідній області значень параметра μ . Більш того, дві з гілок виявляються стійкими одночасно. Область бістабільності закінчується у двох граничних точках μ_1 та μ_2 .

При цьому спостерігається *цикл гістерезису*.

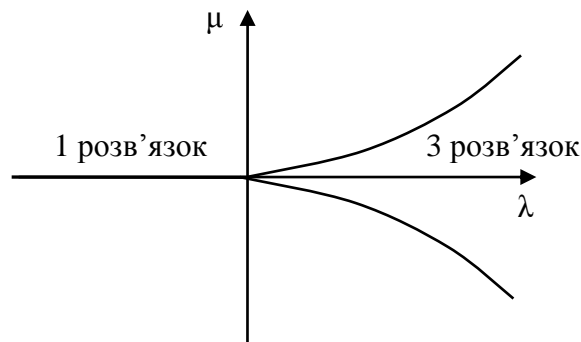


Рис.4.3

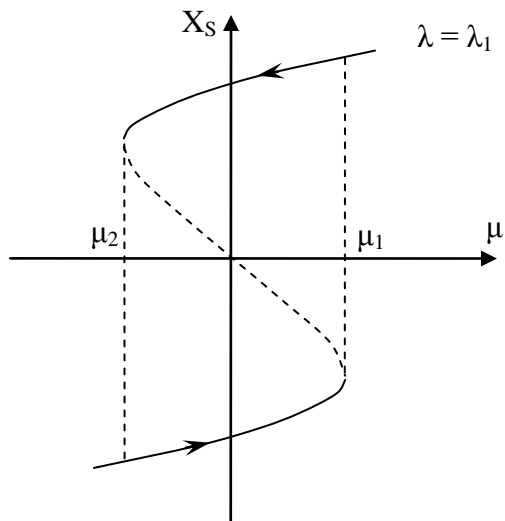


Рис.4.4

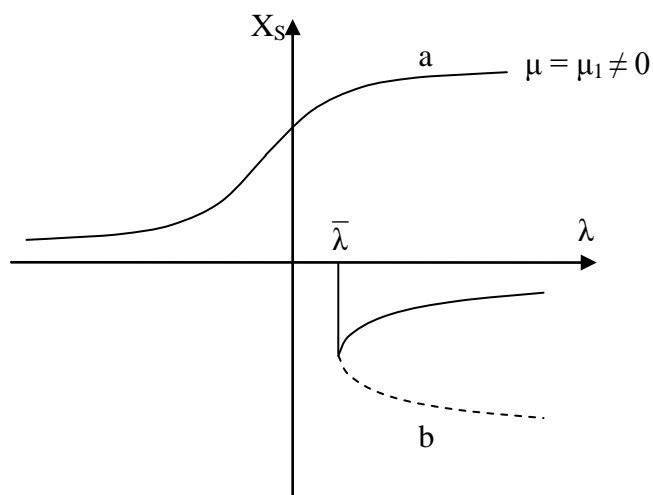


Рис.4.5

На рис.4.5 побудована залежність розв’язку x_s від λ при фіксованому μ . Тепер є дві окремі криві, одна з яких (крива a) визначена для всіх значень λ , а інша (крива b) визначена лише при $\lambda \geq \bar{\lambda}$ та має особливість типу граничної точки при $\bar{\lambda}$. $\lambda < \bar{\lambda}$ має лише стійкий розв’язок, а при $\lambda > \bar{\lambda}$, як і раніше має місце бістабільність.

Що ми досягли з точки зору фізичних застосувань? Встановили деякі “максимальні” математичні моделі, відтворюючі одне з експериментально спостережуваних перехідних явищ, що супроводжують складну поведінку, а саме виникнення множинних

одночасно стійких розв'язків. Це явище напряму зв'язане зі здатністю до переключень, і, тим самим, до виконання регуляторних задач.

4.2. Біфуркації динамічних систем другого порядку

Рівняння руху автономної динамічної системи з одним ступенем свободи описується двома диференціальними рівняннями першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (1)$$

Нехай праві частини системи (1) залежать від деякого параметра α , тобто мають вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \alpha); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \alpha);$$

де $P(x, y, \alpha)$ і $Q(x, y, \alpha)$ - аналітичні функції своїх аргументів.

Якщо при деякому значенні α система є грубою, то при невеликих значеннях α якісна картина на фазовій площині не зміниться. Однак не для всіх значень α ця умова може бути виконана. В зв'язку з цим вводиться поняття *біфуркаційного* значення параметра. За визначенням значення параметра $x=x_0$ називається *біфуркаційним*, якщо при скільки завгодно близьких до α_0 значеннях $\alpha < \alpha_0$ і $\alpha > \alpha_0$ топологічна структура фазової площини різна. Із самого визначення біфуркаційного значення параметра слідує, що при $\alpha > \alpha_0$ система не є грубою.

Нагадаємо, що для прояснення якісної картини для системи другого порядку потрібно знати поведінку не всіх траєкторій, а тільки *особливих траєкторій* до яких відносяться стани рівноваги, граничні цикли і незамкнуті траєкторії, у яких хоча б одна траєкторія (а саме крива описується точкою, що зображується при $t \rightarrow +\infty$ чи $t \rightarrow -\infty$ із початкової

точки при $t=t_0$) є сепаратрисою якого-небудь стану рівноваги. Якщо взаємне розміщення цих особливих траєкторій відомо і, крім того, визначна стійкість станів рівноваги і граничних циклів, то ми отримаємо мовну якісну картину розбивання фазової площини (x,y) на траєкторії.

Особливі траєкторії розділяють фазову площину на скінченне число комірок, оскільки із аналітичності правих частин системи (1) випливає, що число особливих траєкторій скінченне. Межа кожної комірки складається із особливих траєкторій, причому точки однієї і тієї ж траєкторії можуть бути граничними для декількох комірок.

Основною топологічною характеристикою, яка відрізняє одну комірку від іншого є її зв'язаність.

Якщо границя осередку складається з одного граничного континуума, то комірка називається однозв'язною, якщо з двох, трьох - двозв'язною, тризв'язною.

Найпростішим прикладом однозв'язної комірки є область всередині кола, двозв'язної – область між двома концентричними колами.

На рис.4.6 приведемо приклад складної однозв'язної комірки; на рис.4.7 - двозв'язної, де комірка виділена штриховою лінією. Очевидно, що комірки з неоднаковим числом зв'язності заздалегідь топологічно різні.

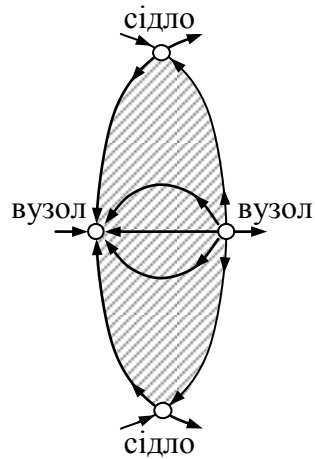


Рис.4.6

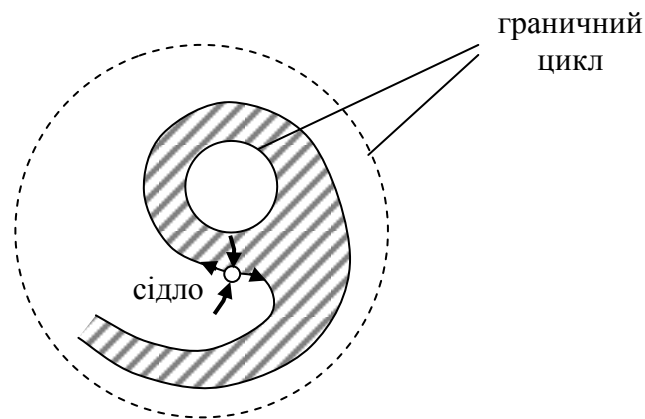


Рис.4.7

Так як якісна картина траєкторій на фазовій площині визначається особливими траєкторіями, тільки ті значення параметра α виявляються біфуркаційними, при яких з'являються особливі елементи, що мають негрубу природу. В тому випадку, коли при біфуркаційних значеннях параметра α на фазовій площині з'являється тільки один особливий елемент, кажуть, що автономна система другого порядку має перший ступінь негрубості. В такій системі негрубі елементи можуть бути одного із наступних типів:

1. *Складний стан рівноваги*, що утворюється при злитті двох простих особливих точок (наприклад, типу вузла і сідла). На

рис.4.8 зображені три послідовні фази зміни фазових траєкторій в околиці двох особливих точок: вузла O_1 і сідла O_2 . При досягненні параметром α біфуркаційного значення, точки O_1 і O_2 зливаються, утворюючи складну особливу точку типу сідло-вузол (б), а потім зникають (в).

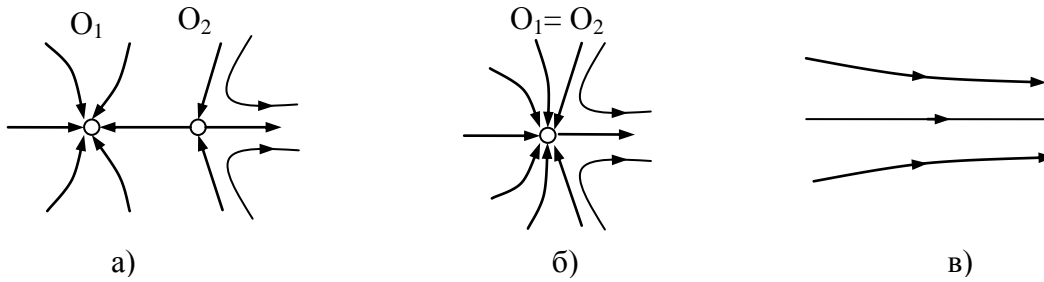


Рис.4.8

2. *Вироджений фокус чи центр.* На рис.4.9 представлена біфуркація, коли простий фокус перетворюється в складний фокус (момент біфуркації, що відповідає виродженню фокуса) із якого виникає граничний цикл.

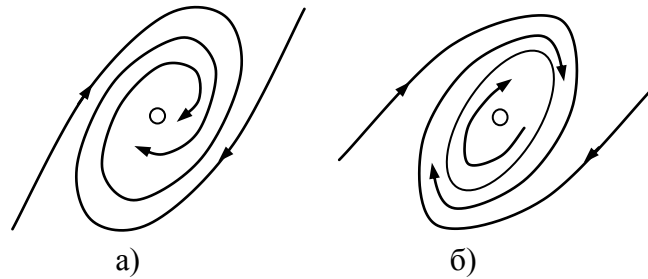


Рис.4.9

3. *Подвійний граничний цикл,* що може, наприклад, утвориться при злитті стійкого і нестійкого граничних циклів. На рис.4.10 зображені три послідовності фазових параметрів, коли два граничних цикли (стійкий і нестійкий) (а), в момент біфуркації зливаються, утворюючи граничний цикл (б), потім зникають (в). Якщо розглянути ці зображення у зворотній послідовності, то

отримаємо випадок виникнення граничних циклів із так званого ущільнення фазових траєкторій.

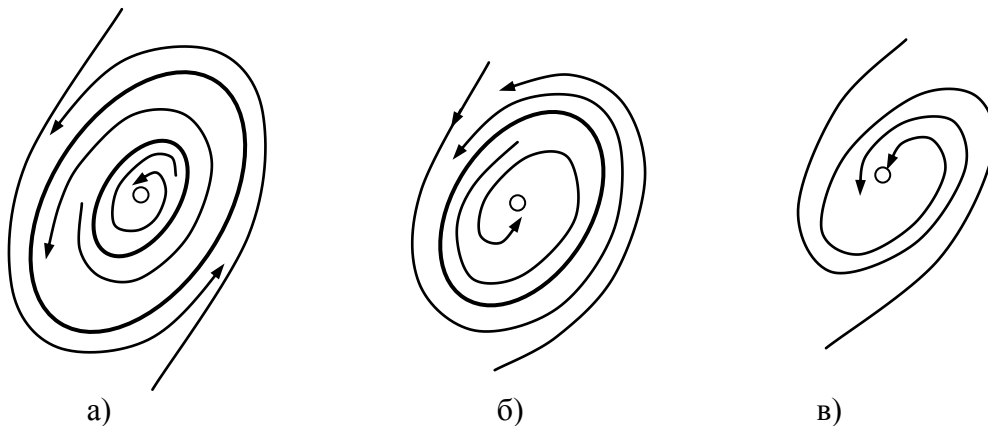


Рис.4.10

4. *Сепаратриса*, яка іде із одного сідла в інше чи в це ж саме сідло. На рис. 4.11 показаний випадок виникнення стійкого граничного циклу із петлі сепаратриси сідла. Нехай сепаратриси сідла при деякому значенні α мають розміщення таке, як показано на (а). Припустимо, що при збільшенні параметра α гілки сепаратриси зближаються і при деякому $\alpha = \alpha_0$ зливаються, утворюючи петлю (б). Якщо при подальшому збільшенні α сепаратриси сідла знову розділяються так, як показано на (в), то із петлі утворюється граничний цикл. Значення $\alpha = \alpha_0$ в цьому випадку є біфуркаційним.

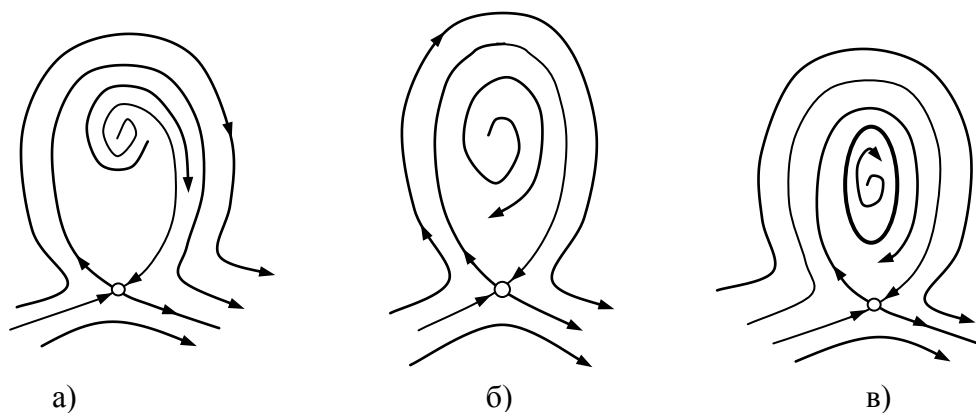


Рис.4.11

Для системи, що містить лише один параметр α простір параметрів являє собою пряму, а біфуркаційне значення $\alpha = \alpha_i$ – точки, що розбивають цю пряму на області, у кожній із яких зміна параметра α не приводить до зміни фазового портрета.

Якщо система містить два параметра α і β , тоді простором параметрів буде площина, яка розділена на області однакової поведінки системи з допомогою біфуркаційних кривих. Знаючи структуру розбиття фазового простору для якої-небудь точки площини параметрів $\alpha \beta$, можна, неперервно переміщуючись в цій площині, знайти структуру фазового простору для будь-якої іншої точки площини параметрів. При цьому потрібно знати лише характер біфуркації, яка відбувається в фазовому просторі тієї чи іншої біфуркаційної границі. В цьому виявляється евристична цінність теорії біфуркацій.

4.3. Завдання

1. Визначити зміну стійкості стаціонарних розв'язків від параметра для виразу:

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \lambda x.$$

2. Визначити зміну стійкості стаціонарних розв'язків від параметра для виразу:

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu.$$

5. ЕКОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ

5.1. Експотенціальний та логістичний ріст

Математична модель росту популяції та взаємодії хижак-жертва при спрощуючих припущеннях:

1. Густина даного виду, тобто кількість особин на одиницю площі, може бути повністю описана за допомогою однієї змінної; це означає, що ми нехтуємо віковими, статевими та генетичними відмінностями;
2. Зміни густини можуть бути адекватно описані детерміністськими рівняннями;
3. Результати взаємодії в межах виду та між видами вважаються миттєвими. Необхідно враховувати наступну обставину: якщо детерміністські рівняння передбачають, що густина популяції досягне стійкого значення, то густина реальної кінцевої системи, ймовірно, буде коливатись біля цього значення; якщо детерміністські рівняння передбачають коливання чисельності, то цілком можливо, що у випадку реальної кінцевої популяції це призведе до вимирання.

Найпростіше диференціальне рівняння, що описує ріст популяції, має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = rx,$$

де x – густина популяції у момент t , а r – постійна. Розв'язком цього рівняння є функція $x = x_0 \cdot e^{rt}$, де x_0 – густина в момент часу $t = 0$. Ця функція добре описує ріст колонії бактерій до виснаження культурного середовища. З рівняння випливає, що якщо у будь-який момент часу почати спостереження за великою вибіркою особин і продовжувати його протягом короткого періоду Δt , то частка особин, що розмножувались

протягом цього періоду, буде дорівнювати $r \cdot \Delta t$, де r – постійна. А це означає, що *розподіл за віком* (стосовно до бактерій – частка особин, що знаходяться на різних стадіях циклу ділення) не змінюється з часом. Подібне твердження справедливе не для всіх випадків. Наприклад, наведене рівняння не може бути адекватним описом для синхронізованої культури. Однак, як показав Лотка, вікова структура популяції, що розмножується, буде наближуватись до стійкої за умови, що специфічна для кожної вікової групи народжуваність та смертність залишаються постійними. А це в свою чергу вимагає сталості умов середовища, наявності надлишку необхідних ресурсів і відсутності еволюційних змін.

Найпростіше диференціальне рівняння справедливе лише для обмеженого періоду часу; наприкінці популяція, що росте, вичерпує наявні ресурси. Чисельність популяції стабілізується на деякому стійкому значенні; вона може відчувати регулярні або нерегулярні флуктуації або скорочуватись. Поведінка популяції, чисельність якої стабілізується на деякому стійкому рівні, часто описується за допомогою логістичного рівняння (аналогічного рівнянню Ферхюльста)

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad \text{або} \quad \frac{dx}{dt} = 2x \left(1 - \frac{x}{k} \right).$$

Застосування цього рівняння можна пояснити тим, що воно є найпростішим диференціальним рівнянням, яке має дві необхідні властивості:

1. При малих значеннях x рівняння зводиться до найпростішого і ріст має експотенціальний характер;
2. За ростом t величина x монотонно наближується до постійного значення.

На рис.5.1 зображена крива росту дріждевих клітин у культурі та ріст, що передбачається логістичним рівнянням.

У рівнянні r означає істинну швидкість росту, а k – ємність середовища. „Ємність середовища” – означає рівноважну густину, яка досягається видом жертви у відсутності хижака.

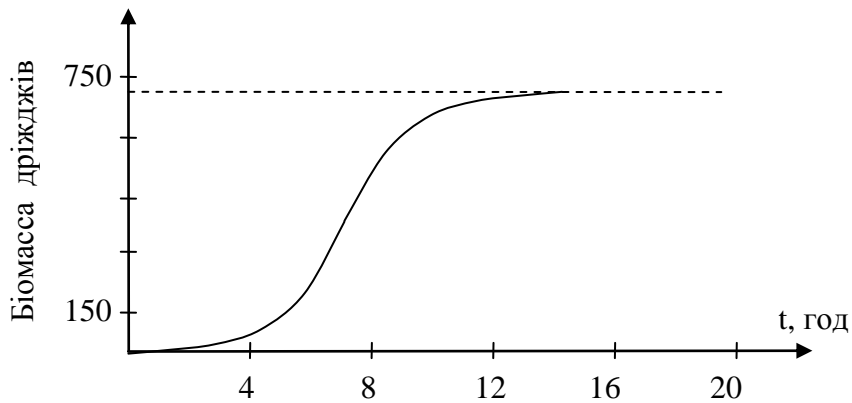


Рис.5.1

Рівняння було виведено на основі деяких свідчень або припущень відносно того, який саме вплив здійснює густина популяції на розташування окремих особин; воно лише представляє собою найпростіший математичний опис певного типу росту.

5.2. Рівняння Вольтерра. Система хижак-жертва

Вольтерр розглядав наступні рівняння, що описують взаємодію між видами жертви з густиною x та знищуючим її хижаком з густиною y :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bx^2 - cxy \\ \dot{y} = -ey + c'xy \end{cases}$$

В основі цього рівняння лежать, окрім розглянутих раніше, наступні припущення:

1. У відсутності хижацтва ріст численності жертви буде відбуватись у відповідності з логістичним рівнянням, з істинною швидкістю росту a і місткістю середовища a/b ;

2. Швидкість виїдання жертви пропорційна добутку густин хижака та жертви.

Ці припущення справедливі в тому випадку, якщо особини одного або обох видів пересуваються випадковим чином, тобто якщо є деяка постійна ймовірність, що при зустрічі хижак вб'є жертву при тому, що часом, який витрачає хижак на поїдання жертви, можна знехтувати. Ці припущення подібні до тих, які приймаються в хімічній кінетиці для швидкості реакції, у ході якої дві молекули утворюють одну.

В будь-який момент часу t стан системи повністю описується значеннями x і y : кожному стану системи відповідає деяка точка на площині $(x; y)$, яка зветься *фазовою площиною*. Якщо кожній точці фазової площини ми можемо протиставити стрілку, яка вказує напрямок руху системи у цій точці, то з'єднавши ці стрілки одну з одною, отримаємо траєкторії, які вкажуть нам, як буде відбуватись рух системи. Побудуємо в фазовій площині лінії, для яких $\dot{x} = 0$ (стрілки паралельні вісі ординат) і $\dot{y} = 0$ (стрілки паралельні вісі абсцис):

$$\dot{x} = 0, \text{ коли } a - bx - cy = 0;$$

$$\dot{y} = 0, \text{ коли } -e + c'x = 0.$$

Знаходимо точку спокою (рівноваги), коли $\dot{x} = \dot{y} = 0$ одночасно. Для цього необхідно, щоб

$$x = \frac{e}{c'}; \quad y = \frac{a}{c} - \frac{be}{cc'}.$$

При цьому x обов'язково додатній, але y має додатне значення тільки у тому випадку, якщо $\frac{a}{c} > \frac{be}{cc'}$, або $\frac{a}{b} > \frac{e}{c'}$; ця нерівність показує, що стан спокою, який відповідає співіснуванню хижака і жертви, може бути досягнутий лише у тому випадку, коли ємність середовища для жертви a/b , достатньо велика, щоб популяція жертви могла прогодувати хижака.

Для того, щоб визначити динаміку системи методом ізоклін знаходимо траекторію руху. Для цього відмітимо, що при $x > \frac{e}{c'}$ значення \dot{y} додатне, а для $x < \frac{e}{c'}$ – від’ємне. Крім того, для точок, що розташовані на площині вище лінії $a - bx - cy = 0$, значення $\dot{x} < 0$, а для точок, що розташовані нижче цієї лінії – додатне. Це дає можливість знайти розташування стрілок, зображених на рис.5.2,а. На рис.5.2,б ці стрілки з’єднані між собою і утворюють траекторію, що має вид спіралі, що намотується на точку спокою. Швидкість наближення

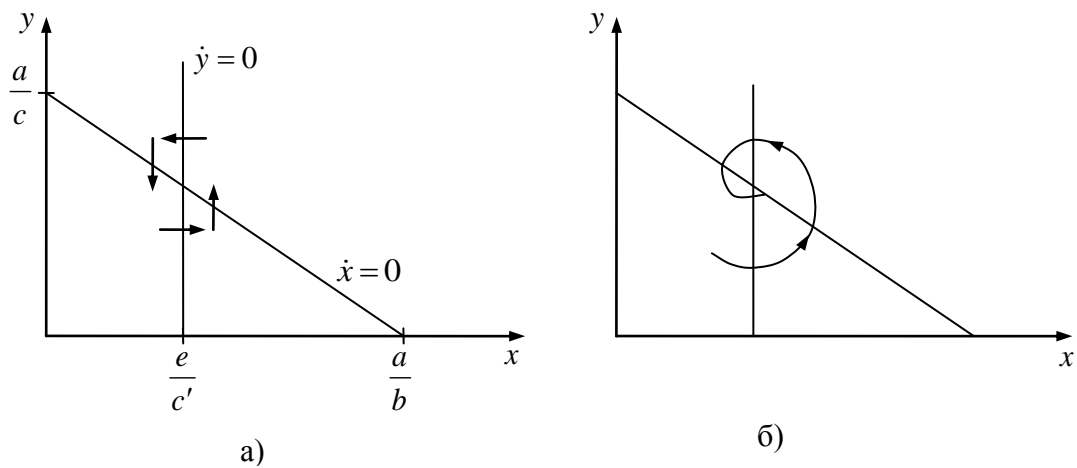


Рис.5.2

спіралі до точки спокою визначається величиною кута, утвореного лініями $\dot{x} = 0$ і $\dot{y} = 0$ (рис.5.3).

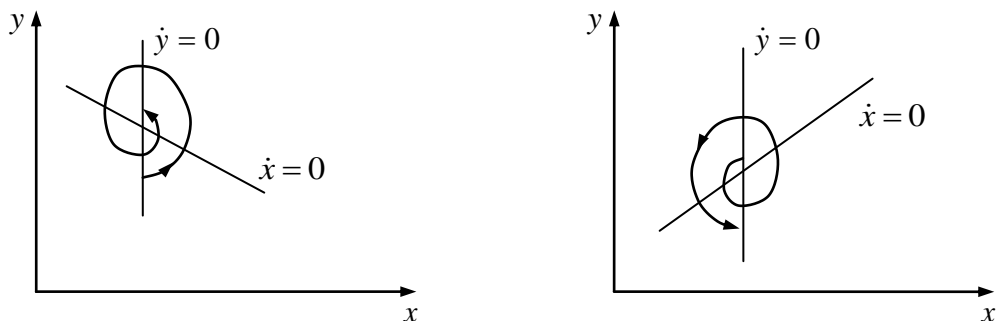


Рис.5.3

Ці доволі не суворі переконання, що базуються на геометричній ситуації для даних рівнянь можуть, бути підтверджені аналітично. Сенс спіралі, що закручена проти годинникової стрілки, означає, що чисельність і жертви і хижака коливається із амплітудою, що зменшується, причому коливання чисельності хижака відрізняються по фазі від коливань чисельності жертви.

Припустимо, що єдиним фактором, що обмежує чисельність жертви, є хижак: при цьому $b=0$ і у відсутності хижака чисельність жертви збільшується експотенціально. Поведінка такої системи показана на рис.5.4. Коливання чисельності відбувається з деякою постійною амплітудою, що залежить від початкових умов: у системі, що знаходиться в початковий момент близько до стану рівноваги, амплітуда коливань невелика, а у

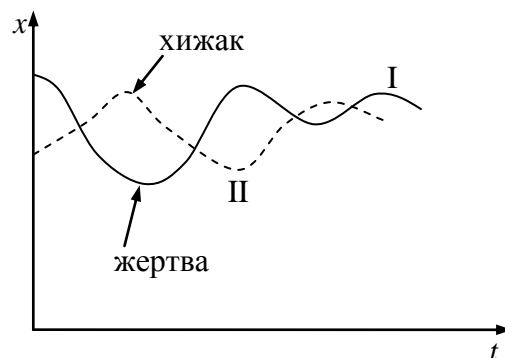


Рис.5.4

системі, яка є від початку далекою від точки спокою, коливання будуть мати велику амплітуду. Подібна система називається *консервативною*, тому що для неї існує величина, яка не змінюється під час еволюції системи подібно тому, як залишається постійною енергія при простому гармонічному коливанні.

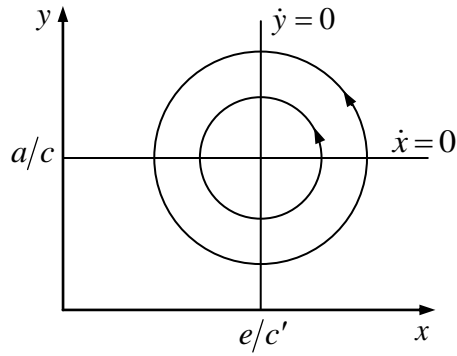


Рис.5.5

Член $-bx^2$ в рівнянні, виражає пригнічуючу дію, яку даний вид здійснює на свій власний ріст (наприклад, в результаті конкуренції), називається *демпфіруючим*. В екології головний фактор, що зменшує амплітуду коливань – це наявність подібних самопригнічуючих впливів. У рівняння для жертви включений демпфіруючий член, але в рівнянні для хижака такого члену немає, оскільки припускається, що чисельність хижака обмежується тільки кількістю, тобто чисельністю його жертви.

5.3. Завдання

1. Графічним методом дослідити рівняння Вольтерра при наявності сховища у жертви.
2. Методом фазових траєкторій дослідити рівняння Вольтерра, що описують боротьбу між двома видами травоядних тварин (без демпфірування), що проживають на одному ареалі.

6. ПОРОГОВІ ЯВИЩА

Для того щоб зрозуміти події, що відбуваються навколо нас, необхідно будувати різні моделі й зіставляти їх з нашими спостереженнями.

Складне розглядається як здатність до перемикання між різними типами поведінки при зміні різних умов. У свою чергу, гнучкість і пристосованість що впливають звідси, приводять до поняття про вибір між різними наявними можливостями. Вибір опосередковується динамікою флуктуацій, для чого потрібне втручання двох їх антагоністичних проявів - випадковості на малих масштабах й упорядкованості на великих масштабах. При цьому випадковість виступає в ролі деякого інноваційного елемента, потрібного для простору постійно, а впорядкованість дозволяє системі підтримувати колективний режим, що охоплює макроскопічні області, і тимчасові інтервали.

Необхідною передумовою всіх цих явищ є нелінійна динаміка, за певних умов, що приводить до *нестійкості руху* й *біфуркаціям*.

Розглянемо приклад нелінійної системи в умовах далеких від рівноважних, а саме граничні явища в клітинній динаміці. Розглянемо конкуренцію в біологічних явищах, наприклад, у таких життєво важливих, як ріст пухлин.

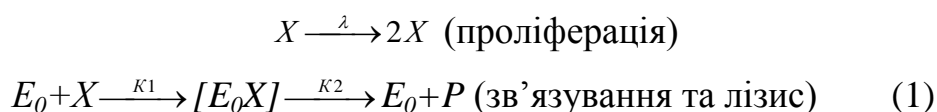
У цьому випадку початково мала популяція "скоювачів безладдя", наприклад певні клітки деякої тканини, по тим чи іншим причинам, втратили свої фізіологічні функції й стали злякисними. Надалі вони намагаються захопити весь організм за рахунок швидкої проліферації, однак організм намагається чинити опір, посилаючи на "поле бою" спеціалізовані клітини-вбивці. Подальша доля організму вирішується саме в результаті конкуренції між злякисними клітками й клітинами-вбивцями. Аналіз цієї конкуренції дозволяє прийти до найважливішого

висновку, а саме відкидання "скоювачів" або їхню перемогу можна розглядати як порогове явище.

Основні властивості клітин - вбивць. Імунна система хребетних, що поставляє організму засоби протидії чужорідним патогенним речовинам, робить у кістковому мозку недиференційовані вихідні зародкові клітки. У результаті подальшої диференціації ці клітки перетворюються в В - або Т- лімфоцити, що надходять в організм. Зустрічаючись із чужорідною речовиною, що звичайно називається *антигеном*, В-клітини піддаються подальшій диференціації у відповідно більші клітки, які проліферують і секретують, здатні нейтралізувати антигени, та хімічні речовини, що називають *антитілами*. З іншого боку, Т-клітини, після подальшої диференціації, що відбуває в тимусі, регулюють дію В-клітин, підсилюючи або придушуючи їхню діяльність. Крім того, вони беруть участь в імунних відповідях, викликаних безпосередньо клітинами, особливо раковими або чужорідними, як це буває при пересадженні тканин або органів.

6.1 Рівняння, що описують стан імунної системи

Нехай X - щільність популяції проліферуючих клітин-мішеней (наприклад, злоякісної пухлини), а E_0 щільність вільних цитотоксичних клітин. Згідно експериментальним даним, клітки E_0 розпізнають клітки X , фіксують їх у вигляді комплексу $E \equiv E_0X$ та в подальшому здійснюють їхній лізис при дисоціації комплексу E . Цю послідовність стадій можна записати у вигляді:



Прийmemo, що під час розглядання процесу конкуренції між E_0 і X стан імунної системи можна вважати стаціонарним практично у всіх відносинах. Це означає, що повна щільність популяції вільних і зв'язаних імунних клітин $E_+ = E_0 + E$ залишається постійною з часом. При перерахованих умовах можна записати наступні рівняння балансу:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \lambda \cdot X \cdot \left(1 - \frac{X}{N}\right) - k_1 \cdot E_0 \cdot X \\ \frac{dE_0}{dt} &= -k_1 \cdot E_0 \cdot X + k_2 \cdot E \end{aligned} \quad (2)$$

Множник $1 - \frac{X}{N}$ виражає існування верхньої межі N для X усередині елемента об'єму, у якому відбувається конкурентна боротьба. Оскільки лізис повинен протікати набагато швидше інших стадій, для другого рівняння можна скористатися квазістаціонарними наближеннями. Тому думаємо $\frac{dE_0}{dt} \sim 0$ та використовуючи умову збереження для клітин E -типу,

можна виразити E_0 через X та одержати перше рівняння у вигляді:

$$\frac{dX}{dt} = \lambda \cdot X \cdot \left(1 - \frac{X}{N}\right) - \frac{k_1 \cdot E_0 \cdot X}{1 + \frac{k_1}{k_2} \cdot X}. \quad (3)$$

При заміні $\beta = k_1 \cdot E_0 / \lambda$, $\theta = k_2 / k_1 \cdot N$, $\tau = \lambda \cdot t$, $x = k_1 / k_2 \cdot X$ (4)

Безрозмірне рівняння записується у вигляді:

$$\frac{dX}{dt} = x \cdot (1 - x \cdot \theta) - \frac{\beta \cdot x}{1 + x}. \quad (5)$$

Очевидно, що рівняння (5) завжди допускає стаціонарне рішення $X=0$.

Лінійний аналіз стійкості показує, що незалежно від значення, це рішення нестійке при $\beta < 1$ і стійке при $\beta > 1$.

Існування ненульового стаціонарного розв'язку для X відповідає пухлинному стану тканини. Залежно від значення θ тут можуть виникати дві якісно різні ситуації. Ці випадки представлені на рисунках 6.1 та 6.2:

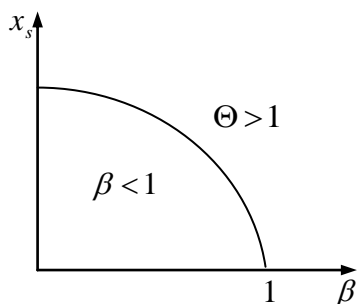


Рис.6.1

При $\theta > 1$ пухлина може існувати лише за умови $\beta < 1$.

Тому умови повного придушення пухлини зводяться до того, що в процесі імунного процесу θ повинна перевищувати одиницю. При $\theta < 1$ перехід між пухлинним і безпухлинним станом пов'язаний з явищем бістабільності, властивості якого нагадують нерівноважні переходи. В області $1 < \beta < \beta_c = (1 + \theta)2/4\theta$ нульове (нормальне) і одиничне (пухлинне) стани

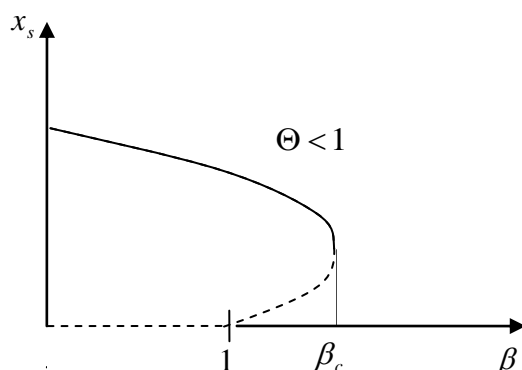


Рис.6.2

стійкі одночасно. Можна чекати, що перехід між цими станами пов'язаний із процесами нуклеації. Якщо нормальний стан відповідає пухлині, то її придушення при зростанні β можливо за умови $\beta > \beta_c$. Параметр β власне кажучи описує ефективність імунної системи, легко зрозуміти, що для даного стану імунної системи в області $\beta < \beta < \beta_c$, $\theta < 1$,

залежно від передісторії тканини можлива як нормальна, так і патологічна ситуація.

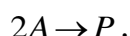
6.2 Завдання

1. Показати стійкість здорового організму ($X_{\xi}=0$) від параметру β - ефективності імунної системи.
2. Показати залежність пухлинного стану від значень θ .
3. Визначити значення β_c .

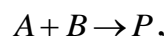
7. ВІДПОВІДІ ТА РОЗВ'ЯЗКИ

Завдання 1.3

Кінетика реакції другого порядку. Існує два типи реакцій другого порядку: швидкість реакції може бути пропорційна добутку або двох рівних концентрацій, або двох різних концентрацій. Перший випадок може існувати, якщо в реакції бере участь тільки одна вихідна речовина. Тоді такий процес можна описати схемою:

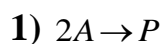


В другому випадку в реакцію вступають дві різні речовини:



при цьому передбачається, що їхні вихідні концентрації однакові.

В обох випадках рівняння для швидкості реакції записують у такий спосіб:



$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^2,$$

де x - кількість речовини A , що реагує в одиниці об'єму за час t , і a - початкова концентрація даної речовини. Розділивши змінні, одержимо

$$\frac{dx}{(a-x)^2} = kdt.$$

Після інтегрування маємо

$$\frac{1}{a-x} = kt + I.$$

При $t = 0$ величина $x = 0$, отже $I = \frac{1}{a}$.

І остаточно

$$\frac{x}{a(a-x)} = kt,$$

тобто в цьому випадку експонціальна залежність x від t відсутня.

Відповідність отриманих експериментальних даних даного рівняння можна також перевіряти графічно, а заодно й одержати значення константи швидкості. Для цього будуємо графік залежності $\frac{x}{a(a-x)}$ від t ; експериментальні точки повинні лягти на одну пряму, що проходить через початок координат: нахил прямої визначає величину k .

Можна уникнути побудови графіків і просто обчислити значення функції $\frac{x}{a(a-x)}$ в різні моменти часу. Якщо реакція, що протікає є реакцією другого порядку, то значення k не повинне змінюватися з часом, і тоді середню величину можна прийняти за величину константи швидкості реакції.

Вираз для часу напівперетворення можна одержати, підставляючи в рівняння $\frac{a}{2}$ замість x і τ замість t . Тоді маємо

$$\tau = \frac{1}{ak}.$$

Час напівперетворення знову обернено пропорційний k , однак тут на відміну від реакції першого порядку, де τ не залежить від a , воно обернено пропорційне a . Такий результат указує на те, що має місце реакція другого порядку.

2) $A + B \rightarrow P$

Якщо швидкість реакції пропорційна концентрації двох різних компонентів, і ці концентрації не однакові в початковий момент часу, то інтегрування проводиться інакше.

Припустимо, що a та y – вихідні концентрації; після того як в одиниці об'єму прореагувало x речовини, швидкість реакції стала рівною:

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x).$$

Розподіл змінних дає

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt.$$

Ліву частину цього виразу можна інтегрувати методом підстановки, для цього вираз переписують у такий спосіб:

$$\frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} = kdt.$$

Порівнюючи ці два вирази знаходимо, що

$$A = \frac{1}{b-a}; \quad B = \frac{1}{a-b},$$

тобто рівняння можна записати в наступному вигляді

$$\left[\frac{1}{(b-a)(a-x)} + \frac{1}{(a-b)(b-x)} \right] dx = kdt.$$

Інтегруючи його, одержимо

$$-\frac{\ln(a-x)}{b-a} - \frac{\ln(b-x)}{a-b} = kt + I$$

або

$$\frac{1}{a-b} \ln \frac{a-x}{b-x} = kt + I.$$

Константу інтегрування визначимо з умови, що при $t = 0$ величина $x = 0$, тоді

$$I = \frac{1}{a-b} \ln \frac{a}{b}.$$

У такий спосіб

$$\frac{1}{a-b} \ln \frac{b(a-x)}{a(b-x)} = kt.$$

Способи аналізу експериментальних результатів по цьому рівнянню аналогічні описаним вище. Можна побудувати графік залежності величини, що знаходиться ліворуч від t або обчислювати при різних t наступний вираз:

$$\frac{1}{t(a-b)} \ln \frac{b(a-x)}{a(b-x)} = kt.$$

Так як в цьому випадку початкові концентрації не однакові, то поняттям напівперетворення тут користуватися не зручно.

3) Реакції n -го порядку. У загальному випадку для реакції n -го порядку з однаковими початковими концентраціями рівняння для швидкості реакції можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^n$$

або

$$\frac{dx}{(a-x)^n} = kdt.$$

Інтегруючи одержимо

$$\frac{1}{(n-1)(a-x)^{n-1}} = kt + I.$$

Коли $t = 0$, те і величина $x = 0$, так що

$$I = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}},$$

звідки

$$\frac{1}{n-1} \left[\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right] = kt.$$

Це рівняння справедливе для будь-яких n , крім $n = 1$.

У загальному випадку для реакції n -го порядку час напівперетворення τ одержують, замінюючи x на $\frac{a}{2}$, тобто

$$\tau = \frac{2^{n-1} - 1}{(n-1)ka^{n-1}}.$$

Іноді цими співвідношеннями користуються для визначення порядків реакції по експериментальним даним.

Завдання 2.4

2.4.1. Знайти розв'язки рівнянь методом ізоклін:

$$\frac{dx}{dt} = -x + t, \quad x_0 = 0, \quad t_0 = 0.$$

$$A(x,t) = -x + t = C_i, \quad \frac{dx}{dt} = C_i.$$

$$C_1 = 0, \quad x = t, \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

$$C_2 = 1, \quad x = t - 1, \quad \frac{dx}{dt} = 1, \quad \angle 45^\circ;$$

$$C_3 = -1, \quad x = t + 1, \quad \frac{dx}{dt} = -1, \quad \angle -45^\circ.$$

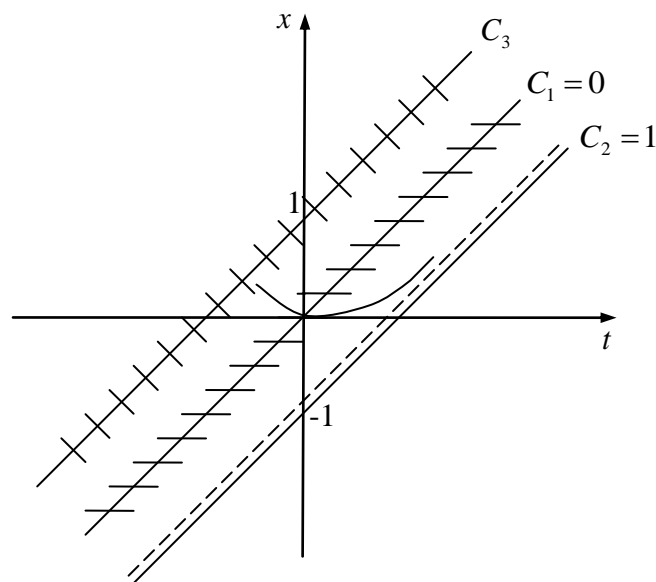


Рис.7.1

2.4.2. Знайти розв'язки рівнянь:

1. $\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 16$ з $x_{min} = 2$.

Екстремальна точка має дотичну $\frac{dx}{dt} = 0$. Для точки мінімуму знаки дотичних змінюються: $- 0 +$.

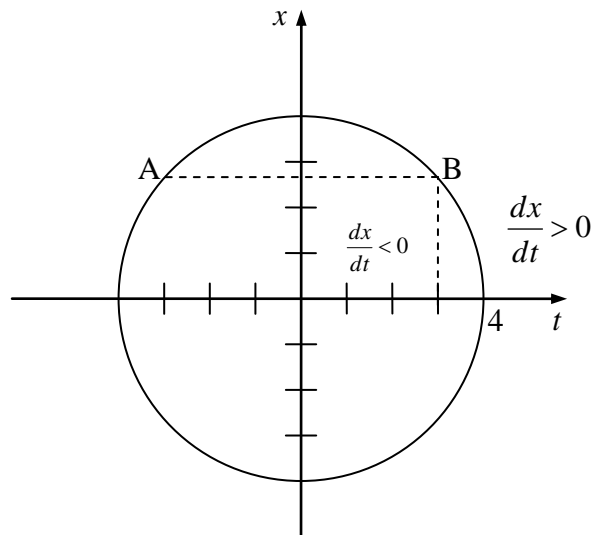


Рис.7.2

$$x^2 + t^2 - 16 = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0.$$

Всередині кола: $\frac{dx}{dt} < 0$.

Поза нею: $\frac{dx}{dt} > 0$.

Точка мінімуму: $B(-0+)$ (зліва направо) дорівнює $(2, \sqrt{12})$;

2. $A = (4, -3)$;

3. $B = (6, 8)$;

4. $A = (5, -9)$;

5. $B = (5, \sqrt{39})$.

2.4.3. Дослідити особливі точки системи рівнянь:

№1,7,10

Для системи знайти границю: сідло, стійкість вузлів і фокусів, фокусів:

$$\dot{x} = 1 - y \ln|x| = P(x, y),$$

$$\dot{y} = x(x^2 + 2y - a^2) = Q(x, y).$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = \left(-y \frac{1}{x}\right) \cdot \zeta + (-\ln|x|) \cdot \eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = (3x^2 + 2y - a^2) \cdot \zeta + (2x) \cdot \eta.$$

$$a = -y \frac{1}{x}, \quad b = -\ln|x|,$$

$$c = 3x^2 + 2y - a^2, \quad d = 2x.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-cb)} \right],$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\left(-y \frac{1}{x} + 2x \right) \pm \sqrt{\left(-y \frac{1}{x} + 2x \right)^2 - 4 \left(-y \frac{1}{x} 2x + (3x^2 + 2y - a^2) \ln|x| \right)} \right].$$

Знаходимо фокуси та вузли:

$$G = a+d=0, \quad 2x - \frac{y}{x} = 0.$$

Границі сідел:

$$\Delta = -4(ad-cb) = 4(cb-ad) = 0,$$

$$2y - \ln|x|(3x^2 + 2y - a^2) = 0.$$

Границя фокусів:

$$4(bc-ad) = -(a+d)^2,$$

$$(2x^2 - y)^2 - 4x^2 (\ln|x|(3x^2 + 2y - a^2) - 2y) = 0.$$

№2. Дослідити особливі точки системи:

$$\dot{x} = x + 8 - y = P(x, y),$$

$$\dot{y} = xy + 7 = Q(x, y).$$

$$x_S - y_S + 8 = 0,$$

$$y_S = x_S + 8;$$

$$x_S y_S + 6 = 0,$$

$$x_S(x_S + 8) + 7 = 0,$$

$$x_{S1,2} - 4 \pm \sqrt{16 - 7} = -4 \pm 3,$$

$$x_{S1} = -1,$$

$$x_{S2} = -7,$$

$$y_{S1} = 7,$$

$$y_{S2} = 1.$$

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \right|_S \cdot \zeta + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_S \cdot \eta = 1 \cdot \zeta - 1 \cdot \eta,$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_S \cdot \zeta + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_S \cdot \eta = y \cdot \zeta + x \cdot \eta.$$

1. $x = -1, y = 7,$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1;$$

$$b_1 = 7, \quad b_2 = -1.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[1 + (-1) \pm \sqrt{[1 - (-1)]^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 7} \right] = \frac{1}{2} \left[0 \pm \sqrt{4 - 28} \right]$$

$$\lambda_1 = \frac{j}{2} \sqrt{24},$$

$$\lambda_2 = -\frac{j}{2} \sqrt{24}.$$

Центр або фокус.

2. $x = -7, y = 1,$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1;$$

$$b_1 = 1, \quad b_2 = -7.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[1 + (-7) \pm \sqrt{[1 - (-7)]^2 + 4 \cdot (-1) \cdot 1} \right] = \frac{1}{2} \left[6 \pm \sqrt{64 - 4} \right],$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \frac{\sqrt{60}}{2} = -3 \pm 3.87,$$

$$\lambda_1 = 0.87,$$

$$\lambda_2 = -6.87.$$

Сідло.

№3. Знайти границю стійкості вузлів ті фокусів системи.

$$\dot{x} = -x + xy^2 = P(x, y),$$

$$\dot{y} = x + y = Q(x, y).$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = (-1 + y^2) \cdot \zeta + 2xy \cdot \eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = 1 \cdot \zeta + 1 \cdot \eta.$$

$$a = (-1 + y_s^2),$$

$$b = 2xy,$$

$$c = 1,$$

$$d = 1.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \right]$$

Стійкість фокусів та вузлів:

$$G = a + d = 0,$$

$$y^2 - 1 + 1 = 0, \quad y = 0.$$

№4. Знайти границю сідел системи:

$$\dot{x} = -x + 5y^2 = P(x, y),$$

$$\dot{y} = x^2 + xy = Q(x, y).$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = 1 \cdot \zeta + 10y_s \cdot \eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = (2x + y)_s \cdot \zeta + x_s \cdot \eta.$$

$$a_1=1, \quad a_2=10y_s;$$

$$b_1=2x_s+y_s, \quad b_2=x_s.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(a_1+b_2) \pm \sqrt{(a_1+b_2)^2 - 4(a_1b_2 - a_2b_1)} \right]$$

Границя сідел: $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

$$(2x_s + y_s) \cdot 10y_s - 1 \cdot x_s = 0,$$

$$10y(2x + y) - x = 0,$$

$$10y^2 + 20xy - x = 0,$$

$$y_{1,2} = -x \pm \sqrt{x^2 + \frac{x}{10}}.$$

№5. Знайти границю фокусів системи:

$$\dot{x} = y(x + y + 4) + x^2 = P(x, y),$$

$$\dot{y} = 5x + 4y - 6 = Q(x, y).$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = (2x + y) \cdot \zeta + (x + 2y + 4) \cdot \eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = 5 \cdot \zeta + x_s \cdot 4\eta.$$

$$a = 2x + y,$$

$$b = x + 2y + 4,$$

$$c = 5,$$

$$d = 4.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \right]$$

Границя фокусів: $(a + d)^2 = 4(ad - bc)$,

$$(2x + y + 4)^2 = 4[(2x + y) \cdot 4 - (x + 2y + 4) \cdot 5],$$

$$4x^2 + y^2 + 16 + 4xy + 16x + 8y = 32x + 16y - 20x - 40y - 80,$$

$$4x^2 + y^2 + 4x + 32y + 4xy + 96 = 0,$$

$$4x[x + y + 1] + y[y + 32] + 96 = 0.$$

№6. Знайти умови стійкості розв'язків системи:

$$\dot{x} = y(5 + x + x^2) - 2x = P(x, y),$$

$$\dot{y} = (y + y^2) + x + x^2 = Q(x, y).$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = (2xy + y - 2) \cdot \zeta + (5 + x + x^2) \cdot \eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = (2x + 1) \cdot \zeta + x_s \cdot (1 + 4y) \eta.$$

$$a = 2xy + y - 2,$$

$$b = 5 + x + x^2,$$

$$c = 2x + 1,$$

$$d = 4y + 1.$$

Умова

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \right]$$

$$-2 + y + 2xy + 1 + 4y = 0,$$

$$-1 + 5y + 2xy = 0,$$

стійкості: $a + d < 0$. $x = \frac{1 - 5y}{2y}$,

$$x < \frac{1 - 5y}{2y} - \text{стійка.}$$

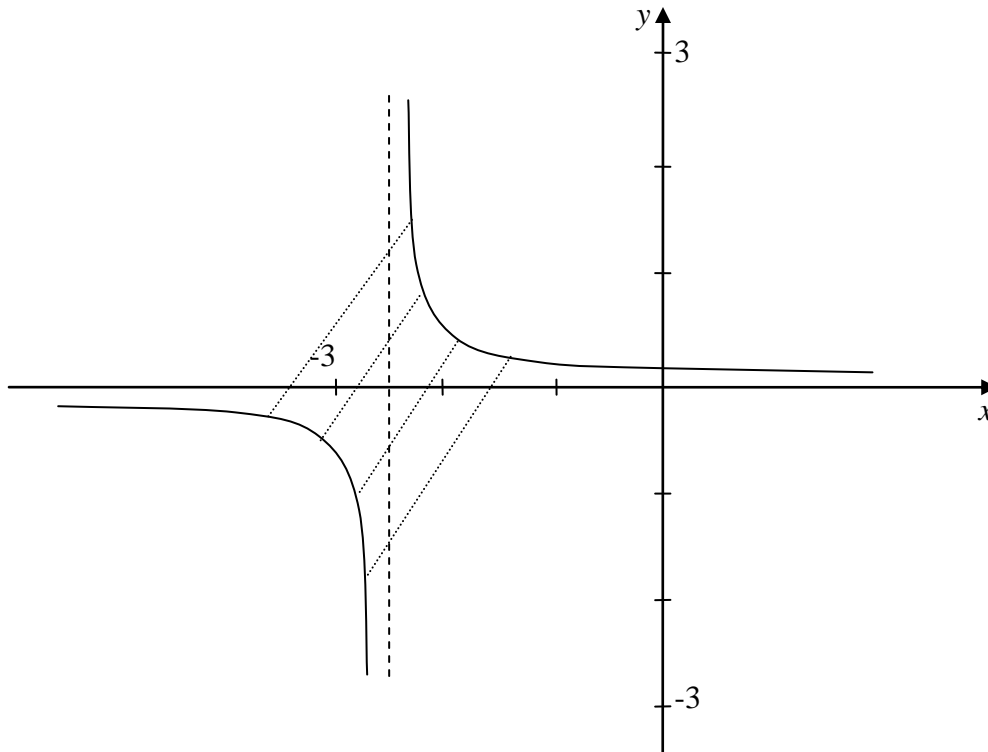


Рис.7.3

№8. Дослідити стаціонарні точки системи:

$$\dot{x} = x + y + 6 = P(x, y),$$

$$\dot{y} = y(x + y^2) = Q(x, y).$$

$$x_s + y_s + 6 = 0,$$

$$y_s(x_s + y_s^2) = 0,$$

$$x = -y - 6,$$

$$(y^2 - y - 6)y = 0,$$

$$y^2 - y - 6 = 0,$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2},$$

$$y_{s1} = 0,$$

$$x_{s1} = -6,$$

$$y_{s2} = 3,$$

$$x_{s2} = -9,$$

$$y_{s3} = -2,$$

$$x_{s3} = -4.$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = 1 \cdot \zeta + 1 \cdot \eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = y_s \cdot \zeta + (x_s + 3y_s^2)\eta.$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1;$$

$$b_1 = y_s, \quad b_2 = x_s + 3y_s^2.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \right]$$

1.

$$y_{S1} = 0,$$

$$x_{S1} = -6,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$b_1 = 0,$$

$$b_2 = -6,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(1 + (-6)) \pm \sqrt{(1 + (-6))^2} \right] = \frac{1}{2} (-5 \pm 7).$$

$$\lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = -6.$$

Корені дійсні та різних знаків – сідло.

2.

$$y_{S1} = 3,$$

$$x_{S1} = -9,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$b_1 = 3,$$

$$b_2 = 18,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[19 \pm \sqrt{17^2 + 4 \cdot 1 \cdot 3} \right] = \frac{1}{2} (19 \pm \sqrt{301}) = \frac{1}{2} (19 \pm 17.4).$$

$$\lambda_1 > 0,$$

$$\lambda_2 > 0.$$

Корені дійсні і позитивні - нестійкий вузол.

3.

$$y_{S1} = -2,$$

$$x_{S1} = -4,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 1,$$

$$b_1 = -2,$$

$$b_2 = 8,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[9 \pm \sqrt{7^2 + 4 \cdot 1 \cdot 2} \right] = \frac{1}{2} (9 \pm 6.4).$$

$$\lambda_1 > 0,$$

$$\lambda_2 > 0.$$

Корені дійсні і позитивні - нестійкий вузол.

№9. Дослідити стаціонарні точки системи:

$$\dot{x} = xy = P(x, y),$$

$$\dot{y} = y - 6 = Q(x, y).$$

$$y_s = 6,$$

$$x_s = 0.$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = 6 \cdot \zeta + 0 \cdot \eta,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_s \cdot \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_s \cdot \eta = 0 \cdot \zeta + x_s \cdot 1 \cdot \eta.$$

$$a_1 = 6,$$

$$a_2 = 0,$$

$$b_1 = 0,$$

$$b_2 = 1,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)} \right]$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[7 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0} \right] = \frac{1}{2} (7 \pm 5).$$

$$\lambda_1 = 6,$$

$$\lambda_2 = 1.$$

Обидва корені дійсні та позитивні (одного знаку). Особлива точка - нестійкий вузол.

Завдання 4.3

1.
$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \lambda x$$

$$0 = -x^3 + \lambda x;$$

$$x(\lambda - x^2) = 0;$$

$$x_1 = 0;$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda}.$$

$$u = X - x_s;$$

$$\frac{du}{dt} = -3x_s^2 \cdot U + \lambda U = U(\lambda - 3x_s^2);$$

$$u = u_0 \cdot \exp\{(\lambda - 3x_s^2) \cdot t\};$$

$$x_s = 0, \quad \text{стійке при } \lambda < 0;$$

$$\text{нестійке при } \lambda > 0;$$

$$x_s = \pm\sqrt{\lambda}, \quad \text{асимптотично } (t \rightarrow \infty) \text{ стійке.}$$

2.
$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu$$

$$0 = -x^2 + \mu;$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu};$$

$$\frac{du}{dt} = -2x_s \cdot u;$$

$$u = u_0 \cdot e^{-2x_s t};$$

$$x = +\sqrt{\mu}, \quad \text{стійкий розв'язок};$$

$$x = -\sqrt{\mu}, \quad \text{нестійкий розв'язок.}$$

Завдання 5.3

1. Рівняння Вольтерра при наявності сховища у жертви. Припустимо, що деяке число особи жертви x_r може знайти те або інше сховище або укриття, яке зробить їх недотягненими для хижака. При цьому рівняння Вольтерра без демпферування приймає вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= ax - cy(x - x_r) \\ \dot{y} &= ex - c'y(x - x_r) \end{aligned} \right\}$$

Тут слід розглядати два випадки. В одному випадку чисельність жертви, що знаходиться у сховищі, може складати деяку постійну частку її загальної чисельності: іншими словами, $x_r = kx$. Це рівноцінно заміні постійних c і c' в рівняннях на $c(1-k)$ і $c'(1-k)$. Цілком очевидно, що характер рівноваги при цьому не зміниться.

Більш цікаві висновки можна зробити в іншому випадку: якщо чисельність жертви, що знаходиться у сховищі, постійна, тобто $x_r = k$. При цьому крива $\dot{x} = 0$ на площині (x, y) задається рівнянням $y = ax/c(x-k)$, а крива $\dot{y} = 0$ – рівнянням $x = k + \frac{e}{c'}$. Ці криві наведені на рис.7.4, з якого видно, що наявність сховищ робить стабілізуючий вплив, оскільки при цьому консервативні коливання стають затухаючими.

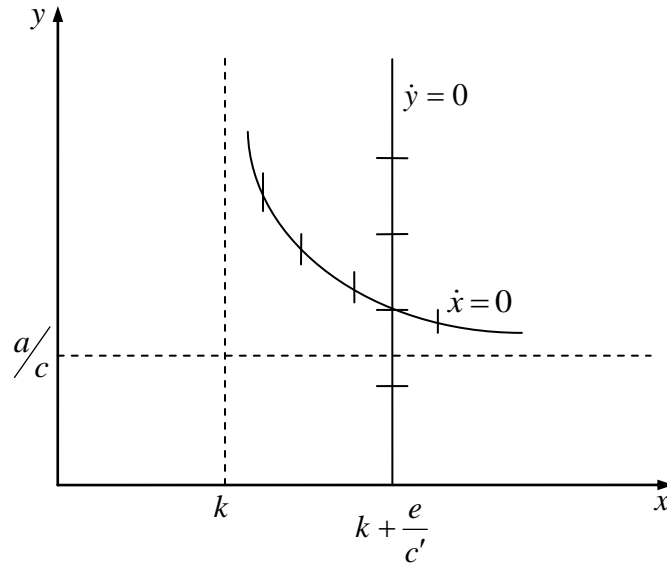


Рис. 7.4. Рівняння Вольтерра при наявності сховищ для жертви.

2. Рівняння міжвидової боротьби Вольтерра. Побудуємо фазові траєкторії для рівнянь Вольтерра, що описують боротьбу між двома видами тварин.

У цих рівняннях N_1 і N_2 – чисельність двох видів, які живуть на певній території. Ці види знаходяться в конкурентній боротьбі один з одним хоча б тому, що вони вживають один і той самий корм.

При відомих умовах величини N_1 і N_2 як функції часу задовольняють рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= k_1 N_1 - k_3 N_1 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= k_2 N_2 - k_4 N_1 N_2 \end{aligned} \right\}.$$

де k_1, k_2, k_3, k_4 — додатні дійсні параметри, $k_1 > k_2$.

Ліва частина рівняння представляє миттєву швидкість змінення чисельності. Перший член правої частини відповідає нормальному збільшенню чисельності, яке мало б місце при відсутності обмеження.

Другий член виражає зменшення чисельності, яке виникає в процесі конкурентної боротьби двох видів:

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{k_2 N_2 - k_4 N_1 N_2}{k_1 N_1 - k_3 N_1 N_2}.$$

Особливість цього рівняння розміщується в точках $N_{1S}=N_{2S}=0$

$$\text{і } N_{1S} = \frac{k_2}{k_4}; \quad N_{2S} = \frac{k_1}{k_3}.$$

Поблизу першої особливої точки $(0,0)$ N_1 і N_2 досить малі, і рівняння після лінеаризації прийме вигляд

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{k_2 N_2}{k_1 N_1}.$$

Тип кожної з особливостей, в тому випадку, коли вони прості, знаходяться за допомогою заміни змінних $x = x_s + u$; $y = y_s + v$, які призводять після лінеаризації до системи

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= a_1 u + a_2 v; \\ \frac{dv}{dt} &= b_1 u + b_2 v. \end{aligned}$$

Корені характеристичного рівняння визначаються рівністю

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - b_1 a_2)} \right\}.$$

У нашому випадку коефіцієнти виражаються так:

$$a_1 = k_1, \quad a_2 = 0,$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = k_2.$$

$$\text{Корені: } p_1 = k_1, \quad p_2 = k_2.$$

Паралельно ми допустили, що $k_2 > k_1 > 0$, то обидва корні дійсні і додатні, і особлива точка є нестійкий вузол.

Напрямок фазових траєкторій в випадку вузла або сідла при $(t \rightarrow \infty)$ знаходяться із співвідношення:

$$v = m_1 \cdot u = \frac{(\lambda_1 - a_1)u}{a_2} = \frac{b_1 u}{\lambda_2 - b_2}.$$

при $(t \rightarrow -\infty)$ із співвідношення

$$v = m_2 \cdot u = \frac{(\lambda_2 - a_1)u}{a_2} = \frac{b_1 u}{\lambda_2 - b_2}.$$

Нахил фазових траєкторій при $(t \rightarrow \infty)$ як

$$m_1 = (\lambda_1 - a_1)/a_2 = \frac{k_1 - k_2}{0} = \infty \text{ тоді як при } (t \rightarrow -\infty) \text{ } m_2 = b_1/(\lambda_2 - b_2) = \frac{0}{k_1 - k_2} = 0.$$

Звідси виходить, що $\frac{dN_2}{dN_1} = 0$ уздовж осі N_1 і $\frac{dN_2}{dN_1} = \infty$ уздовж осі N_2 .

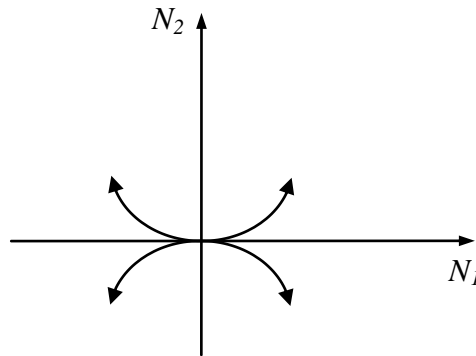


Рис. 7.5. Фазові траєкторії поблизу першої особливої точки

Поблизу другої особливої точки покладемо $N_1 = n_1 + \frac{k_2}{k_4}$ і $N_2 = n_2 + \frac{k_1}{k_3}$,

де n_1 і n_2 малі величини. Ця заміна відповідає переходу до нової системи координат з початком у другій особливій точці.

Лінеаризоване біля неї рівняння має вигляд

$$\frac{dn_2}{dn_1} = \frac{-(k_1 \cdot k_4 / k_3) \cdot n_1}{-(k_2 \cdot k_3 / k_4) \cdot n_2}$$

Це відповідає загальному виду рівняння з коефіцієнтами

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{k_2 \cdot k_3}{k_4},$$

$$b_1 = -\frac{k_1 \cdot k_4}{k_3}, \quad b_1 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $\lambda_1 = \sqrt{k_1 \cdot k_2}$; $\lambda_2 = -\sqrt{k_1 \cdot k_2}$.

Корені дійсні і різних знаків – особлива точка є сідлом.

Нахил фазових траєкторій при $(t \rightarrow \infty)$ рівний

$$m_1 = (\lambda_1 - a_1) / a_2 = -\frac{k_4}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

при $(t \rightarrow -\infty)$

$$m_1 = (\lambda_2 - a_1) / a_2 = \frac{k_4}{k_3} \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі $\frac{dn_2}{dn_1} = 0$ уздовж прямої $n_1 = 0$ або $N_1 = k_2 / k_4$, тоді як $\frac{dn_2}{dn_1} = \infty$

уздовж прямої $n_2 = 0$ або $N_2 = k_1 / k_3$.

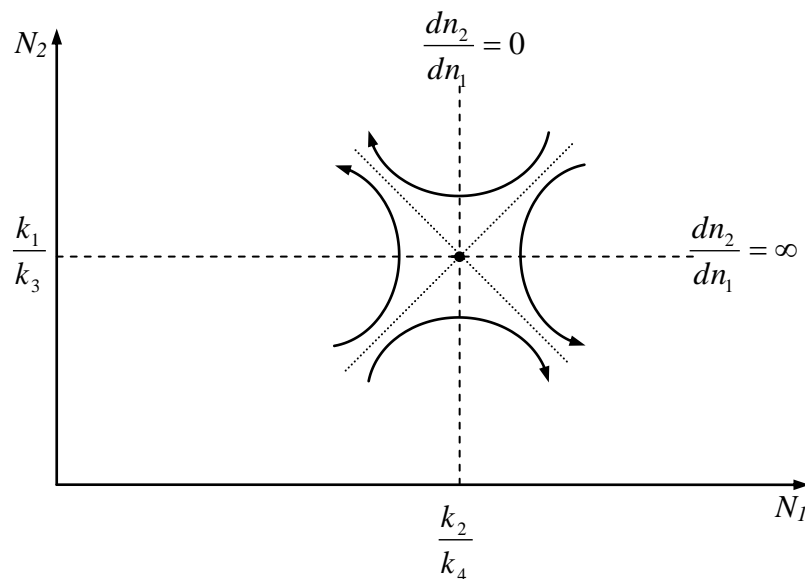


Рис. 7.6. Фазові траєкторії поблизу другої особливої точки

Фазовий портрет дає суттєве уявлення про ті розв'язки, до яких призводять рівняння міжвидової боротьби. Очевидно, що за будь-яких

умов чисельність одного з видів N_1 і N_2 врешті решт стає рівною нулю, тоді як чисельність іншого виду безмежно зростає.

Конкретні початкові умови визначають який саме вид збережеться. Зовсім не завжди вимирає вид, початкова чисельність якого менше.

Можна знайти сепаратрису, тобто першу відокремлюючу область початкових умов для яких вид N_1 вимирає, від області, де вимирає вид N_2 . Це єдина фазова траєкторія, що з'єднує особливі точки.

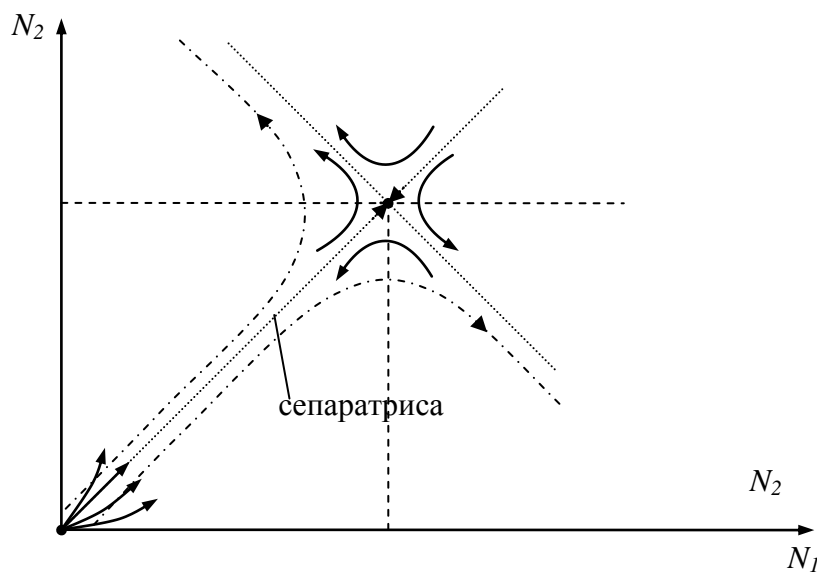


Рис. 7.7

Завдання 6.2

1.

$$\frac{dx}{dt} = (1 - \theta \cdot x)x - \frac{\beta \cdot x}{1 + x};$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi \left[1 - 2\theta \cdot x - \frac{\beta \cdot x}{(1 + x)^2} \right];$$

$$\xi = \xi_0 \exp \left\{ \left[1 - 2\theta \cdot x - \frac{\beta \cdot x}{(1 + x)^2} \right] \cdot t \right\}.$$

При $1 - 2\theta \cdot x - \frac{\beta}{(1+x)^2} < 0$ - режим стійкий;

$1 - 2\theta \cdot x - \frac{\beta}{(1+x)^2} > 0$ - режим нестійкий.

Якщо $x_s = 0$ (здоровий організм), незалежно від θ , режим визначається наступним чином:

- При $1 - \beta < 0$ або $\beta > 1$ - режим стійкий;
- При $1 - \beta > 0$ або $\beta < 1$ - режим нестійкий.

2.

Для $x_s \neq 0$ (свідчить про наявність пухлини) розглядаємо наступне рівняння

$$(1 + x_s)^2 \cdot (1 - 2\theta \cdot x) - \beta = 0;$$

$$(1 + 2x_s + x^2) \cdot (1 - 2\theta \cdot x) \leq \beta;$$

$$1 + 2x + x^2 - 2\theta \cdot x - 4\theta \cdot x^2 - 2\theta \cdot x^3 \leq \beta;$$

$$x[2(1 - \theta) + x(1 - 4\theta) - 2\theta \cdot x^2] \leq \beta - 1;$$

$$2\theta \cdot x \left[\frac{1 - \theta}{\theta} + x \frac{1 - 4\theta}{2\theta} - x^2 \right] \leq \beta - 1/$$

$$\beta = 1 + 2\theta \cdot x \left[\frac{1 - \theta}{\theta} + x \frac{1 - 4\theta}{2\theta} - x^2 \right] = f(x, \theta);$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0;$$

$$0 = \frac{1 - \theta}{\theta} + 2x \frac{1 - 4\theta}{2\theta} - 3x^2;$$

$$x^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - 4\theta}{2\theta} \cdot x - \frac{1 - \theta}{3\theta} = 0.$$

$\theta > 1$ $\beta < 1$ є пухлина,

$\theta < 1$ $x_s > x_{\max}$ стійкий;

$x_s < x_{\max}$.

$$x^2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1-4\theta}{\theta} \cdot x - \frac{1-\theta}{3\theta} = 0;$$

$$x = \frac{1}{6} \cdot \frac{1-4\theta}{\theta} \pm \sqrt{\left(\frac{1-4\theta}{6\theta}\right)^2 + \frac{1-\theta}{3\theta}} = \frac{1-4\theta}{6\theta} \pm \frac{\sqrt{1-8\theta+16\theta^2+12\theta-12\theta^2}}{6\theta};$$

$$x = \frac{1-4\theta \pm \sqrt{1+4\theta+4\theta^2}}{6\theta} = \frac{1-4\theta \pm 1+2\theta}{6\theta}.$$

$$x_{S_{\max 1}} = \frac{2-2\theta}{6\theta} = \frac{1-\theta}{3\theta} \text{ при } \theta < 1;$$

$$x_{S_{\max 2}} = \frac{-6\theta}{6\theta} = -1.$$

3.

$$\beta = 1 + 2\theta \cdot \frac{1-\theta}{3\theta} \left[\frac{1-\theta}{\theta} + \frac{1-\theta}{3\theta} \cdot \frac{1-4\theta}{2\theta} - \left(\frac{1-\theta}{3\theta}\right)^2 \right];$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{3}(1-\theta) \cdot \left[\frac{18\theta - 18\theta^2 + 3 - 3\theta - 12\theta + 12\theta^2 - 2 + 4\theta - 2\theta^2}{18\theta^2} \right];$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{3}(1-\theta) \cdot \left[\frac{-8\theta^2 + 7\theta + 1}{18\theta^2} \right] = 1 + \frac{-8\theta^2 + 7\theta + 1 + 8\theta^3 - 7\theta^2 - \theta}{27\theta^2};$$

$$\beta_c = \frac{8\theta^3 + 12\theta^2 + 6\theta + 1}{27\theta^2} = \frac{(2\theta+1)^3}{27\theta^2} = \left(\frac{2\theta+1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{\theta^2};$$

$$\beta_c = \frac{(1+\theta)^2}{4\theta}.$$

Література

1. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. “Введение в нелинейную физику”. – М.: “Мир”, 1990.
2. Эмануэль Н.М., Кнорре Д.Г. “Курс химической кинетики”. – М.: “Высшая школа”, 1989.
3. Марри Дж. “Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии”. – М.: “Мир”, 1983.
4. Лефшец С. “Геометрическая теория дифференциальных уравнений”. – М.: “Мир”, 1986.

Зміст

Вступ.....	3
1. Вступ у кінетику органічних реакцій.....	4
1.1. Основні кінетичні закони.....	4
1.2. Аналіз кінетичних результатів.....	9
1.2.1. Диференціальний метод.....	10
1.2.2. Інтегральний метод.....	12
1.3. Завдання.....	15
2. Топологічні методи і графічні розв'язки диференціальних рівнянь....	16
2.1. Інтегральні криві рівнянь другого порядку.....	16
2.2. Класифікація особливих точок.....	17
2.3. Метод ізоклін.....	19
2.4. Завдання.....	19
2.4.1. Знайти розв'язки рівнянь методом ізоклін.....	19
2.4.2. Знайти розв'язки рівнянь.....	20
2.4.3. Дослідити особливі точки системи рівнянь.....	21
3. Фазовий портрет.....	23
3.1. Маятник. Основні співвідношення.....	23
3.2. Фазовий портрет маятника.....	24
3.3. Солітонні розв'язки на сепаратрисі. Метод гіперболічних функцій.....	26
3.4. Завдання.....	31
4. Біфуркації.....	32
4.1. Біфуркація у простій диссипативній системі.....	32

4.2.	Біфуркація динамічних систем другого порядку.....	37
4.3.	Завдання.....	42
5.	Екологічні моделі.....	43
5.1.	Експотенціальний та логістичний ріст.....	43
5.2.	Рівняння Вольтерра. Система хижак-жертва.....	45
5.3.	Завдання.....	49
6.	Порогові явища.....	50
6.1.	Рівняння, що описують стан імунної системи.....	51
6.2.	Завдання.....	54
7.	Відповіді та розв'язки.....	55
	Завдання 1.3.....	55
	1. $2A \rightarrow P$	55
	2. $A+B \rightarrow P$	56
	3. Реакції n-го порядку.....	58
	Завдання 2.4.....	59
	2.4.1 Знайти розв'язки рівнянь методом ізоклін.....	59
	2.4.2 Знайти розв'язки рівнянь.....	60
	2.4.3 Дослідити особливі точки системи рівнянь.....	61
	№1, 7, 10.....	61
	№2.....	62
	№3.....	63
	№4.....	63
	№5.....	64
	№6.....	65
	№8.....	66

№9.....	68
Завдання 4.3.....	69
Завдання 5.3.....	70
1. Рівняння Вольтерра при наявності сховища у жертви.....	70
2. Рівняння міжвидової боротьби Вольтерра.....	71
Завдання 6.2.....	75
Література.....	78

Для нотаток

Для нотаток

Для нотаток