

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
"КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ"

Факультет ЕЛЕКТРОНІКИ  
Кафедра фізичної і біомедичної електроніки

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЇ ПО КУРСУ

# “МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ і ПРОЦЕСІВ”

для напрямів підготовки (спеціальностей):

**8.05080102. «фізична та біомедична електроніка»**

(шифри та назви напрямів, спеціальностей)

**РЕКОМЕНДОВАНО КАФЕДРОЮ**

**ФІЗИЧНОЇ І БІОМЕДИЧНОЇ ЕЛЕКТРОНІКИ**

(протокол №1 від 28.08.2012 )

Завідувач кафедри

Тимофєєв В.І

**Київ - 2012**

**Введение** Математика давно стала общепризнанным инструментом исследования явлений и процессов реального мира. Помимо традиционных областей использования математики в сфере ее приложений вовлекаются все новые и новые дисциплины. В литературе, посвященной экономике, социологии, военному делу, экологии и т. д., прочно заняло место выражение «математическая модель». Все больше появляется работ, в которых математики изучают явления и процессы, ранее никогда не входившие в сферу математических приложений. Стремление к математической формализации в особенности проявляется в тех областях знания, где прямой эксперимент, позволяющий собрать достаточно полную и объективную информацию об исследуемой реальности, практически невозможен. На первый взгляд такое положение может показаться парадоксальным. Действительно, о какой формализации может идти речь, если явление недостаточно изучено, если по своей сути оно уникально и неповторимо, если собрать представительную статистическую информацию о нем невозможно в принципе.

Бытует мнение, что теоретические построения могут возникать лишь на базе солидного экспериментального материала, со всех сторон освещающего предмет исследования. Однако история естествознания полна примеров, не подтверждающих подобную концепцию. Наиболее ярким из них, пожалуй, может служить общая теория относительности — одно из наиболее впечатляющих обобщений в истории науки. Как известно, эта теория возникла как обобщение факта тождества инертной и гравитационной масс. Экспериментальное подтверждение и оправдание теории пришло позднее, когда был проведен ряд специально запланированных экспериментов. Даже открытие закона всемирного тяготения, которое обычно связывают с громадным экспериментальным материалом, накопленным Тихо Браге и затем блестяще обработанным Кеплером, по существу, опиралось лишь на единственный факт, установленный Кеплером, — на так называемый третий закон, определяющий правило подобия орбит планет. Для установления этого закона, возможно, и не требовалось привлечения столь обширного экспериментального материала. Безусловно, высказанное утверждение нисколько не умаляет заслуг Тихо Браге и Кеплера перед наукой. Та громадная работа, которую они проделали, ни в коем случае не была бесполезной. Результаты, полученные ими, были чрезвычайно нужны для дальнейшей проверки созданной теории, они сыграли роль критерия практики, т. е. оправдали теорию.

Примеров подобного рода существует предостаточно, и они наталкивают на следующую мысль: побуждающим стимулом к созданию новой теории является обычно небольшое число фундаментальных фактов; увеличение числа экспериментальных данных, как правило, ничего принципиального не добавляет к нашим представлениям и не облегчает формулировку новой теоретической концепции; после того как концепция сформулирована и модель явления построена, этот «дополнительный» экспериментальный материал в лучшем случае может быть использован для проверки возникшей теории, в худшем случае окажется бесполезным.

Последнее утверждение вынуждает к следующему разъяснению. Без сомнения, эксперимент дает пищу для теоретических построений и служит той основой, на которой создается здание теории. Очевидно также, что для получения фундаментальных экспериментальных фактов необходима громадная поисковая работа, большая часть результатов которой в дальнейшем может оказаться ненужной. «Производственные» отходы в таком трудном деле, как познание нового, всегда велики, однако результаты, как известно, с лихвой окупают потери. Но речь не об этом. Здесь нам важен другой вывод — о том, что для построения моделей изучаемой реальности объем экспериментального материала, по-видимому, сам по себе не имеет принципиального значения. Более того, одного экспериментального материала, как бы хорош он ни был, недостаточно для построения доброкачественной теории, в желаемой степени адекватно отражающей реальность. Так же как теория опирается в своей основе на экспериментальные данные, так и эксперимент тогда несет в себе полезную информацию, когда он проводится в соответствии с определенной теоретической концепцией. Эксперимент как простая совокупность наблюдаемых фактов при неверной концепции может ввести исследователя в заблуждение, что неоднократно и случалось в истории наук. Именно прямое наблюдение за небесными светилами привело к тому, что человечество долгое время придерживалось концепции геоцентризма. Прямое наблюдение за движением тел привело Аристотеля к созданию механики, которая два тысячелетия владела умами людей, но в конечном счете оказалась неверной. Недоверие к прямому опыту как совокупности чувственно наблюдаемых фактов заставило Декарта в «Началах философии», где он излагает теорию удара, сделать следующее парадоксальное заявление: «Все эти доказательства настолько достоверны, что хотя бы опыт и показал обратное, однако мы вынуждены придавать нашему разуму больше веры, нежели нашим чувствам». Теория оказалась неверной, однако это не снижает остроту высказывания. Вспомним, что провозгласивший гелиоцентрическую систему, где планеты обращаются по кругам, в центре которых расположено Солнце, обвинялся современниками в том, что его теория не согласуется с экспериментальными данными. Однако Коперник был непоколебим, поскольку, как и Декарт, был убежден, что есть ситуации, в которых «...мы вынуждены придавать нашему разуму больше веры, нежели нашим чувствам». Теперь мы знаем, что расхождение с наблюдениями объяснялось эллиптичностью орбит планет — модель с круговыми орбитами была слишком груба.

Если проследить историю развития естественных наук, то можно заметить, что вся она — от Аристотеля до Эйнштейна и Бора — насыщена разрешением противоречий между прямым опытом как совокупностью наблюдаемых фактов и формально-логическими схемами, призванными объяснять эти факты. Весьма естественно стремление при этом из

множества формально-логических схем выбрать в конечном счете ту, которая наиболее просто и совершенно с позиций нашей человеческой природы интерпретирует эти факты. В связи с этим Эйнштейн пришел к дуалистической оценке «правильности» той или иной теории. По Эйнштейну, соответствие теории опыту есть необходимое условие, но отнюдь не достаточное. Ведь часто теорию, не согласующуюся с опытом, можно с помощью дополнительных гипотез «подправить» и привести в соответствие с опытом. В силу этого критерий соответствия теории наблюдаемым фактам Эйнштейн назвал критерием внешнего оправдания. Другой критерий, к которому, по существу, апеллировал Декарт, Эйнштейн назвал критерием внутреннего совершенства: «Во втором критерии речь идет не об отношении к опытному материалу, а о предпосылках самой теории, о том, что можно было бы кратко, хотя и не вполне ясно назвать «естественностью» или «логической простотой» предпосылок (основных понятий и основных соотношений между ними). Этот критерий, точная формулировка которого представляет большие трудности, всегда играл большую роль при выборе между теориями и при их оценке».

История развития естественных наук показывает, что с проблемой создания теорий, удовлетворяющих вышеперечисленным критериям, человечество справляется неплохо. Это придает исследователям определенный оптимизм и смелость и позволяет обратиться к решению новых нетрадиционных для естествознания проблем и вопросов. Нам кажется, что при этом вполне естественно и разумно использовать тот методологический опыт исследований, который уже накоплен классическим естествознанием.

Сталкиваясь с проблемой создания математических моделей в нетрадиционных для естествознания областях исследований, необходимо использовать тот опыт математического моделирования, который уже имеется в таких науках, как физика, механика, астрономия и др. В этом опыте есть нечто объективное, не зависящее от конкретно моделируемой ситуации.

Какая бы реальность ни моделировалась, качество модели должно оцениваться теми же критериями, которые Эйнштейн сформулировал для оценки физических теорий.

Какие же выводы напрашиваются, если придерживаться этих критериев? Первый вывод заключается в том, что исследователя не должно смущать нередкое отсутствие достаточно полного экспериментального материала. Более того, приходится признать, что зачастую в таких областях исследований, как экономика, социология, военное дело и т. д., невозможно осуществить прямой эксперимент, полностью отвечающий на поставленные вопросы. Если вдуматься, это часто оказывается невозможным и в физике. Из уже приведенного примера об открытии закона всемирного тяготения видно, что эксперимента по прямому измерению силы взаимного притяжения планет и Солнца не было. Экспериментальный материал Тихо Браге и

обобщения Кеплера касались кинематических характеристик орбит планет. Для того чтобы использовать этот экспериментальный материал для вывода закона тяготения, необходимо было изобрести математический анализ, на его основе создать первые модели механики (по существу, открыть законы динамики материальных тел), сформулировать гипотезу о силе тяготения как причине наблюдаемого движения планет, постулировать тождество инертной и гравитационной масс и лишь после этой громадной интеллектуальной работы, породившей определенную концепцию (ставшую в дальнейшем основой классической физики), использовать вышеупомянутый экспериментальный материал для получения закона тяготения в его конкретном выражении. Таким образом, часто не хватает «материала» интеллектуального, а не экспериментального.

Нужна концепция — определенное видение изучаемой реальности, которое и придает экспериментальным данным содержательный смысл, превращает экспериментальный материал информацию о реальности.

Это видение изучаемой реальности, конечно, не может возникнуть на голом месте. Оно формируется у исследователя в результате его личного практического опыта и в громадной мере — в результате воспитания и образования, полученного им в процессе обучения, т. е. на основе опыта и знаний, накопленных в практической деятельности за всю предшествующую историю науки. И речь здесь идет не о формальной сумме знаний (все знать невозможно и не нужно), а о тех методологических приемах и правилах (или принципах), которыми необходимо владеть в научно-исследовательской работе. Овладеть этими приемами и правилами можно, лишь непосредственно познакомившись с наиболее законченными и совершенными результатами научного творчества.

Наиболее разработанной является классическая механика, однако, область применения классической механики ограничена, так как в ее постулатах при внимательном анализе обнаруживается априорная идеализация, приводящая к «нефизичным» следствиям, да и круг ее понятий не столь широк, чтобы претендовать на универсальность. Поэтому были «исправлены» некоторые положения классической механики и как, в конечном счете эти уточнения привели к радикальному пересмотру представлений о пространстве и времени.

В то же время, несмотря ни на какие «кризисы» в физике эта наука развивается на удивление последовательно и гармонично. Если сравнить развитие физических идей с некоторым итерационным процессом, то можно смело сказать, что классическая механика оказалась на редкость удачным «начальным приближением». После того как миновал длительный догалилеев период умозрительных теорий, развитие естественных наук резко ускорилося. Был накоплен большой опыт успешного применения математических моделей для конструирования систем. Говоря о принципах математического моделирования управляемых систем, надо обращаться в первую очередь к опыту теории автоматического регулирования.

Известные результаты теории автоматического регулирования используются, чтобы показать, что такое математическая модель технической управляемой системы и как формировались принципы математического анализа и синтеза таких систем. Для этого сначала можно разобрать модель паровой машины, регулируемой простейшим центробежным регулятором Уатта. Этот пример наглядно показывает, что в любой созданной человеком целенаправленной системе согласованно протекают и взаимодействуют разнородные процессы. Поэтому математическая модель системы неизбежно представляет собой систему математических моделей процессов. Если пытаться использовать математику для анализа или конструирования систем, то первое, что надо сделать, — это построить математическую модель, адекватную системе. Если нет такой модели — никакие методы оптимизации и ЭВМ не помогут сконструировать новую или улучшить существующую систему. Принципы математического описания физических процессов существенно помогают строить модели сложных технических систем.

Анализируя задачу о регулировании хода паровой машины, мы замечаем, что математической модели системы еще недостаточно, чтобы математика могла помочь сконструировать систему. Всякая созданная человеком система есть плод его сознательной деятельности и поэтому целенаправленна. Допустим, что предлагают два варианта системы, предназначенной для определенной цели. Какой из них выбрать? Конечно, лучший! Но если мы хотим привлечь математику для решения этого вопроса, то надо математически строго определить, что значит «лучший». Другими словами, надо построить модель принятия решения: описать множество возможных вариантов данной системы, упорядочить их с точки зрения соответствия цели, перед ней поставленной, описать условия, в которых система будет работать. Сначала на примере регулятора Уатта мы вводим основные понятия математической теории принятия решения, очерчиваем возникающие проблемы. Особое внимание обращаем на то, что пока лишь опыт конструирования систем подсказывает хорошую модель принятия решения. Чем глубже мы изучаем свойства самой системы, тем содержательно точнее можем сформулировать модели принятия решения. Необходимо рассмотреть общую схему моделей принятия решения, чтобы в общем виде сформулировать проблему выбора рациональных вариантов системы. Затем следует рассмотреть несколько наиболее распространенных моделей принятия решения и как они помогают конструировать систему управления или проектировать облик сложной технической системы. При этом необходимо обратить внимание на то, что эти модели содержат в себе самое существенное из опыта автоматического регулирования и проектного дела.

Системы с участием людей действуют в тех областях, куда в последнее время многие ученые так решительно вторгаются с ЭВМ, чтобы обрабатывать информацию и помогать принимать рациональные решения..

Системой с участием людей называют такую систему, в которой человек является не

только управляющим субъектом, но и объектом управления. Чтобы управлять людьми, надо знать законы их коллективного поведения. А чтобы использовать математику для конструирования систем с участием людей, надо эти законы облечь в математическую форму. Тогда можно будет построить математическую модель системы. Пока такой модели нет, мало толку и от ЭВМ, потому что с ее помощью будет обрабатываться информация на основании представлений, которые зачастую являются не более чем традиционными заблуждениями. В этих новых областях перед разработчиками стоит главная проблема — научиться моделировать коллективное поведение людей и влияние его на процессы, в которых участвуют люди. Здесь следует применить опыт физико-математических наук. Производственный комплекс дает типичный пример таких систем. В нем человек является неустранимым звеном, но природа человека неизмеримо богаче и сложнее тех функций, которые он здесь исполняет. Поэтому, проектируя комплекс, надо учитывать условия жизни и отношения людей, ибо от этого зависит его будущая эффективность проектирования (ее называют оценкой эффективности инвестиционного проекта). Надо использовать методы проектирования облика сложных технических систем, чтобы получить исходную информацию о характеристиках затраты — эффективность, и методы математического моделирования экономики, чтобы получить информацию о внешних условиях реализации проекта и функционирования комплекса, которая необходима для использования характеристик затраты — эффективность при выборе рационального варианта решения.

Особенности экономики как объекта моделирования, основные понятия экономической теории и отражение их в математических моделях обсуждаются в *системном анализе развивающейся экономики*.

Математическое моделирование применяется также для изучения и планирования боевых действий. Боевые действия — это в первую очередь процессы перемещения и взаимного уничтожения противников. Все остальные процессы обеспечивают и направляют эти процессы. С методологической точки зрения из всех общественных процессов боевые действия — самый простой и физичный процесс. Поэтому для его описания с успехом можно применить такие методологические приемы и математическую технику, которые обычно применяются при построении моделей физической реальности. Математическое описание не делает его страшнее, чем он есть на самом деле, а ясность и понимание в такой важной сфере, как война, чрезвычайно важны. Как и всякая модель, модель боевых действий является идеализацией и дает только качественное описание явления. Однако на ней можно ясно продемонстрировать, насколько может оказаться плодотворным использование аналогий с известными и хорошо изученными моделями физических процессов. В то же время видны и принципиальные отличия от последних в силу того, что в процессе участвуют и организуют его люди.

# 1. ПРОСТЕЙШИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

## § 1. Элементарные математические модели

Рассмотрим некоторые подходы к построению простейших математических моделей, иллюстрирующие применение фундаментальных законов природы, вариационных принципов, аналогий, иерархических цепочек. Несмотря на простоту, привлекаемый материал даст возможность начать обсуждение таких понятий, как адекватность моделей, их «оснащение», нелинейность, численная реализация и ряда других принципиальных вопросов математического моделирования.

**1. Фундаментальные законы природы.** Наиболее распространенный метод построения моделей состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнанны, многократно подтверждены опытом, служат основой множества научно-технических достижений. Поэтому их обоснованность не вызывает сомнений, что, помимо всего прочего, обеспечивает исследователю мощную психологическую поддержку. На первый план выдвигаются вопросы, связанные с тем, какой закон (законы) следует применять в данном случае и как это делать.

а) Сохранение энергии. Этот закон известен почти двести лет и занимает, пожалуй, наиболее почетное место среди великих законов природы. Полагаясь на него, эксперт по баллистике, желающий быстро определить скорость револьверной пули и не имеющий поблизости специальной лаборатории, может воспользоваться относительно простым устройством типа маятника — груза, подвешенного на легком жестком и свободно вращающемся стержне (рис. 1). Пуля, застрявшая в грузе, сообщит системе «пуля—груз» свою кинетическую энергию, которая в момент наибольшего отклонения стержня от вертикали полностью перейдет в потенциальную энергию системы.

Эти трансформации описываются цепочкой равенств

$$\frac{mv^2}{2} = (M + m) \frac{V}{2} = (m + M) gl(1 - \cos \alpha)$$

Рис. 1

Здесь  $mv^2/2$  — кинетическая энергия пули массы  $m$ , имеющей скорость  $v$ ,  $M$  — масса груза,  $V$  — скорость системы «пуля—груз» сразу после столкновения,  $g$  — ускорение свободного падения,  $l$  — длина стержня,  $\alpha$  — угол наибольшего отклонения. Искомая скорость определяется формулой

$$v = \sqrt{\frac{2(M + m)gl(1 - \cos \alpha)}{m}} \quad (1)$$

которая будет вполне точной, если не учитываемые нами потери энергии на разогрев пули и груза, на преодоление сопротивления воздуха, разгон стержня и т. д. невелики. Это, на первый взгляд, разумное рассуждение на самом деле неверно. Процессы, происходящие при



«слипанию» пули и маятника, уже не являются чисто механическими. Поэтому примененный для вычисления величины  $V$  закон сохранения механической энергии несправедлив: сохраняется полная, а не механическая энергия системы. Он дает лишь нижнюю границу для оценки скорости пули (для правильного решения этой простой задачи надо воспользоваться также законом сохранения импульса).

Сходные рассуждения может применить и инженер для оценки времени  $t_k$  сверления слоя металла толщины  $L$  лазером с мощностью  $W$ , излучение которого перпендикулярно поверхности материала (рис. 2). Если энергия лазера полностью идет на испарение столбика

Рис. 2. Начальная, промежуточная и конечная стадии сверления металла лазером

металла массы  $LSp$  ( $S$  — облучаемая площадь,  $LS$  — объем столбика,  $\rho$  — плотность вещества), то закон сохранения энергии выражается равенством

$$E_0 = W \cdot t_k = hLS\rho, \quad (2)$$

где  $h$  — энергия, требуемая для испарения единицы массы. Величина  $h$  имеет составную структуру:  $h = (T_{пл} - T) h_1 + h_2 + h_3$ , поскольку материал необходимо последовательно нагреть до температуры плавления  $T_{пл}$ , а, затем расплавить и превратить в пар ( $T$  — исходная температура,  $h_1$  — удельная теплоемкость,  $h_2$  и  $h_3$  — соответственно удельная теплота плавления и парообразования).

Изменение глубины выемки  $l(t)$  со временем определяется из детального баланса энергии в промежутке времени от  $t$  до  $t + dt$ . На испаренную за это время массу

$$[l(t + dt) - l(t)]Sp = dl \cdot Sp$$

тратится энергия  $dl hSp$ , равная энергии  $W dt$ , сообщаемой веществу лазером:  $dl hSp = W dt$ ,

откуда получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dl}{dt} = \frac{W}{hSp}$$

Его интегрирование (с учетом того, что начальная глубина выемки равна нулю) дает

$$l(t) = \frac{W}{hSp} t = \frac{E(t)}{hSp} \quad (3)$$

где  $E(t)$  — вся энергия, выделенная лазером к моменту времени  $t$ .

Следовательно, глубина выемки пропорциональна затраченной энергии (причем величина  $t_k$ , когда  $l(t_k) = L$ , совпадает с вычисленной по формуле (2)).

В действительности процесс сверления гораздо сложнее рассмотренной схемы — энергия тратится на нагрев вещества, на удаление паров из выемки, которая может иметь неправильную форму, и т. д. Поэтому уверенность в правильности предложенного математического

описания значительно меньше, чем в случае с пулей. Вопрос о соответствии объекта и его модели — один из центральных в математическом моделировании, и в дальнейшем мы будем неоднократно к нему возвращаться.

б) Сохранение материи. Именно этим соображением руководствуется школьник, решающий задачу о заполнении бассейна водой, вытекающей и вытекающей из двух труб. Конечно же, область применения этого закона несравненно шире.

Пусть, например, имеется небольшое количество радиоактивного вещества (урана), окруженного толстым слоем «обычного» материала (свинца), — ситуация типичная либо при хранении делящихся материалов, либо при их использовании в энергетике (рис. 3). Под словом «небольшой» подразумевается упрощающее обстоятельство, а именно то, что все продукты распада, не испытывая столкновений с атомами вещества, беспрепятственно покидают область I. Другими словами, длина свободного пробега продуктов распада  $\lambda_1$  в первом веществе значительно больше характерных размеров самого материала  $L_1$ , т. е.  $\lambda_1 \gg L_1$ . Слова «толстый слой» означают, что в согласии с целями хранения продукты деления полностью поглощаются в области II. Это гарантируется при выполнении противоположного условия  $\lambda_{11} \ll L_{11}$ , где  $\lambda_{11}$  — длина пробега продуктов распада во втором веществе,  $L_{11}$  — его характерный размер.

Рис.3

Итак, все, что вылетает из области I, поглощается в области II, и суммарная масса обоих веществ со временем не меняется. Это и есть закон сохранения материи, примененный к данной ситуации. Если в начальный момент времени  $t = 0$  массы веществ были равны  $M_1(0)$  и  $M_{11}(0)$ , то в любой момент времени справедлив баланс

$$M_1(0) + M_{11}(0) = M_1(t) + M_{11}(t). \quad (4)$$

Одного уравнения (4), очевидно, недостаточно для определения текущих значений двух масс —  $M_1(t)$  и  $M_{11}(t)$ . Для замыкания математической формулировки необходимо привлечь дополнительное соображение о характере распада. Оно гласит, что скорость распада (число атомов, распадающихся в единицу времени) пропорционально общему числу атомов радиоактивного вещества. За небольшое время  $dt$  между моментами  $t$  и  $t + dt$  всего распадется

$$N_1(t + dt) - N_1(t) = -\alpha N_1(t + \xi dt), \quad \alpha > 0, \quad 0 < \xi < 1,$$

атомов. Здесь вторично использован закон сохранения вещества, но применительно не ко всему процессу, а к отрезку времени  $dt$ . В этом уравнении, описывающем баланс атомов, в правой части стоит знак минус (вещество убывает), а величина  $N_1(t + \xi dt)$  отвечает некоторому среднему значению числа атомов за рассматриваемое время.

Перепишем его в дифференциальной форме:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\alpha N_1(t)$$

Учитывая, что  $M_1(t) = \mu_1 N_1(t)$ , где  $\mu_1$  — атомный вес вещества I,

получаем

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = -\alpha M_1(t) \quad (5)$$

При самопроизвольной радиоактивности любой атом имеет некоторую не зависящую от состояния окружающего вещества вероятность распада. Поэтому чем больше (меньше) самого радиоактивного вещества, тем больше (меньше) выделяется продуктов распада в единицу времени. Коэффициент пропорциональности  $\alpha > 0$  (постоянная распада) определяется конкретным веществом.

Уравнения (4), (5) вместе с условиями  $\lambda_1 \gg L_1$ ,  $\lambda_{11} \ll L_{11}$ , а также величинами  $\alpha$ ,  $M_1(0)$ ,  $M_{11}(0)$  и составляют математическую модель рассматриваемого объекта.

Интегрируя (5), получаем, что масса делящегося материала убывает по экспоненциальному закону

$$M_1(t) = M_1(0)e^{-\alpha t}$$

и при  $t \rightarrow \infty$  в области I вещество полностью исчезает.

Так как суммарная масса в соответствии с (4) остается постоянной, то в области II количество вещества растёт:

$$M_{11}(t) = M_{11}(0) + M_1(0) - M_1(0)e^{-\alpha t} = M_{11}(0) + M_1(0)(1 - e^{-\alpha t}),$$

и при  $t \rightarrow \infty$  продукты распада полностью переходят из области I в область II.

в) Сохранение импульса. неподвижно стоящая в безветренную погоду на поверхности озера лодка начнет двигаться вперед, если сделать несколько шагов от ее носа к корме. Так проявляет себя закон сохранения импульса, утверждающий: полный импульс системы, не испытывающей действия внешних сил, сохраняется. На передвижение гребца лодка реагирует смещением в противоположную сторону.

Принцип реактивного движения положен в основу многих замечательных технических устройств, например, ракеты, выводящей на орбиту вокруг Земли искусственный спутник, для чего ей требуется развить скорость примерно 8 км/с. Простейшая математическая модель движения ракеты получается из закона сохранения импульса в пренебрежении сопротивлением воздуха, гравитацией и другими силами, исключая, конечно, тягу реактивных двигателей.

Пусть продукты сгорания ракетного топлива покидают расположенные в кормовой части выхлопные сопла со скоростью  $u$  (для современных топлив величина  $u$  равна 3-5 км/с). За малый промежуток времени  $dt$  между моментами  $t$  и  $t + dt$  часть топлива выгорела, и масса ракеты изменилась на величину  $dm$ . Изменился также импульс ракеты, однако суммарный импульс системы «ракета плюс продукты

сгорания» остался тем же, что и в момент  $t$ , т. е.

$$m(t)v(t) = m(t + dt)v(t + dt) - dm[v(t + \xi dt) - u],$$

где  $v(t)$  — скорость ракеты,  $v(t + \xi dt) - u$   $0 < \xi < 1$  — средняя за промежуток  $dt$  скорость истекающих из сопел газов (обе скорости берутся относительно Земли). Первый член в правой части этого равенства —

импульс ракеты в момент  $t + dt$ , второй — импульс, переданный истекающим газом за время  $dt$ .

Учитывая, что  $m(t + dt) = m(t) + (dm/dt) dt + O(dt^2)$ , закон сохранения импульса можно переписать в виде дифференциального уравнения

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} u$$

в котором член  $-(dm/dt) u$ , очевидно, не что иное, как сила тяги ракетных двигателей, и которое, будучи преобразованным к виду

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{d(\ln m)}{dt}$$

легко интегрируется:

$$v(t) = v_0 + u \ln(m_0/m(t))$$

где  $v_0, m_0$  — соответственно скорость и масса ракеты в момент  $t = 0$ . Если  $v_0 = 0$ , то максимальная скорость ракеты, достигаемая при полном сгорании топлива, равна

$$v(t) = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right) \quad (6)$$

Здесь  $m_p$  — полезная масса (масса спутника),  $m_s$  — структурная масса (масса собственно ракетной конструкции — топливных баков, двигателей, систем управления и т. д.).

Простая формула Циолковского (6) позволяет сделать фундаментальный вывод о конструкции ракеты для космических полетов. Введем величину  $\lambda = m_s/(m_0 - m_p)$ , которая характеризует при  $m_p = 0$  отношение структурной и начальной масс ракеты. Тогда для практически реальных значений  $\lambda = 0,1$ ;  $u = 3$  км/с получаем при  $m_p = 0$   
 $v = u \ln(1/\lambda) = 7$  км/с.

Отсюда следует, что даже в самой идеальной ситуации (полезная масса равна нулю, отсутствуют гравитация и сопротивление воздуха и т. д.) ракета рассматриваемого типа не способна достичь первой космической скорости.

Тем самым необходимо использовать многоступенчатые ракеты — вывод, к которому пришли основоположники космонавтики.

Данный пример иллюстрирует также своего рода принцип «наибольшего благоприятствия», часто используемый на начальной стадии математического моделирования сложных объектов: если объект, поставленный в наилучшие условия, не в состоянии достичь требуемых характеристик, то надо изменить сам подход к объекту либо смягчить требования к нему; если же требования в принципе достижимы, то следующие шаги связаны с исследованием влияния на объект дополнительных осложняющих факторов.

**2. Вариационные принципы.** Еще один подход к построению моделей, по своей широте и универсальности сопоставимый с возможностями, даваемыми фундаментальными законами, состоит в применении так называемых вариационных принципов. Они представляют собой весьма общие утверждения о рассматриваемом объекте

(системе, явлении) и гласят, что из всех возможных вариантов его поведения (движения, эволюции) выбираются лишь те, которые удовлетворяют определенному условию. Обычно согласно этому условию некоторая связанная с объектом величина достигает экстремального значения при его переходе из одного состояния в другое.

Допустим, автомобиль, движущийся с постоянной скоростью  $v$ , должен попасть из точки  $A$  в точку  $B$  и при этом коснуться некоторой прямой линии  $C$  (рис. 4). Водитель автомобиля очень торопится и выбирает из множества траекторий путь, требующий минимальных затрат времени.

Рис. 4. Различные траектории движения из точки  $A$  в точку  $B$  с касанием прямой  $C$ . Жирной линией выделен быстрееший путь

Представим затраченное время как функцию величины  $\alpha$  — угла между прямой и отрезком пути от точки  $A$  до прямой:

$$t(\alpha) = \frac{a}{v \sin \alpha} + \frac{b}{v \sin \beta(\alpha)}$$

Здесь  $a$  и  $b$  — длины перпендикуляров, опущенных из точек  $A$  и  $B$  на прямую,  $\beta(\alpha)$  — угол между прямой и отрезком пути из точки касания до точки  $B$ .

Условие экстремальности  $t(\alpha)$  по аргументу  $\alpha$  означает, что

$$\left. \frac{dt(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{\text{ext}}} = 0,$$

Или

$$\frac{a \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{b \cos \beta(\alpha)}{\sin^2 \beta(\alpha)} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \quad (7)$$

Для любых значений  $\alpha$  справедливо равенство

$$c = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{b}{\operatorname{tg} \beta(\alpha)},$$

где  $c$  — расстояние между проекциями точек  $A$  и  $B$  на прямую (одинаковое для всех траекторий). Дифференцируя его, получаем соотношение

$$\frac{a}{\sin^2 \alpha} + \frac{b}{\sin^2 \beta(\alpha)} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad (8)$$

которое вместе с условием минимальности (7) означает

$$\cos \alpha = \cos \beta(\alpha),$$

т. е. равенство углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Далее нетрудно найти сами значения  $\alpha_{\min}$ ,  $t_{\min}$  через заданные величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Однако сейчас для нас важно другое — условие минимальных затрат времени привело к выбору соответствующей траектории по правилу «угол падения равен углу отражения». Но ведь такому закону подчиняется и ход светового луча, попадающего на отражающую поверхность! Может быть, и в общем случае лучи света движутся по траекториям, обеспечивающим быстреешее попадание сигнала из одной точки в другую? Да, именно так и происходит согласно известному вариационному принципу Ферма, опираясь на который, можно получить все основные законы геометрической оптики.

Покажем это, рассмотрев преломление лучей на границе двух сред (рис. 5). Свет, выходящий из точки А, движется в первой среде со скоростью  $v_a$ , преломляется и, переходя через линию раздела, двигается

Рис. 5. Возможные траектории световых лучей, идущих из точки А в точку В и преломляющихся на линии С — границе раздела двух сред. Жирной линией выделена траектория, отвечающая закону преломления  $\text{COS}\alpha / \text{COS}\beta = V_a/V_b$

во второй среде со скоростью  $v_b$  и попадает в точку В. Если  $\alpha$  — угол падения луча, а  $\beta(\alpha)$  — угол его преломления, то время прохождения из А в В равно

$$t(\alpha) = \frac{a}{v_a \sin \alpha} + \frac{b}{v_b \sin \beta(\alpha)}$$

Условие минимальности  $t(\alpha)$  записывается в виде (ср. с (7))

$$\frac{a \cos \alpha}{v_a \sin \alpha} + \frac{b \cos \alpha}{v_b \sin \beta(\alpha)} \cdot \frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

а продифференцированное по  $\alpha$  условие постоянства величины с по-прежнему выражается формулой (8). Здесь величины  $a, b, c$  имеют тот же смысл, что и в предыдущем случае. Исключая из последней формулы производную  $d\beta/d\alpha$ , приходим к равенству

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{v_a}{v_b} \quad (9)$$

т. е. к известному закону преломления света.

Сформулированные применительно к какому-либо классу явлений вариационные принципы позволяют единообразно строить соответствующие математические модели. Их универсальность выражается также в том, что, используя их, можно в определенной степени отвлекаться от конкретной природы процесса. Так, водитель автомобиля, следующий принципу «минимального времени» и желающий попасть из точки А, находящейся на песчаной почве (одна скорость), в точку В, расположенную на травянистом лугу (другая скорость), обязан поехать не по прямой, соединяющей А и В, а по ломанной траектории, сделав необходимое «преломление» на линии, разделяющей песок и траву.

### 3. Применение аналогий при построении моделей.

В огромном числе случаев при попытке построить модель какого-либо объекта либо невозможно прямо указать фундаментальные законы или вариационные принципы, которым он подчиняется, либо, с точки зрения наших сегодняшних знаний, вообще нет уверенности в существовании подобных законов, допускающих математическую формулировку.

Одним из плодотворных подходов к такого рода объектам является использование аналогий с уже изученными явлениями. Что, казалось бы, общего между радиоактивным распадом и динамикой популяций,

в частности изменением численности населения нашей планеты? Однако на простейшем уровне такая аналогия вполне просматривается, о чем свидетельствует одна из простейших моделей популяций, называемая моделью Мальтуса. В ее основу положено простое утверждение — скорость изменения населения со временем  $t$  пропорциональна его текущей численности  $N(t)$ , умноженной на сумму коэффициентов рождаемости  $\alpha(t) \geq 0$  и смертности  $\beta(t) \leq 0$ . В результате приходим к уравнению

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t) \quad (10)$$

весьма похожему на уравнение радиоактивного распада и совпадающего с ним при  $\alpha < \beta$  (если  $\alpha$  и  $\beta$  постоянные). Это неудивительно, так как при их выводе использовались одинаковые соображения.

Интегрирование уравнения (10) дает

$$N(t) = N_0 \exp\left(\int_{t_0}^t [\alpha(t) - \beta(t)] dt\right),$$

где  $N(0) = N(t = t_0)$  — начальная численность.

На рис. 6 приведены графики функции  $N(t)$  при постоянных  $\alpha$  и  $\beta$  (разным подобным друг другу кривым соответствуют разные  $t_0$  — значения времени начала процесса). При  $\alpha = \beta$  численность остается постоянной, т. е. в этом случае решением уравнения является равновесная величина  $N(t) = N(0)$ . Равновесие между рождаемостью и

Рис. 6. Изменение численности популяции со временем в модели Мальтуса

смертностью неустойчиво в том смысле, что даже небольшое нарушение равенства  $\alpha = \beta$  приводит с течением времени ко все большему отклонению функции  $N(t)$  от равновесного значения  $N(0)$ . При  $\alpha < \beta$  численность населения убывает и стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , а при  $\alpha > \beta$  растет по некоторому экспоненциальному закону, обращаясь в бесконечность при  $t \rightarrow \infty$ . Последнее обстоятельство и послужило основанием для опасений Мальтуса о грядущем перенаселении Земли со всеми вытекающими отсюда последствиями.

Как в данном примере, так и в ряде рассмотренных выше случаев можно указать немало очевидных ограничений применимости построенной модели. Конечно же, самый сложный процесс изменения численности населения, зависящий к тому же от сознательного вмешательства самих людей, не может описываться какими-либо простыми закономерностями. Даже в идеальном случае изолированной биологической популяции предложенная модель не отвечает реальности в полной мере хотя бы из-за ограниченности ресурсов, необходимых для ее существования.

Сделанное замечание тем не менее нисколько не умаляет роли аналогий в построении математических моделей очень сложных явлений.

Применение аналогий основано на одном из важнейших свойств моделей — их универсальности, т. е. их приложимости к объектам принципиально различной природы. Так, предположения типа «скорость изменения величины пропорциональна значению самой величины (или некоторой функции от нее)» широко используются в далеких друг от друга областях знаний.

**4. Иерархический подход к получению моделей.** Лишь в редких случаях бывает удобным и оправданным построение математических моделей даже относительно простых объектов сразу во всей полноте, с учетом всех факторов, существенных для его поведения. Поэтому естествен подход, реализующий принцип «от простого — к сложному», когда следующий шаг делается после достаточно подробного изучения не очень сложной модели. При этом возникает цепочка (иерархия) все более полных моделей, каждая из которых обобщает предыдущие, включая их в качестве частного случая.

Построим такую иерархическую цепочку на примере модели многоступенчатой ракеты. Как было установлено в конце п. 1, реальная одноступенчатая ракета неспособна развить первую космическую скорость. Причина этого — затраты горючего на разгон ненужной, отработавшей части структурной массы. Следовательно, при движении ракеты необходимо периодически избавляться от балласта. В практической конструкции это означает, что ракета состоит из нескольких ступеней, отбрасываемых по мере их использования.

Пусть  $m_i$  — общая масса  $i$ -й ступени,  $\lambda m_i$  — соответствующая структурная масса (при этом масса топлива равна величине  $(1 - \lambda) m_i$ ),  $m_p$  — масса полезной нагрузки. Величины  $\lambda$  и скорость истечения газов  $u$  одинаковы для всех ступеней. Возьмем для определенности число ступеней  $n = 3$ . Начальная масса такой ракеты равна

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3.$$

Рассмотрим момент, когда израсходовано все топливо первой ступени и масса ракеты равна величине

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3.$$

Тогда по формуле (6) первоначальной модели скорость ракеты равна

$$v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3 + \lambda m_1}\right).$$

После достижения скорости  $v_1$  структурная масса  $\lambda m_1$  отбрасывается и включается вторая ступень. Масса ракеты в этот момент равна  $m_p + m_2 + m_3$ .

Начиная с этого момента и до момента полного выгорания топлива второй ступени, ничто не мешает пользоваться уже построенной моделью, применив ее к рассматриваемому случаю. Все рассуждения о сохранении суммарного импульса и соответствующие выкладки остаются в силе (следует только учесть, что у ракеты уже есть начальная



стр. 10 из 13

скорость  $v_1$ ). Тогда по формуле (6) после выгорания топлива во второй ступени ракета достигает скорости

$$v_2 = v_1 + u \ln \left( \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right).$$

Такие же рассуждения применимы и к третьей ступени ракеты. После отключения ее двигателей скорость ракеты равна

$$v_3 = v_2 + u \ln \left( \frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right).$$

Эту цепочку нетрудно продолжить для любого числа ступеней и получить соответствующие формулы. В случае же  $n = 3$  для окончательной скорости имеем

$$\frac{v_3}{u} = \ln \left\{ \left( \frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3} \right) \left( \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3} \right) \left( \frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3} \right) \right\},$$

или, вводя величины

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}; \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}; \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p};$$

Получаем

$$\frac{v_3}{u} = \ln \left\{ \left( \frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)} \right) \left( \frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)} \right) \left( \frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)} \right) \right\}.$$

Данное выражение симметрично по отношению к величинам  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , и нетрудно показать, что его максимум достигается в симметричном случае, т. е. при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ . При этом для  $i = 3$

$$\alpha = \frac{1 - \lambda}{P - \lambda}, \dots P = \exp \left( - \frac{v_3}{3u} \right).$$

Произведение  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = \alpha^3$  равно, как легко проверить, отношению

$$\frac{m_0}{m_p}, \text{ или } \alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = \left( \frac{1 - \lambda}{P - \lambda} \right)^3.$$

Для многоступенчатой ракеты, аналогично, имеем

$$\frac{m_0}{m_p} = \left( \frac{1 - \lambda}{P - \lambda} \right)^n, \dots P = \exp \left( - \frac{v_n}{nu} \right), \quad (11)$$

где  $n$  — число ступеней.

Проанализируем формулу (11). Примем  $v_n = 10,5$  км/с,  $\lambda = 0,1$ .

Тогда для  $n = 2, 3, 4$  получаем  $m_0 = 149 m_p$ ,  $m_0 = 77 m_p$ ,  $m_0 = 65 m_p$

соответственно. Это значит, что двухступенчатая ракета пригодна для выведения на орбиту некоторой полезной массы (однако при одной тонне полезного груза необходимо иметь ракету весом 149 тонн).

Переход к третьей ступени уменьшает массу ракеты почти в два раза (но, конечно же, усложняет ее конструкцию), а четырехступенчатая ракета не дает заметного выигрыша по сравнению с трехступенчатой

Построение иерархической цепочки позволило относительно

просто прийти к этим важным выводам. Иерархия математических

моделей часто строится и по противоположному принципу «от сложного к простому». В этом случае реализуется путь «сверху вниз» — из достаточно общей и сложной модели, при соответствующих упрощающих предположениях, получается последовательность все более простых (но имеющих уменьшающуюся область применимости) моделей.

**5. О нелинейности математических моделей.** Простота рассмотренных выше моделей во многом связана с их линейностью. В математическом плане это важное понятие означает, что справедлив принцип суперпозиции, т. е. любая линейная комбинация решений (например, их сумма) также является решением задачи. Пользуясь принципом суперпозиции, нетрудно, найдя решение в каком-либо частном случае, построить решение в более общей ситуации. Поэтому о качественных свойствах общего случая можно судить по свойствам частного — различие между двумя решениями носит лишь количественный характер. Например, увеличение в два раза скорости истечения ракетного топлива ведет также к двукратному увеличению скорости ракеты, уменьшение угла падения светового луча на отражающую поверхность означает такое же изменение угла отражения и т. д. Другими словами, в случае линейных моделей отклик объекта на изменение каких-то условий пропорционален величине этого изменения.

Для нелинейных явлений, математические модели которых не подчиняются принципу суперпозиции, знание о поведении части объекта еще не гарантирует знания поведения всего объекта, а его отклик на изменение условий может качественно зависеть от величины этого изменения. Так, уменьшение угла падения луча света на границу раздела двух сред приводит к уменьшению угла преломления, но только до определенного предела. Если угол падения становится меньше критического (см. формулу (9)), то происходит качественное изменение — свет перестает проникать через границу раздела во вторую среду, если она менее плотная, чем первая. Тем самым преломление света — пример нелинейного процесса.

Большинство реальных процессов и соответствующих им математических моделей нелинейны. Линейные же модели отвечают весьма частным случаям и, как правило, служат лишь первым приближением к реальности. Например, популяционные модели сразу становятся нелинейными, если принять во внимание ограниченность доступных популяции ресурсов. При их выводе считается, что:

- 1) существует «равновесная» численность популяции  $N_p$ , которую может обеспечить окружающая среда;
- 2) скорость изменения численности популяции пропорциональна самой численности, умноженной (в отличие от модели Мальтуса) на величину ее отклонения от равновесного значения, т. е.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \left( 1 - \frac{N}{N_p} \right) N, \dots \alpha > 0. \quad (12)$$

Член  $(1 - N/N_p)$  в этом уравнении обеспечивает механизм «насыщения» численности — при  $N < N_p$  ( $N > N_p$ ) скорость роста

положительна (отрицательна) и стремится к нулю, если  $N \rightarrow N_p$ .

Рис. 7. Логистические кривые, соответствующие различным значениям начальной численности  $N(0)$

Представляя уравнение (12) в виде

$$\frac{dN}{N_p - N} + \frac{dN}{N} = \alpha dt$$

и интегрируя его, получаем

$$-\ln(N_p - N) + \ln N = \alpha t + C.$$

Постоянная интегрирования определяется из условия  $N(t = 0) = N(0)$ ,

$$\text{т. е. } C = \ln\left(\frac{N(0)}{N_p - N(0)}\right).$$

В результате находим

$$N = N_p \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t} - N \frac{N(0)}{N_p - N(0)} e^{\alpha t}$$

или, в окончательном виде,

$$N(t) = \frac{N_p N(0) e^{\alpha t}}{N_p - N(0)(1 - e^{\alpha t})}$$

Поведение функции  $N(t)$  описывается так называемой логистической кривой (рис. 7). При любом  $N(0)$  численность стремится к равновесному значению  $N_p$ , причем тем медленней, чем величина  $N(t)$  ближе к  $N(0)$ . Тем самым равновесие, в отличие от случая модели (10), устойчиво.

Логистическая модель более реалистично отражает динамику популяции в сравнении с моделью Мальтуса, но сама она с необходимостью становится нелинейной и поэтому более сложной. Заметим, что предположения о механизмах насыщения используются при построении многих моделей в различных областях знаний.

**6. Предварительные выводы.** Процесс построения моделей может быть условно разбит на следующие этапы.

1. Конструирование модели начинается со словесно-смыслового описания объекта или явления. Помимо сведений общего характера о природе объекта и цепях его исследования эта стадия может содержать также некоторые предположения (невесомый стержень, толстый слой вещества, прямолинейное распространение световых лучей и т. д.).

Данный этап можно назвать формулировкой предмодели.

2. Следующий этап — завершение идеализации объекта.

Отбрасываются все факторы и эффекты, которые представляются не самыми существенными для его поведения. Например, при составлении баланса материи (п. 1б)) не учитывался, ввиду его малости, дефект масс, которым сопровождается радиоактивный распад. По возможности идеализирующие предположения записываются в математической форме

(подобно условию  $\lambda_1 \gg L_1$  в п. 1б)), с тем чтобы их справедливость под давал ась количественному контролю.

3. После выполнения первых двух этапов можно переходить к выбору или формулировке закона (вариационного принципа, аналогии и т. п.), которому подчиняется объект, и его записи в математической форме. При необходимости используются дополнительные сведения об объекте, также записываемые математически (например, постоянство величины  $s$  для всех траекторий лучей света, вытекающее из геометрии задачи; п. 2). Следует иметь в виду, что даже для простых объектов выбор соответствующего закона отнюдь не тривиальная задача.

4. Завершает формулировку модели ее «оснащение». Например, необходимо задать сведения о начальном состоянии объекта (скорость ракеты и ее массу в момент  $t = 0$ ) или иные его характеристики (величины  $l, g$  в п. 1а);  $\alpha, \lambda_1, \lambda_{11}$  в п. 1б);  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  в п. 3), без знания которых невозможно определить поведение объекта. И, наконец, формулируется цель исследования модели (найти закон преломления света, достичь понимания закономерностей изменения популяции, определить требования к конструкции ракеты, запускающей спутник, и т. д.).

5. Построенная модель изучается всеми доступными исследователю методами, в том числе со взаимной проверкой различных подходов

В отличие от рассматриваемых в § 1 простейших случаев, большинство моделей не поддаются чисто теоретическому анализу, и поэтому необходимо широко использовать вычислительные методы. Это обстоятельство особенно важно при изучении нелинейных объектов, так как их качественное поведение заранее, как правило, неизвестно.

6. В результате исследования модели не только достигается поставленная цель, но и должна быть установлена всеми возможными способами (сравнением с практикой, сопоставлением с другими подходами) ее адекватность — соответствие объекту и сформулированным предположениям. Неадекватная модель может дать результат, сколь угодно отличающийся от истинного (ср. формулу (1)), и должна быть либо отброшена, либо соответствующим образом модифицирована.

## § 2. Примеры моделей, получаемых из фундаментальных законов природы

По сравнению с п. 1 из § 1 более подробно и для более сложных объектов рассмотрим модели, следующие из законов Архимеда, Ньютона, Кулона и других хорошо известных законов. Обсудим некоторые свойства рассматриваемых объектов.

**1. Траектория всплытия подводной лодки.** Пусть подводная лодка, находящаяся в момент времени  $t = 0$  на глубине  $H$  от поверхности моря и движущаяся с постоянной горизонтальной скоростью  $v$  (рис. 8), получает приказ подняться на поверхность. Если промежуток времени, за который цистерны подлодки освобождаются от воды и заполняются воздухом, с тем чтобы ее средняя плотность  $\rho_1$  стала меньше плотности воды  $\rho_0$  невелик, то можно считать, что в момент  $t = 0$  на подлодку начинает действовать выталкивающая сила, большая, чем вес лодки. По закону Архимеда выталкивающая сила равна  $F = gV \rho_0$ , где  $g$  — ускорение свободного падения,  $V$  — объем подлодки. Суммарная сила, действующая на подлодку в вертикальном направлении, — разность между  $F$  и весом тела  $P = gV \rho_1$ , а сообщаемое ей ускорение по второму закону Ньютона равно

$$\rho_1 V \frac{d^2 h}{dt^2} = F - P = gV(\rho_0 - \rho_1).$$

Рис. 8

Координата  $l$ , характеризующая горизонтальное положение подлодки, изменяется по закону движения тела с постоянной скоростью:

$$\frac{dl}{dt} = v$$

Решая эти уравнения, находим, что

$$h(t) = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} t^2, \dots, l(t) = vt \quad (1)$$

и что лодка всплывет на поверхность в момент  $t = t_k$ , когда

$$h(t_k) = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} t_k^2 = H, \dots, t_k = \left( \frac{\rho_1 H}{g(\rho_0 - \rho_1)} \right)^{1/2}.$$

При этом в горизонтальном направлении подлодка пройдет расстояние

$$L = vt_k = v \left( \frac{\rho_1 H}{g(\rho_0 - \rho_1)} \right)^{1/2}$$

Исключая из (1) время, найдем траекторию движения подлодки в координатах  $(l, h)$

$$h = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1 v^2} l^2,$$

которая оказывается параболой с вершиной в точке  $l = 0, h = 0$  (при выводе (1) вертикальная скорость лодки, а также величины  $l$  и  $h$

принимались равными нулю в момент  $t = 0$ ). Считалось также, что никакие другие вертикальные силы, кроме  $F$  и  $P$ , на подлодку не действуют. Это предположение верно лишь при малых скоростях всплытия, когда можно пренебречь сопротивлением воды движению лодки.

Итак, непосредственное применение закона Архимеда, определяющего величину выталкивающей силы, и закона Ньютона, связывающего силу, действующую на тело, и его ускорение, позволило легко найти траекторию подлодки. Очевидно, что параболической траекторией обладает любое движущееся в плоскости тело, имеющее по одному из направлений постоянную скорость и на которое в другом направлении действует постоянная сила (уравнения (1) фактически дают параметрическую запись параболы). К таким движениям относятся, например, полет камня, брошенного с высоты  $H$  с горизонтальной скоростью  $v$  или полет электрона в электрическом поле плоского конденсатора.

Однако в последнем случае получить траекторию тела непосредственно из фундаментальных законов нельзя, требуется применить более детальную процедуру. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

## **2. Отклонение заряженной частицы в электронно-лучевой трубке.**

Будем считать, что обкладки конденсатора электроннолучевой трубки (рис. 9) представляют собой бесконечные плоскости (предположение

Рис. 9

справедливо в случае, если расстояние между обкладками много меньше их размеров, а электрон движется на большом удалении от их краев). Очевидно, что электрон будет притягиваться к нижней обкладке и отталкиваться от верхней. Сила притяжения  $F$  двух разноименных зарядов элементарно определяется из закона Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — величины зарядов,  $r$  — расстояние между ними.

Сложность заключается в том, что в данном примере на обкладке находится бесконечно много зарядов, каждый из которых расположен на своем расстоянии от движущегося электрона. Поэтому необходимо сначала найти силу, индуцируемую каждым зарядом, и затем, просуммировав все элементарные силы, определить результирующее действие обкладок на электрон.

Разобьем всю плоскость нижней обкладки на элементарные «полоски», характеризующиеся координатами  $r_1, r_2, r_3$ ;  $-\infty < r_1, r_3 < \infty$ ;  $r_2 = 0$  (см. рис. 9).

Подсчитаем силу притяжения электрона зарядом, находящемся на элементарной площадке  $ds = dr_1 dr_3$  и равным  $dq = q_0 ds$ , где  $q_0$  — поверхностная плотность заряда на обкладке. Если частица находится на расстоянии  $r_2$  от заряженной плоскости, то

$$dr_1 = r_2(\operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) - \operatorname{tg}\alpha) = r_2 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

(здесь учитывается малость величины  $d\alpha$ ). Для определения величины  $dr_3$  имеем

$$\frac{r_3 + dr_3}{r_1 + dr_1} = \frac{\operatorname{tg}(\beta + d\beta)}{\sin(\alpha + d\alpha)}, \dots \dots \dots \frac{r_3}{r_2} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Из последних двух формул находим

$$dr_3 = (r_1 + dr_1)\operatorname{tg}(\beta + d\beta) - r_1\operatorname{tg}\beta = \frac{r_1 d\beta / (\cos^2 \beta) + dr_1 \operatorname{tg}\beta}{\sin \alpha},$$

где, аналогично предыдущему, учтена также и малость величины  $d\beta$ .

Умножая  $dr_1$  на  $dr_3$  и отбрасывая член более высокого порядка малости,

$$\text{получаем } ds = \frac{r_2 r_1 d\alpha \cdot d\beta}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \cdot \sin \alpha}.$$

Сила притяжения электрона с зарядом  $q_e$  к элементарной площадке  $ds$  равна

$$dF = \frac{q_e q_0 r_1 r_2 d\alpha \cdot d\beta}{r^2 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \cdot \sin \alpha},$$

где  $\bar{r}$  — «среднее» расстояние от электрона до площадки, которое с учетом

$$\text{малости величин } d\alpha, d\beta \text{ вычисляется по формуле } \bar{r} = \frac{r_2}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$$

В итоге для элементарной силы имеем

$$dF = q_e q_0 \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{d\alpha \cdot d\beta}{\sin \alpha} = \frac{q_e q_0}{\cos \alpha} d\alpha \cdot d\beta,$$

а для ее вертикальной составляющей

$$dF_{\perp} = dF \cos \beta \cdot \cos \alpha = q_e q_0 \cos \beta \cdot d\alpha \cdot d\beta.$$

Проинтегрировав выражение для  $F_{\perp}$  по  $\beta$  от  $\beta = 0$  до  $\beta = \pi/2$ , найдем силу притяжения электрона к части элементарной «полоски», расположенной в квадранте  $r_1 > 0, r_3 > 0$ :

$$dF_{\alpha}^{+} = q_e q_0 d\alpha$$

Просуммировав  $dF_{\alpha}^{+}$  по  $\alpha$  от  $\alpha = 0$  до  $\alpha = \pi/2$ , т. е. по всем полоскам квадранта  $r_1 > 0, r_3 > 0$ , определим силу притяжения, индуцируемую зарядами, расположенными в этом квадранте:

$$dF^{+} = \frac{\pi}{2} q_e q_0.$$

Учитывая действие всех четырех квадрантов плоскости нижней обкладки и проводя аналогичные рассуждения для верхней обкладки, получим результирующую силу притяжения (отталкивания) электрона ко всем зарядам конденсатора

$$F = 4\pi \cdot q_e q_0.$$

Сила  $F$  направлена вдоль оси  $r_2$  к нижней обкладке (составляющие  $F$  по осям  $r_1, r_3$ , очевидно, равны нулю в силу симметрии — чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть действие заряда, находящегося на площадке, расположенной в квадранте  $r_1 < 0, r_3 < 0$  и симметричной площадке  $ds$ ).

Поскольку сила  $F$  не зависит от  $r_2$ , а по горизонтальной оси частица движется с постоянной скоростью  $v$ , то приходим к ситуации предыдущего пункта — применив второй закон Ньютона, легко получить формулы, аналогичные (1), описывающие движение электрона по параболической траектории и дающие возможность вычислить все ее параметры. Однако в отличие от случая с подводной лодкой прямое применение фундаментального закона Кулона для получения модели движения электрона оказывается невозможным.

Потребовалось, опираясь на фундаментальный закон, сначала описать элементарный акт взаимодействия зарядов, и уж затем, просуммировав все эти акты, удалось найти результирующую силу.

Подобная ситуация и последовательность действий весьма типичны при построении моделей, так как многие фундаментальные законы устанавливают взаимоотношения как раз между элементарными частями исходного объекта. Это, разумеется, справедливо не только для электрических сил, но, например, и для сил тяготения.

**3. Движение шарика, присоединенного к пружине.** В получении моделей пп. 1-2 главную роль играли фундаментальные законы, определявшие происхождение и величину сил, действующих на объект, а второй закон Ньютона был как бы вспомогательным и применялся на последней стадии построения модели. Конечно же, такое деление чисто условно. Ведь если речь идет о задачах динамики, то можно использовать и другую схему — сначала связать с помощью закона Ньютона проекции ускорения тела с проекциями действующих на него сил, а затем, исходя из тех или иных соображений, вычислить эти силы как функции координат, получив замкнутую модель. Продемонстрируем этот подход на примере модели движения шарика, присоединенного к пружине, с жестко закрепленным концом (рис. 11).

Пусть  $r$  — координата шарика вдоль оси пружины, лежащей на горизонтальной плоскости, и направление движения шарика совпадает с ее осью. Тогда по второму закону динамики

$$F = ma = m \frac{d^2 r}{dt^2},$$

где  $m$  — масса шарика,  $a$  — его ускорение. Будем считать плоскость идеально гладкой (т. е. движение происходит без трения), пренебрежем также сопротивлением воздуха и примем во внимание то, что вес шарика уравновешивается реакцией плоскости. Единственная сила, действующая на шарик в направлении оси  $r$ , очевидно, сила упругости пружины. Определим ее, используя закон Гука, гласящий, что для растяжения (сжатия) пружины необходимо приложить силу

$$F = -k \cdot r,$$

где коэффициент  $k > 0$  характеризует упругие свойства пружины, а  $r$  — величину ее растяжения или сжатия относительно нейтрального, ненагруженного положения  $r = 0$ . Уравнение движения шарика принимает вид (уравнение элементарного осциллятора)



$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k \cdot r, \dots \dots \dots t > 0. \quad (5)$$

Оно описывает его гармонические колебания и имеет общее решение

$$r = A \sin \omega \cdot t + B \cos \omega \cdot t, \quad (6)$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  — собственная частота колебаний системы «пружина—

шарик». Значения А и В легко определяются из начального состояния объекта, т. е. через величины  $r(t = 0) = r_0$  и  $v(t = 0) = v_0$  ( $v(t)$  — скорость шарика), причем  $r(t) = 0$  при  $r_0 = v_0 = 0$ .

Подходы, с помощью которых строились модели данного параграфа, не должны, разумеется, противоречить другим фундаментальным законам природы. Соответствующая проверка непротиворечивости (если она возможна) весьма полезна для установления правильности моделей.

Поясним это, используя для вывода уравнения (5) не закон Ньютона, а закон сохранения энергии. Поскольку точка крепления пружины неподвижна, то стенка не совершает работу над системой «пружина—шарик» (и наоборот), и ее полная механическая энергия Е остается постоянной. Вычислим ее.

Кинетическая энергия определяется движением шарика (пружина считается невесомой):

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{dr}{dt} \right)^2.$$

Потенциальная энергия системы «содержится» в пружине, ее нетрудно найти, определив работу, необходимую для растяжения (сжатия) пружины на величину r:

$$E_p = -\int_0^r F dr' = \int_0^r kr' dr' = k \frac{r^2}{2}.$$

Для неизменной со временем величины  $E = E_k + E_p$  (интеграла энергии) получаем

$$E = \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{kr^2}{2}.$$

Так как  $dE/dt = 0$ , то, продифференцировав интеграл энергии по t, приходим к выражению

$$m \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d^2 r}{dt^2} + kr \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt} \left( m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr \right) = 0,$$

т. е. к уравнению (5), проверив тем самым правильность его получения. Подобную процедуру нетрудно провести и для примеров пп. 1-2.

#### 4. Заключение.

1. Даже в простейших ситуациях для построения модели может потребоваться использование не одного, а нескольких фундаментальных законов.
2. Прямое формальное применение фундаментальных законов к объекту, рассматриваемому как целое, не всегда возможно. В этих случаях требуется

просуммировать элементарные акты взаимодействия между его частями, принимая во внимание свойства объекта (например, его геометрию).

3. Одними и теми же моделями могут описываться совершенно разные по своей природе объекты, подчиняющиеся разным фундаментальным законам, и, наоборот, данному закону могут отвечать принципиально разные модели (например, линейные и нелинейные).

4. Необходимо использовать все возможности для проверки правильности построения модели (предельные переходы, другие фундаментальные законы).

### § 3. Вариационные принципы и математические модели

Дадим упрощенную формулировку вариационного принципа Гамильтона для механической системы. На его основе выведем уравнения движения шарика на пружине и маятника в поле сил тяжести. Сопоставим результаты получения моделей из фундаментальных законов и из вариационного принципа.

**1. Общая схема принципа Гамильтона.** Пусть имеется

механическая система, формального и строгого определения которой пока давать не будем, имея в виду, однако, что все взаимодействия между элементами такой системы определяются законами механики (один из простейших примеров — рассмотренная система «шарик—пружина»).

Введем понятие обобщенных координат  $Q(t)$ , полностью определяющих положение механической системы в пространстве.

Величина  $Q(t)$  может быть декартовой координатой (например, координата  $r$  в системе «шарик—пружина»), радиусом-вектором, угловой координатой, набором координат материальных точек, составляющих систему, и т. д.

Величину  $dQ/dt$  естественно назвать обобщенной скоростью механической системы в момент времени  $t$ . Набор величин  $Q(t)$  и  $dQ/dt$  определяет состояние механической системы во все моменты времени.

Для описания механической системы вводится функция Лагранжа, построение которой — отдельный вопрос, более подробно рассматриваемый в гл. III. В простейших случаях функция Лагранжа имеет ясный смысл и записывается в виде

$$L(Q, dQ/dt) = E_k - E_p, \quad (1)$$

где  $E_k$ ,  $E_p$  — кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно.

Для целей данного параграфа нет необходимости давать общее определение величин  $E_k$ ,  $E_p$ , поскольку в рассматриваемых примерах они вычисляются очевидным образом.

Введем далее величину  $S[Q]$ , называемую действием:

$$s[Q] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt \quad (2)$$

Интеграл (2), очевидно, является функционалом от обобщенной координаты  $Q(t)$  т. е. функции  $Q(t)$ , заданной на отрезке  $[t_1, t_2]$ , он ставит в соответствие некоторое число  $S$  (действие).

Принцип Гамильтона для механической системы гласит: если система движется по законам механики, то  $Q(t)$  — стационарная функция для  $S[Q]$ , или

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[Q + \varepsilon\varphi]_{\varepsilon=0} = 0, \quad (3)$$

Фигурирующая в принципе наименьшего действия (3) функция  $\varphi(t)$  — некоторая пробная функция, обращающаяся в нуль в моменты  $t_1, t_2$  и удовлетворяющая тому условию, что  $Q(t) + \varepsilon\varphi(t)$  — возможная координата данной системы (в остальном  $\varphi(t)$  произвольна).

Смысл принципа (3) в том, что из всех априори мыслимых (допускаемых) траекторий (движений) системы между моментами  $t_1, t_2$  выбирается (реализуется) движение, доставляющее минимум функционалу действия (отсюда происходит и название принципа). Функция  $\varepsilon\varphi(t)$  называется вариацией величины  $Q(t)$ .

Итак, схема применения принципа Гамильтона (3) для построения моделей механических систем состоит в следующем: определяются обобщенные координаты  $Q(t)$  и обобщенные скорости  $dQ/dt$  системы, строятся функция Лагранжа  $L(Q, dQ/dt)$  и функционал действия  $S[Q]$ , минимизация которого на вариациях  $\varepsilon\varphi(t)$  координаты  $Q(t)$  и дает искомую модель.

## 2. Третий способ получения модели системы «шарик—пружина».

Воспользуемся принципом Гамильтона для построения модели движения шарика, соединенного с пружиной. В качестве обобщенной координаты системы естественно выбрать обычную эйлерову координату шарика  $r(t)$ . Тогда обобщенная скорость  $dr/dt = v(t)$  — обычная скорость шарика. Функция Лагранжа (1), равная  $L = E_k - E_p$ , записывается через уже найденные значения кинетической и потенциальной энергии системы:

$$L = \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - k \frac{r^2}{2}.$$

Для величины действия получаем выражение

$$S[r] = \int_{t_1}^{t_2} L \left( r, \frac{dr}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{kr^2}{2} \right] dt.$$

Теперь, в соответствии со схемой п. 1, вычислим действие на вариациях  $\varepsilon\varphi(t)$  координаты  $r(t)$ :

$$S[r + \varepsilon\varphi] = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{d(r + \varepsilon\varphi)}{dt} \right)^2 - \frac{k(r + \varepsilon\varphi)^2}{2} \right] dt.$$

Последнюю формулу необходимо продифференцировать по  $\varepsilon$  (учитывая, что функции  $r, \varphi, dr/dt, d\varphi/dt$  от  $\varepsilon$  не зависят):

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[r + \varepsilon\varphi] = \frac{d}{d\varepsilon} \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \left\{ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - k \{ r^2 + 2\varepsilon r\varphi + \varepsilon^2 \varphi^2 \} \right] dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \left\{ \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\} - k \{ r\varphi + \varepsilon\varphi^2 \} \right] dt,$$

и положить в ней  $\varepsilon = 0$ :

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[r + \varepsilon\varphi]_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[ m \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} - kr\varphi \right] dt = 0.$$

Правая часть этого выражения (равного нулю в согласии с принципом Гамильтона — см. (3)) с помощью интегрирования ее первого члена по частям и с учетом того, что  $\varphi = 0$  в моменты  $t_1, t_2$ , преобразуется к виду

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[r + \varepsilon\varphi]_{\varepsilon=0} = - \int_{t_1}^{t_2} \varphi \left[ m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr \right] dt = 0.$$

Поскольку пробная функция  $\varphi(t)$ , фигурирующая в формулировке принципа наименьшего действия, произвольна, то часть выражения, стоящая под знаком интеграла в квадратных скобках, должна быть равна нулю во все моменты времени  $t_1 < t < t_2$ :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr,$$

т. е. движение системы должно описываться уравнением (5), полученным из закона Ньютона (первый способ) и закона сохранения энергии (второй способ). Все три подхода оказываются эквивалентными (так как между ними существует глубокая связь).

**3. Колебания маятника в поле сил тяжести.** Приведем несколько более сложный пример применения принципа Гамильтона с подробным рассмотрением начальной стадии построения модели — описанием механической системы.

Пусть на неподвижном шарнире подвешен маятник — груз массы  $m$ , находящийся на конце стержня длины  $l$  (рис. 12). Шарнир считается идеально гладким в том смысле, что в нем не происходят потери энергии на трение.

Рис 12

Неподвижность шарнира означает, что от него энергия в систему «стержень—груз» не поступает, такой шарнир неспособен совершить над ней какую-либо работу. Стержень считается невесомым и абсолютно жестким, т. е. его кинетическая и потенциальная энергии равны нулю, а груз не может совершать движений вдоль оси стержня. Груз имеет небольшие размеры по сравнению с длиной стержня (материальная точка), ускорение свободного падения  $g$  постоянно, сопротивлением воздуха пренебрегается, колебания происходят в фиксированной вертикальной плоскости (для чего, очевидно, вектор начальной скорости груза должен лежать в этой плоскости). После всех этих упрощающих предположений ясно, что положение маятника определяется лишь одной обобщенной координатой, в качестве которой

выберем угол  $\alpha(t)$  отклонения стержня от вертикали. Обобщенная скорость в данном случае — угловая скорость  $d\alpha/dt$ .

Кинетическая энергия системы дается формулой

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(l\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

а потенциальная энергия выражением

$$E_p = mgh = -mg(l\cos\alpha - l),$$

где  $h$  — отклонение маятника от нижнего положения по вертикали. В дальнейших выкладках величину  $mg l$  в  $E_p$  опустим, так как потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной.

Теперь нетрудно вычислить функцию Лагранжа (1) и действие (2):

$$L\left(\alpha, \frac{d\alpha}{dt}\right) = ml\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + g\cos\alpha\right],$$

$$S[\alpha] = ml\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + g\cos\alpha\right]dt.$$

Находя действие на вариациях  $\alpha + \varepsilon\varphi(t)$ :

$$\begin{aligned} S[\alpha + \varepsilon\varphi] &= ml\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}l\left(\frac{d\alpha}{dt} + \varepsilon\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\cos(\alpha + \varepsilon\varphi)\right]dt = \\ &= ml\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}l\left\{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\varepsilon\frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} + g\cos(\alpha + \varepsilon\varphi)\right]dt, \end{aligned}$$

дифференцируя его по  $\varepsilon$  и полагая  $\varepsilon = 0$ , получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}S[\alpha + \varepsilon\varphi]_{\varepsilon=0} = ml\int_{t_1}^{t_2}\left[l\frac{d\alpha}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} - \varphi\cdot g\sin\alpha\right]dt = 0.$$

Как и в п. 1, интегрируем первый член выражения в скобках по частям и, учитывая, что  $\varphi(t) = 0$  в моменты  $t_1, t_2$ , приходим к следующему уравнению:

$$ml\int_{t_1}^{t_2}\varphi\left[l\frac{d^2\alpha}{dt^2} + g\sin\alpha\right]dt = 0,$$

которое в силу произвольности  $\varphi(t)$  может удовлетворяться лишь если для всех  $t_1 < t < t_2$  справедливо

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\alpha. \quad (4)$$

Заметим, что уравнение колебаний маятника (4) в отличие от уравнения (5) § 2 нелинейно. Это обстоятельство связано с более сложной геометрией системы «стержень—груз», а именно: ускорение, испытываемое грузом, не пропорционально координате, как в случае закона Гука, а является более сложной функцией отклонения от положения равновесия (угла  $\alpha$ ). Если же эти отклонения малы, то  $\sin\alpha \approx \alpha$ , и модель малых колебаний линейна:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha.$$

Они описываются формулой, аналогичной (6) из § 2, где  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  — собственная частота малых колебаний, а величины А, В определяются через  $\alpha(t=0)$ ,  $\frac{d\alpha}{dt}(t=0)$ .

**4. Заключение.** Примеры использования принципа Гамильтона для построения моделей механических систем рисуют весьма четкую программу действий, в общем виде описанную в п. 1. Универсальность, строго формализованные последовательные процедуры, не зависящие от деталей конкретной системы, безусловно, весьма привлекательная черта вариационных принципов. В приведенных выше простых случаях модели могут быть относительно легко получены и иными способами. Однако для многих других, более сложных объектов, вариационные принципы оказываются фактически единственным методом построения моделей. Так, например, механические части большинства робототехнических устройств состоят из большого количества разнообразных элементов, связанных между собой различными способами. Их математические модели включают большое число уравнений, единообразно получаемых в основном с помощью вариационных принципов. Этот подход успешно применяется также и для систем иной природы (физических, химических, биологических), для которых формулируются соответствующие общие утверждения о характере их эволюции (поведения).

То обстоятельство, что принцип Гамильтона и другие подходы дают совпадающие модели, естественно, поскольку они описывают один и тот же исходный объект. Разумеется, такое совпадение гарантировано только при одних и тех же исходных предположениях об объекте.

Если его идеализация (как один из первых этапов построения модели) проводится одинаково, то разные способы получения моделей должны давать тождественные результаты. Пусть, например, в системе «шарик—пружина» появляется дополнительная постоянная сила некоторого внешнего воздействия на шарик  $F_0$ . Тогда из второго закона Ньютона нетрудно получить уравнение движения шарика.

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F_0.$$

Применяя принцип Гамильтона к такой системе, необходимо учесть наличие этой силы. Очевидно, что определения обобщенной координаты, обобщенной скорости и кинетической энергии  $E_k$  остаются неизменными. В то же время выражение для потенциальной энергии существенно изменяется на величину, равную работе, произведенной этой силой над системой:

$$E_p = k \frac{r^2}{2} + \int_0^r F_1 dr = k \frac{r^2}{2} + F_0 \cdot r.$$

Проводя аналогичные п. 2 выкладки с соответствующим образом измененными величинами L и Q, нетрудно убедиться в том, что принцип Гамильтона дает написанное выше уравнение с внешней силой  $F_0$ .

#### § 4. Пример иерархии моделей

Для движения шарика, соединенного с пружиной, построим иерархическую цепочку моделей по принципу «снизу вверх». Последовательно введем новые усложняющие факторы и дадим их математическое описание.

**1. Различные варианты действия заданной внешней силы.** Пусть на шарик действует известная внешняя сила  $F(r,t)$ , зависящая от времени и положения шарика. Она может порождаться полем тяготения, иметь электрическое или магнитное происхождение и т. д. Из второго закона Ньютона сразу получаем, что по сравнению с базовой моделью колебаний

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr \quad (1)$$

в правой части уравнения (1) появляется дополнительный член:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F(r,t) \quad (2)$$

Простейший вариант уравнения (2) отвечает постоянной силе  $F(r,t) = F_0$ .

Проведя замену  $\bar{r} = r - \frac{F_0}{k}$ , получаем для  $\ddot{r}$

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -k\bar{r},$$

т. е. постоянная сила не вносит изменений в процесс колебаний за тем исключением, что координата нейтральной точки, в которой сила, действующая на шарик, равна нулю, сдвигается на величину  $F_0/k$ .

Гораздо более сложная картина движения может порождаться зависящей от времени силой  $F(t)$ . Рассмотрим для определенности периодическую внешнюю силу  $F(t) = F_0 \sin \omega_1 t$ :

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F(t) = -kr + F_0 \sin \omega_1 t. \quad (3)$$

Решение линейного уравнения (3) находится как сумма общего решения однородного уравнения (формула (6) § 2) и частного решения неоднородного уравнения (3), которое будем искать в виде

$$r_1 = C \sin \omega_1 t \quad (4)$$

Подстановкой этого выражения в (3) находим

$$C = k - \frac{F_0}{k - m\omega_1^2} = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)},$$

где  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  — частота колебаний пружины в отсутствие внешних сил, или

собственная частота системы. В итоге для общего решения (3) имеем

$$r(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)} \cdot \sin \omega_1 t.$$

Итак, внешняя сила  $F(t)$  приводит не только к появлению в системе дополнительных колебаний с частотой  $\omega_1$ , но и к возникновению резонанса — неограниченному росту амплитуды колебаний при  $\omega \rightarrow \omega_1$ .

**2. Движение точки крепления, пружина на вращающемся стержне.**

Резонанс в системе может быть вызван также благодаря действию сил

инерционного происхождения. Пусть точка крепления пружины движется по заданному закону  $r_0(t) = f(t)$ . Тогда в системе координат, связанной с этой точкой, на шарик действует, помимо натяжения пружины, сила инерции, равная  $ma(t)$ , где  $a(t)$  — ускорение, обусловленное движением системы координат,  $a(t) = d^2f/dt^2$ . В этой системе координат движение шарика описывается уравнением

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - F(t),$$

где  $F(t) = -ma(t) = -m d^2 f/dt^2$  — некоторая заданная функция времени. Как и в предыдущем случае, при соответствующем периодическом движении точки крепления в системе возникает резонанс.

При более сложной геометрии силы инерции системы могут зависеть не только от времени  $t$ , но и от координаты  $r$ . Если пружина надета на стержень, движущийся с угловой скоростью  $\omega(t)$ , то центробежная сила инерции равна  $F = mv^2(t)/R = m\omega^2(t)R$ , где  $v(t) = \omega(t)R$ ,  $R = R_0 + r$ ,  $R_0$  — длина пружины в ненагруженном состоянии,  $r$  — отклонение шарика от нейтрального положения,  $r > -R_0$ . Уравнение движения шарика принимает вид

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F(r, t), \quad (5)$$

где  $F(r, t) = m\omega^2(t)(R_0 + r)$ , или

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -(k - m\omega^2(t))r + m\omega^2(t)R_0,$$

причем, очевидно, при  $r \ll R_0$  линейное уравнение (5), общее решение которого здесь не выписывается в силу его громоздкости, переходит в уравнение вида (3) с  $F(t) = -m\omega^2(t)R_0$ .

Однако в данном случае резонанс невозможен, так как внешняя сила всегда направлена в одну сторону и не в состоянии раскачать систему.

Заметим, что усложненная по сравнению с исходным случаем геометрия отнюдь не всегда означает более сложное поведение объекта.

Рассмотрим, например, шарик, прикрепленный к двум пружинам с жесткостью  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 13).

Рис.13.

Начало координат поместим в точку, где силы, действующие на шарик со стороны обеих пружин, уравновешивают друг друга (при этом должно соблюдаться некоторое условие на параметры системы, чтобы шарик не мог касаться одной из точек крепления). По закону Гука при отклонении  $r$  на шарик со стороны левой пружины действует сила  $-k_1r$ , а со стороны правой — сила  $-k_2r$  (обе силы направлены в одну сторону, так как при растяжении первой пружины вторая пружина, наоборот, сжимается). В итоге приходим к такому же уравнению, как и в случае одной пружины,

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k_1r - k_2r = -kr,$$

но с увеличенной жесткостью  $k = k_1 + k_2$ , складывающейся из жест-



костей обеих пружин.

**3. Учет сил трения.** В рассматриваемой системе силы трения могут появляться по крайней мере из-за двух причин. Первая из них - неидеальность поверхностей шарика и плоскости, по которой он движется. В этом случае сила трения равна  $F = k_1 P$ , где  $k_1$  — коэффициент трения,  $P = mg$  — вес шарика. Она всегда направлена против движения шарика, ее знак противоположен знаку скорости шарика  $v = dr/dt$ , т. е.  $F = -k_1 mg \text{ sign}(dr/dt)$ . Движение шарика подчиняется уравнению

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - k_1 mg \text{ sign} \frac{dr}{dt}, \quad (6)$$

которое внешне похоже на уравнение (2) с постоянной силой  $F(r, t) = F_0$ . Однако из-за знакопеременности силы оно не сводится к стандартному уравнению колебаний. Это обстоятельство служит выражением того, что уравнения (1) и (6) описывают существенно разные процессы. В частности, амплитуда колебаний шарика в последнем случае уменьшается со временем. В этом нетрудно убедиться, переписав (6) в виде

$$m \frac{dv}{dt} + kr = -k_1 mg \cdot \text{sign} v,$$

умножив обе части этого выражения на  $v/2$ :

$$m \frac{v}{2} \frac{dv}{dt} + kr \frac{v}{2} = -k_1 mg \frac{v}{2} \text{ sign} \cdot v$$

и с учетом того, что  $v = dr/dt$ , получим

$$\frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} + k \frac{dr^2}{dt} = -\frac{1}{2} k_1 mg v \text{ sign} v$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} + k \frac{r^2}{2} \right) = -\frac{1}{2} k_1 mg v \text{ sign} v. \quad (7)$$

Принимая во внимание, что в левой части (7) под знаком производной стоит сумма кинетической и потенциальной энергии системы  $E(t) = E_k(t) + E_p(t)$ , а правая часть (7) при  $v \neq 0$  отрицательна, имеем

$$\frac{dE(t)}{dt} < 0, \dots \dots \dots v \neq 0; \dots \dots \dots \left( \frac{dE(t)}{dt} = 0, \dots \dots v \equiv 0 \right)$$

т. е. полная энергия  $E(t)$  убывает со временем. Поскольку в моменты достижения шариком максимальной амплитуды  $|r_m(t)|$  его скорость (и кинетическая энергия  $E_k$ ) равна нулю, то в эти моменты  $E_p = kr_m^2(t)/2 = E(t)$ , и в силу убывания  $E(t)$  амплитуда  $|r_m(t)|$  — также убывающая функция времени.

Более подробно рассмотрим результат действия силы трения иного происхождения, возникающей из-за сопротивления среды, в которой движется шарик (воздуха, воды и т. д.). В этом случае сила трения не постоянна, а существенно зависит от скорости движения. Эта зависимость описывается известной формулой Стокса

$$F = -\mu v = -\mu \frac{dr}{dt},$$

где коэффициент  $\mu > 0$  определяется размерами шарика, плотностью среды, ее вязкостью и т. д. Уравнение движения в вязкой среде имеет вид

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F(v) = -kr - \mu \frac{dr}{dt}. \quad (8)$$

Найдем общее решение линейного уравнения (8), избавившись предварительно от члена с первой производной. Подстановка в (8) замены  $r(t) = \dot{r}(t) \cdot e^{\alpha t}$  дает для новой функции  $\dot{r}(t)$  уравнение

$$m \left( e^{\alpha t} \frac{d^2 \dot{r}}{dt^2} + \alpha e^{\alpha t} \frac{d\dot{r}}{dt} + \alpha e^{\alpha t} \frac{d\dot{r}}{dt} + \alpha^2 e^{\alpha t} \dot{r} \right) = -k \dot{r} e^{\alpha t} - \mu e^{\alpha t} \frac{d\dot{r}}{dt} - \mu \alpha e^{\alpha t} \dot{r}.$$

Сократив в нем множитель  $e^{\alpha t}$  и положив  $\alpha = -\mu/(2m)$ , придем к уравнению

$$m \frac{d^2 \dot{r}}{dt^2} = - \left( k - \frac{\mu^2}{4m} \right) \dot{r} = -k_1 \dot{r}. \quad (9)$$

В отличие от уравнения (1) первый множитель в правой части (9) может менять знак в зависимости от значений параметров  $k, \mu, m$  системы, что с учетом связи  $r(t) = e^{\alpha t} \dot{r}(t)$  приводит к существенно иному ее поведению относительно стандартного случая.

При малой вязкости, т. е. при  $k - \mu^2/(4m) = k_1 > 0$  решение  $\dot{r}(t)$  дается формулой (6) § 2, и для  $r(t)$  имеем

$$r = \dot{r} e^{\alpha t} = e^{-t\mu/(2m)} (A \sin \omega t + B \cos \omega t)$$

где  $\omega = (k_1 / m)^{1/2}$ , а константы  $A, B$  находятся через  $r_0, v_0$ . В системе происходят затухающие со временем колебания с частотой  $\omega$ .

Если  $k_1 = 0$ , то величина  $\frac{d\dot{r}}{dt}$  постоянна, или, что то же самое,  $\dot{r}(t) = ct + c_1$ .

Для  $r(t)$  с учетом начальных данных получаем

$$r(t) = e^{-t\mu/(2m)} (ct + c_1) = e^{-t\mu/(2m)} \left[ \left( v_0 + \frac{\mu \cdot r_0}{2m} \right) t + r_0 \right].$$

В данном случае колебания отсутствуют благодаря подавляющему действию сил вязкого трения. Система может лишь один раз пройти точку  $r = 0$ , для чего необходимо и достаточно выполнения условий  $v_0 < -\mu r_0 / (2m)$ ,  $r_0 > 0$  или  $v_0 > -\mu r_0 / (2m)$ ,  $r_0 < 0$ , т. е. начальная скорость шарика должна быть достаточно велика и направлена к точке  $r = 0$ . При этом, очевидно, скорость шарика  $v(t) = dr/dt$  может менять знак лишь один раз.

Наконец, при большой вязкости действие силы трения настолько значительно, что для любых  $r_0, v_0$  шарик «застревает» в среде, никогда не проходя точку  $r = 0$ , а лишь односторонне приближаясь к ней при  $t \rightarrow \infty$ . Действительно, при  $k_1 < 0$  решение уравнения (9) знакопостоянно (предположение о противном сразу же приводит к противоречию с уравнением), следовательно, величина  $r(t)$  также не меняет знак. Поведение функции  $\dot{r}(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  можно понять из свойств первого интеграла уравнения (9)

$$m \left( \frac{d\dot{r}}{dt} \right)^2 = -k_1 \dot{r}^2 + const,$$

который нетрудно получить, умножая обе части (9) на  $d\dot{r}/dt$  и интегрируя один раз по  $t$ . Предположения о том, что  $\dot{r}(t) \rightarrow \infty$  или  $\dot{r}(t) \rightarrow C \neq 0$  при  $t \rightarrow \infty$  противоречат последнему равенству. Остается единственный вариант  $\dot{r}(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ , таким образом,  $r(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ .

Итак, движение системы в вязкой среде отличается большим по отношению к идеальной ситуации разнообразием, причем во всех случаях оно происходит с затуханием.

**4. Два типа нелинейных моделей системы «шарик—пружина».** Формула Стокса справедлива, строго говоря, только для установившихся движений, когда действие постоянной внешней силы уравнивается силой вязкого трения так, что в итоге тело перемещается с постоянной скоростью. Вполне возможны ситуации, при которых сила сопротивления вязкой среды при малых скоростях меньше, а при больших скоростях больше, чем вычисляемая по формуле Стокса; например,  $F(v) = \mu \cdot v |v|^\alpha$ , где  $\mu > 0, \alpha > -1$ .

Тогда искомая величина  $r(t)$  определяется из уравнения

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F(v) = -kr - \mu \cdot v \cdot |v|^\alpha. \quad (10)$$

Уравнение (10), в отличие от всех рассмотренных ранее моделей, нелинейно, и его решение выписать, вообще говоря, нельзя (хотя можно провести достаточно детальное изучение системы и в нелинейном случае, в частности, установить, пользуясь приемом, применявшимся для уравнения (6), затухающий характер движения системы).

Поэтому ограничимся здесь приближенным анализом поведения системы в двух ее предельных положениях — в окрестности точек  $v = 0$  и  $r = 0$ .

Оба положения, очевидно, не могут достигаться одновременно, так как это означало бы, что система покоится.

Если  $v(t_0) = 0$  (здесь момент  $t_0$  — один из моментов достижения максимальной амплитуды  $r_0$ ), то вторым членом в правой части уравнения (10) можно пренебречь по сравнению с первым, и оно принимает вид

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr_0.$$

Поскольку рассматривается малая окрестность  $\Delta t$  около момента  $t_0$ , то пренебрегается также отклонением  $\Delta r$  в сравнении с  $r_0$ . Учитывая, что  $v(t_0) = 0$ , получаем

$$\Delta r = r - r_0 = -\frac{1}{2} \frac{k}{m} r_0 (t - t_0)^2,$$

т. е. шарик движется с постоянным (в первом приближении) ускорением, так как на него действует лишь сила натяжения пружины, постоянная в окрестности точки  $r = r_0$ , а сила трения равна нулю.

При  $r(t_0) = 0$  ( $t_0$  — один из моментов прохождения системой начала координат, если, конечно, точка  $r = 0$  достигается хотя бы один раз) первый член в правой части мал по сравнению со вторым, и

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\mu \cdot v_0 |v_0|^\alpha.$$

Здесь также пренебрегается отклонением  $\Delta v$  от значения  $v_0 = v(t_0)$  ввиду его малости. Так как  $r(t_0) = 0$ , то из последнего уравнения следует

$$\Delta r = r = \frac{-\mu \cdot v_0 |v_0|^\alpha}{2m} (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0).$$

Значит, и в этом положении система испытывает постоянное (в первом приближении) ускорение, определяемое лишь силой трения, поскольку натяжение пружины равно нулю. Данный вывод вполне очевиден и справедлив для всех положений системы, хотя ускорение шарика при  $v \neq 0$ ,  $r \neq 0$  определяется уже совместным действием обеих сил.

Исключение составляет лишь точка, где  $kr_0 = -\mu \cdot v_0 |v_0|^\alpha$ , когда правая часть уравнения (10) обращается в нуль и первый член в ускорении системы в этот момент  $t = t_0$  равен нулю. Разлагая  $r(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t = t_0$ :

$$r(t) = r(t_0) + \frac{dr}{dt}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 r}{dt^2}(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 r}{dt^3}(t_0)(t - t_0)^3 + \dots,$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости, и

принимая во внимание, что  $\frac{d^2 r}{dt^2}(t = t_0) = 0$ , находим

$$\Delta r = r - r_0 = \frac{dr}{dt}(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{6} \frac{d^3 r}{dt^3}(t_0)(t - t_0)^3 + \dots$$

т. е. в главном члене ускорение системы в окрестности точки  $t = t_0$  не постоянно, а является линейной функцией времени.

Еще один тип нелинейности может обуславливаться изменяющимися механическими свойствами пружины. Закон Гука действителен, вообще говоря, лишь при малых отклонениях (деформациях) пружины от ненагруженного нейтрального положения. При заметных деформациях пружина, в зависимости от материала, из которого она изготовлена, и величины деформации, может вести себя как «мягкая», и тогда сила натяжения будет меньше, чем полагается по закону Гука (в случае «жесткой» пружины — наоборот). Жесткость пружины в такой ситуации становится функцией координаты, т. е.  $k = k(r)$ , и уравнение движения принимает вид

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r) \cdot r, \quad (11)$$

где, разумеется,  $k(r) > 0$ . Например, если  $k(r) = k_0 / (1 + |r|)$ , то пружина мягкая.

Уравнение (11) нелинейное так же, как и (10), но достаточно очевидны по крайней мере два различия между (10) и (11). В отличие от (10), можно выписать (неявное) решение для (11) с двукратным использованием квадратуры. Кроме того, переписывая (11) в виде

$$m \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dr}{dt} k(r) r = -\frac{dr}{dt} \frac{d}{dr} \int_0^r k(r') r' dr' = -\frac{d}{dt} \left( \int_0^r k(r') r' dr' \right),$$

учитывая, что левая часть этого выражения равна  $mv \frac{dv}{dt} = \frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt}$ , и интегрируя его по  $t$ , получаем

$$E_k + E_p = \frac{1}{2} m \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \int_0^r k(r') r' dr' = \text{const} > 0. \quad (12)$$

Это означает консервативность движения, описываемого моделью (11), или постоянство полной энергии системы. Существование первого интеграла (12) позволяет установить общий со случаем линейной системы факт — колебательный характер изучаемого движения.

Действительно, из (12) следует ограниченность функций  $v(t) = dr/dt$  и  $r(t)$  при любых  $t > 0$ . Решение не имеет предела при  $t \rightarrow \infty$ , так как при  $v(t \rightarrow \infty) \rightarrow v_\infty \neq 0$  это противоречило бы ограниченности функции  $r(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , а для  $v(t \rightarrow \infty) \rightarrow v_\infty = 0$  невозможно, чтобы  $r(t \rightarrow \infty) \rightarrow r_\infty \neq 0$  — тогда из (11) следовала бы неограниченность величины  $v(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  (случай же  $v_\infty = r_\infty = 0$  противоречит (12)).

Тем самым шарик колеблется. Он неограниченное число раз проходит точку  $r = 0$  (в противном случае величина  $r(t)$  была бы знакоопределенной вместе с ускорением  $d^2r/dt^2$  (см. (11)) и  $v \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ ).

**5. Заключение.** Приведенные в этом параграфе построения демонстрируют иерархическую цепочку моделей системы «шарик—пружина», получающихся одна из другой при последовательном отказе от предположений, идеализирующих изучаемый объект. В одних случаях усложнение не вносит ничего нового в поведение системы (постоянная внешняя сила, шарик на двух пружинах), в других ее свойства меняются существенным образом. Путь «от простого к сложному» дает возможность поэтапно изучать все более реалистичные модели и сравнивать их свойства. Существует и другой путь построения и изучения моделей — «от общего к частному». Из результатов данного параграфа очевидно: достаточно общее уравнение движения системы «шарик—пружина» записывается в виде

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r, t)r + F(r, t, \frac{dr}{dt}), \dots \dots k > 0,$$

где  $k$  и  $F$  могут быть разнообразными функциями своих аргументов.

Опираясь на эту общую модель, можно, проводя соответствующие конкретизации, последовательно получать и изучать более простые модели. Например, зависимость  $k$  от  $r$  и  $t$  отвечает следующему после (5) уравнению и уравнению (11), зависимость  $F$  от  $r, t$  — наличию внешней силы или силы инерции (уравнения (2), (3), (5)), а от  $dr/dt$  — сопротивлению среды (уравнения (6), (8), (10)). Данный подход также широко применяется, в том числе и потому, что позволяет сразу установить некоторые общие свойства объекта, конкретизируя и дополняя их в частных ситуациях.

## § 5. Универсальность математических моделей

Рассмотрим процессы колебаний в объектах различной природы. Покажем, что несмотря на разную сущность объектов им соответствуют одни и те же математические модели.

- 1. Колебательный электрический контур.** Это устройство представляет собой конденсатор, соединенный проводами с индуктивной катушкой. В момент  $t = 0$  цепь замыкается, и заряд с обкладок конденсатора начинает распространяться по цепи (рис. 16).

Рис.16

Сопротивление проводов будем считать равным нулю, емкость конденсатора равна  $C$ , индуктивность катушки  $L$ . Для изменяющейся со временем величины  $q(t)$ , где  $q(t)$  — заряд на обкладках конденсатора, необходимо получить соответствующее уравнение. Очевидно, что ток  $i(t)$  и напряжение  $v(t)$  также являются функциями времени.

По физическому смыслу величины  $C$  в любой момент времени имеем равенство  $v(t) = q(t) C$  (емкость равна величине заряда, который необходимо поместить на обкладки конденсатора для увеличения разности потенциалов между ними на единицу). Так как электрическое сопротивление в цепи отсутствует, то падения напряжения на проводах нет, и разность потенциалов  $v(t)$ , существующая на конденсаторе, подается непосредственно на катушку. При переменном токе в катушке возникает электродвижущая сила самоиндукции, равная  $\varepsilon = -L di/dt$ .

Закон Ома для цепи в отсутствие сопротивления выглядит следующим образом:

$$v(t) = -\varepsilon(t),$$

или

$$q(t)C = -\varepsilon(t) = L di/dt.$$

Так как по определению  $i = -dq/dt$  (при изменении заряда на конденсаторе в цепи возникает ток), то из последнего соотношения получаем уравнение

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} = -Cq$$

описывающее процесс колебаний величины  $q(t)$  (а следовательно, и величин  $i(t)$ ,  $v(t)$ ) в простейшем электрическом контуре, тождественное (1) § 4. В системе «емкость—индуктивность» колебания происходят так же, как и в системе «шарик—пружина» (и так же усложняются соответствующие модели при учете дополнительных процессов).

**2. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций.** Пусть на одной и той же территории проживают две биологические популяции с численностями  $N(t)$  и  $M(t)$ , причем первая растительноядная, а вторая употребляет в пищу представителей первой популяции.

Скорость изменения  $N(t)$  складывается из определяемой по первому члену в правой части формулы (10) § 1 скорости прироста благодаря рождаемости

(эффект насыщения не учитывается) и из скорости убывания благодаря соседству со второй популяцией:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 M)N, \quad (1)$$

где  $\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ , член  $\beta_1 MN$  описывает вынужденное убывание (естественной смертностью популяции пренебрегаем).

Численность второй популяции растет тем быстрее, чем больше численность первой популяции, а при ее отсутствии уменьшается со скоростью, пропорциональной численности  $M(t)$  (тем самым ее рождаемость не учитывается, как и эффект насыщения):

$$\frac{dM}{dt} = (-\alpha_2 + \beta_2 N)M, \quad (2)$$

где  $\alpha_2 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ .

Очевидно, что система находится в равновесии при  $M_0 = \alpha_1/\beta_1$  и  $N_0 = \alpha_2/\beta_2$ , когда  $dN/dt = dM/dt = 0$ . Рассмотрим малые отклонения системы от равновесных значений, т. е. представим решение в виде

$N = N_0 + n$ ,  $M = M_0 + m$ ,  $n \ll N_0$ ,  $m \ll M_0$ . Подставляя  $N$  и  $M$  в уравнения (1), (2), получим, отбрасывая члены более высокого порядка малости,

$$\frac{dn}{dt} = -\beta_1 N_0 m, \quad (3)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\beta_2 M_0 n. \quad (4)$$

Дифференцируя (3) по  $t$  и подставляя в полученное уравнение функцию  $dm/dt$ , определяемую из (4), придем к уравнению

$$\frac{d^2 n}{dt^2} = -\alpha_1 \alpha_2 n,$$

аналогичному по форме уравнению (1) § 4. Следовательно, в системе происходят малые колебания численности с частотой  $\omega = (\alpha_1 \alpha_2)^{1/2}$ , зависящей только от коэффициентов рождаемости и смертности  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

Заметим, что величина  $m(t)$  подчиняется такому же уравнению, причем если отклонение  $n(t)$  равно нулю в начальный момент  $t = 0$ , то  $m(t = 0)$  имеет максимальную амплитуду, и наоборот. Эта ситуация, когда численности  $n(t)$  и  $m(t)$  находятся в противофазе, воспроизводится для всех моментов  $t_i = iT/4$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , ( $T$  — период колебаний) и отражает запаздывание реакции численности одной популяции на изменение численности другой.

**3. Заключение.** Построенные в данном параграфе модели в одних случаях основаны на точно известных законах, в других — на наблюдаемых фактах и либо на аналогиях, либо на правдоподобных представлениях о характере объекта.

Хотя и сущность рассматривавшихся явлений, и подходы к получению отвечающих им моделей совершенно различны, построенные модели оказались идентичны друг другу. Это свидетельствует о важнейшем свойстве математических моделей — их универсальности, — широко используемом при изучении объектов.

## § 6. Некоторые модели простейших нелинейных объектов

Обсудим происхождение нелинейности и рассмотрим некоторые ее последствия, проявляющиеся в поведении изучаемых объектов.

Проиллюстрируем неизбежность применения численных методов для их анализа.

**1. О происхождении нелинейности.** Как уже отмечалось, линейные модели подчиняются принципу суперпозиции. В этом случае, находя частные решения и суммируя их, как правило, удастся построить и общее решение. Для нелинейных моделей принцип суперпозиции неприменим, и общее решение можно найти лишь в редких случаях. Отдельные же частные решения нелинейных уравнений могут не отражать характер поведения объекта в более общей ситуации.

Источниками нелинейности могут быть многие причины.

Фундаментальные законы природы — закон тяготения и закон Кулона — изначально нелинейны (квадратичная зависимость силы взаимодействия между массами или зарядами), и потому основанные на них модели, вообще говоря, также нелинейны. Свой вклад в нелинейность моделей вносят более сложная геометрия явления, различные внешние воздействия и, конечно же, изменение характера взаимодействия в самом объекте при изменении его состояния (эффект насыщения в моделях популяций, меняющаяся жесткость пружины).

В сущности, реальным явлениям отвечают только нелинейные модели, а линейные справедливы лишь при описании незначительных изменений величин, характеризующих объект.

**2. Три режима в нелинейной модели популяции.** В отличие от модели Мальтуса и модели (12) § 1 коэффициент рождаемости будем считать зависящим от численности популяции  $N(t)$  т. е.  $\alpha = \alpha(N)$ .

Коэффициент смертности  $\beta$  также зависит от  $N$ . Уравнение динамики популяции

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha(N) - \beta(N))N \quad (1)$$

нелинейно благодаря изменению характеристик взаимодействия внутри популяции при изменении ее состояния.

Положим для определенности  $\beta(N) = \beta_0 = \text{const}$ ,  $\alpha(N) = \alpha_0 N$ , т. е.

рождаемость пропорциональна численности (например, потому что члены популяции заинтересованы в ее росте). Тогда уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \quad (2)$$

с квадратичной нелинейностью (характерной также для некоторых химических реакций). Рассмотрим поведение функции  $N(t)$  при различных начальных численностях  $N(0) = N_0$  (рис. 17).

а) При  $N_0 < N_{\text{кр}} = \beta_0/\alpha_0$  численность монотонно уменьшается со временем, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Решение дается формулой, аналогичной формуле



для решения уравнения (12) § 1, где  $t$  заменяется на  $-t$  (обратная логистическая кривая; ср. с рис. 7, § 1).

б) При критическом значении  $N_0 = N_{кр}$  численность популяции не зависит от времени.

в) При  $N_0 > N_{кр}$  характер решения принципиально изменяется по сравнению со случаями а) и б): численность растет со временем, причем настолько быстро, что обращается в бесконечность за конечное время  $t = t_f$ . Величина  $t_f$  тем меньше, чем больше  $N_0$ .

Рис. 17

Нелинейность уравнения (2) порождает большое разнообразие эффектов, содержащихся даже в простейшей модели: три возможных режима изменения численности со временем; неустойчивость режима б) — при малых отклонениях в область а) или в) решение удаляется от линии  $N_{кр} = \beta_0/\alpha_0$ ; сильную чувствительность функции  $N(t)$  к начальным данным  $N_0$ ; наконец, катастрофический рост численности популяции за конечное время при  $N_0 > N_{кр}$ .

Заметим, что последнее свойство не частный результат, а имеет место для любых моделей вида

$$\frac{dN}{dt} = F(N), \dots \dots t > 0, \dots \dots N(0) > 0, \dots \dots F(N) > 0,$$

если при больших  $N$  функция  $F(N)$  растет быстрее первой степени  $N$ , точнее, если для  $F(N)$  справедлив критерий

$$\int_{N_0}^{\infty} \frac{dN}{F(N)} < \infty$$

получающийся непосредственным интегрированием уравнения.

### 3. Влияние сильной нелинейности на процесс колебаний.

Уравнение колебаний

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r)r, \quad (3)$$

где функция  $k(r) > 0$  описывает жесткость пружины, — одно из относительно немногих нелинейных уравнений, для которого можно выписать общее решение. Вводя величину скорости  $v = dr/dt$ , перепишем (3) в виде

$$m \frac{dv}{dt} = -k(r)r \quad \frac{dr}{dt} = v;$$

деля первое из этих уравнений на второе, получим нелинейное уравнение первого порядка

$$m \frac{dv}{dr} = -\frac{k(r)r}{v}. \quad (4)$$

Разделяя в (4) переменные:

$$mv dv = -k(r)r dr,$$

и дважды интегрируя последнее уравнение, находим

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -2\int_0^r k'(r')r'dr' + C, \dots \dots \dots k'(r) = \frac{k(r)}{m},$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{C - 2\int_0^r k'(r')r'dr'},$$

$$t = \pm \int_0^r dr' \left( \sqrt{C - 2\int_0^{r'} k'(r'')r''dr''} \right)^{-1} + C_1 \quad (5)$$

где в неявно выписанном общем решении (5) константы  $C, C_1$  можно определить, зная начальные данные.

Заметим, что данная процедура по отношению к уравнениям вида (10) § 4 неприменима (переменные не разделяются), и найти их общее решение этим способом уже нельзя.

В линейном случае ( $k(r) = k_0$ ) интегральные кривые уравнения (4) представляют собой концентрические круги с центром в начале координат, радиус которых определяется начальной энергией системы и «движение» по которым описывает периодический во времени процесс колебаний (рис. 18). Рассмотрим теперь сильно нелинейную систему, в которой пружина ведет себя как «сверхмягкая», например,  $k(r) = 1/(r^2 + \alpha), \alpha > 0$ .

В предельном случае  $\alpha = 0$  уравнение (4) принимает вид

$$m \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{vr},$$

и его решение принципиально отличается от решения (4) (см. рис. 19) тем, что энергия не сохраняется и, более того, неограниченно растет

Рис. 18

Рис. 19

при  $r \rightarrow \pm 0$ . При ослаблении нелинейности процесс колебаний приобретает обычный характер .

**4. О численных методах.** Рассмотренные здесь примеры достаточно убедительно свидетельствуют о неизбежности применения численных методов для моделирования нелинейных объектов из-за явной недостаточности чисто теоретических подходов и сложного, разнообразного поведения характеризующих эти объекты величин. Впрочем, этот вывод справедлив и для линейных моделей, содержащих большое число неизвестных величин, независимых переменных, параметров и имеющих сложную пространственную структуру. Для построения соответствующих численных моделей широко используются методы, подходы и приемы, разрабатываемые при создании исходных моделей, и возникают свои специфические проблемы, требующие глубокого изучения.

Поясним последнее утверждение простым примером. Для уравнения (10) § 1

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N = \gamma N, \dots \dots \dots t > 0, \dots \dots \dots N(0) = N_0,$$

где для определенности  $(\alpha - \beta) > 0$ , вполне логично предложить

следующую численную схему (разбив ось  $t$  на равные отрезки величины  $\tau = t_{i+1} - t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ;  $t_0 = 0$  и заменив производную на конечную разность):

$$\frac{N_{i+1} - N_i}{\tau} = \gamma N_i, \dots, \dots, i = 0, 1, 2, \dots, \dots, N(t_0) = N_0. \quad (6)$$

Из (6) получаем

$$N_{i+1} = (\tau\gamma + 1)N_i,$$

что дает для его решения

$$N_1 = (1 + \tau\gamma)N_0, \quad N_2 = (1 + \tau\gamma)^2 N_0$$

$$N_i = (1 + \tau\gamma)^i N_0 = (1 + \tau\gamma)^{\frac{t}{\tau}} N_0.$$

т. е. при  $t \rightarrow \infty$  решение (6) может отличаться от искомого сколь угодно сильно. Следовательно, для получения нужной точности необходимо должным образом выбирать шаг  $\tau$  в зависимости от величины отрезка интегрирования  $T$ .

В заключение, основываясь на материале данной главы, выделим ряд тем, являющихся ключевыми для развития и применения методологии математического моделирования. К ним относятся: вопросы идеализации исходного объекта и формулировка соответствующих предположений; применение как строгих процедур (фундаментальные законы, вариационные принципы), так и метода аналогий и других подходов к построению математических моделей (в том числе и трудноформализуемых); методы качественного исследования нелинейных моделей; построение эффективных вычислительных алгоритмов, реализующих модели.

## ГЛАВА II

### ПОЛУЧЕНИЕ МОДЕЛЕЙ

### ИЗ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЗАКОНОВ ПРИРОДЫ

#### § 1. Сохранение массы вещества

На основе составления баланса массы вещества и некоторых дополнительных соображений построим модели потока невзаимодействующих частиц и движения грунтовых вод в пористой среде. Опишем ряд свойств полученных моделей и обсудим их возможные обобщения.

**1. Поток частиц в трубе.** В цилиндрической трубе с поперечным сечением  $S$  (рис. 20) движутся частицы вещества (пылинки, электроны). Скорость их движения  $u(t) > 0$  вдоль оси  $x$ , вообще говоря, изменяется со временем.

Например, заряженные частицы могут ускоряться или замедляться под действием электрического поля. Для построения простейшей модели

#### Рис. 20

рассматриваемого движения введем следующие предположения:

а) частицы между собой не взаимодействуют (не сталкиваются, не притягиваются и т. д.). Для этого, очевидно, плотность частиц должна быть достаточно малой (в этом случае заряженные частицы не только не сталкиваются, но и не оказывают друг на друга влияния из-за большого расстояния между ними);

б) начальная скорость всех частиц, находящихся в одном и том же поперечном сечении с координатой  $x$ , одинакова и направлена вдоль оси  $x$

в) начальная плотность частиц также зависит только от координаты  $x$ .

г) внешние силы, действующие на частицы, направлены вдоль оси  $x$ .

Предположение а) означает, что скорость частиц может изменяться лишь под действием внешних сил, предположения б)-г) обеспечивают одномерность процесса переноса, т. е. зависимость искомой плотности потока частиц только от координаты  $x$  и времени  $t \geq 0$ .

Итак, по заданной начальной плотности  $\rho(x, t = 0) = \rho_0(x)$  необходимо найти плотность частиц  $\rho(x, t)$  в любой момент времени для любых  $x$  (скорость движения  $u(t)$  задана). Прибегнем к закону сохранения массы, подсчитав баланс вещества в малом элементе трубы от  $x$  до  $x + dx$  за время  $dt$  (рис. 21).

#### Рис. 21

Слева в элементарный объем входит количество вещества с массой, равной  $Su(t)dt \rho(x, t + \xi dt)$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ ,

где  $Su(t) dt$  — объем вошедшего за промежуток времени  $dt$  вещества. Через правое сечение элемента за то же время выходит масса, равная

$-Su(t)dt \rho(x + dx, t + \xi dt)$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ ,

т. е. суммарное изменение массы равно

$$dm = Su(t) \{ \rho(x, t + \xi dt) - \rho(x + dx, t + \xi dt) \} dt.$$

В силу малости промежутка  $dt$  скорость  $u(t)$  считается постоянной.

Величины  $\rho(x, t + \xi dt)$  и  $\rho(x + dx, t + \xi dt)$  — средние по времени значения плотности в сечениях  $x$  и  $x + dx$ .

Другой способ подсчета изменений в фиксированном объеме  $S dx$  очевиден из смысла величины  $\rho(x, t)$ :

$$dm = Sdx(\rho(x + \eta dx, t + dt) - \rho(x + \eta dx, t)), \quad 0 < \eta, \eta < 1,$$

где  $\rho(x + \eta dx, t + dt)$  и  $\rho(x + \eta dx, t)$  — средние по пространству значения плотности в моменты  $t$  и  $t + dt$ .

Приравнявая оба полученные для  $dm$  выражения и устремляя  $dx$  и  $dt$  к нулю, приходим к уравнению для  $\rho(x, t)$ , отвечающему закону сохранения массы,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u(t) = 0, \dots \dots \dots -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1)$$

с начальным условием

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Величина  $\rho u$  (*поток вещества, или поток массы*) равна количеству вещества, проходящему в единицу времени через единичную поверхность поперечного сечения трубы. Как видно из (1), скорость изменения плотности вещества со временем в любом сечении определяется «скоростью» изменения потока вещества по координате  $x$ .

Схожим свойством обладают многие модели, отвечающие законам сохранения и описывающие совсем другие процессы.

В случае постоянной скорости  $u(t) = u_0$  приходим к простейшему линейному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \dots \dots \dots -\infty < x < \infty, \dots \dots \dots t > 0 \quad (3)$$

Его общее решение нетрудно найти, приняв во внимание, что уравнение (3) имеет характеристики — линии  $x = u_0 t + C$ , на которых значения искомой функции постоянны во времени, т. е.  $\rho(x = u_0 t + C, t) = \rho_c$ , или, в эквивалентной записи,

$$\rho(x, t) = \rho(x + u_0(t - t_0), t_0), \quad t - t_0 \geq 0$$

Выбирая  $t_0 = 0$ , получим

$$\rho(x, t) = \rho(\xi) = \rho(x + u_0 t). \quad (4)$$

Интеграл (4) и является общим решением уравнения (3). Из формулы (4) и начальных данных (2) легко найти искомую функцию, причем она зависит не по отдельности от переменных  $x, t$ , а от их комбинации  $\xi = x + u_0 t$  (*бегущая волна*). Пространственный профиль плотности без искажений переносится вдоль потока (рис. 22) с постоянной скоростью (уравнение (3) называют также *уравнением переноса*). Это основное свойство решения уравнения (3) несколько модифицируется в случае, когда скорость частиц зависит от времени — профиль плотности переносится за равные промежутки времени

### Рис 22

на разные расстояния. Если же по каким-то причинам скорость потока зависит от плотности ( $u = u(\rho)$ ), то уравнение (1) становится нелинейным, и поведение его решения может иметь качественно иной характер.

**2. Основные предположения о гравитационном режиме течения грунтовых вод.** Пористая среда представляет собой пласт водопроницаемого материала (песок, глина), ограниченного снизу грунтом, не пропускающим воду (гранит), а сверху — поверхностью земли (рис. 23). Если из-за

интенсивной работы артезианских скважин и в результате обильных осадков уровень воды в каком-либо месте слоя изменяется, то под действием силы тяжести начинается движение жидкости, выравнивающее ее свободную поверхность.

Для описания этого процесса введем прежде всего ряд предположений:

- 1) вода рассматривается как несжимаемая жидкость с постоянной плотностью  $\rho$ .
- 2) толщина пласта много меньше его ширины и длины;
- 3) подстилающая поверхность не имеет разрывов и изломов, задающая ее известная функция  $H(x, y)$  — достаточно гладкая функция своих аргументов;
- 4) свободная поверхность воды  $h = h(x, y, t)$  плавно меняется с изменением координат  $x, y$ ;
- 5) грунтовые воды нигде не выходят на поверхность земли, причем на свободной поверхности жидкости давление постоянно;
- 6) грунт однороден, т. е. его физико-механические свойства не зависят от аргументов  $x, y, z$ .

Первое предположение вполне естественно, поскольку в рассматриваемом процессе не могут достигаться давления, способные заметно изменять плотность воды. Остальные предположения упрощающие. Например, второе предположение (тонкий пласт) означает, что течение жидкости двумерное и все его характеристики не зависят от координаты  $z$ , последние два предположения позволяют построить модель, единообразную во всех точках грунта, и т. д. Вместе с тем предположения 1)-6) отнюдь не выхолащивают сути процесса, так как они выполняются в большом количестве реальных ситуаций.

### Рис. 23

**3. Баланс массы в элементе грунта.** Выделим в пласте элементарный объем, образующийся в результате пересечения вертикальной призмы ABCD подстилающей и свободной поверхностями грунта.

Поскольку размеры призмы  $dx$  и  $dy$  малы, а функции  $H$  и  $h$  гладкие (предположения 3), 4)), то получившееся тело с хорошей степенью точности можно считать параллелепипедом. Введем неизвестные функции  $v = v(x, y, t)$  и  $u = u(x, y, t)$  — составляющие скорости жидкости вдоль осей  $x, y$  (рис. 24).

Подсчитаем количества жидкости, входящей в параллелепипед и выходящей из него за промежуток времени  $dt$ .

Через грань DC в элемент грунта входит масса воды, равная объему прошедшей через нее жидкости, умноженному на плотность  $\rho$ , т. е. величина  $\rho u (H + h) dy dt$ ,

а через грань AB выходит масса воды

$$\rho u (H + h) dy dt + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\rho u (H + h)] dx \right\} dy dt.$$

В этом выражении по сравнению с предыдущим добавляется член, описывающий приращение функции  $\rho u (H + h)$  при переходе от плоскости

### Рис. 24

$x$  к плоскости  $x + dx$ . Сама же величина  $\rho u (H + h)$ , как и в п. 1, имеет смысл потока массы (вещества).

Итак, при движении жидкости вдоль оси  $x$  в элементе грунта накапливается масса

$$-\frac{\partial}{\partial x} [\rho u (H + h)] dx dy dt.$$

Проводя аналогичные рассуждения для граней AD к BC, получаем изменение массы воды за счет ее движения вдоль оси  $y$ :

$$-\frac{\partial}{\partial y} [\rho \cdot v (H + h)] dx dy dt$$

Поскольку вдоль оси  $z$  в элемент грунта жидкость не втекает и не вытекает из него (снизу — подстилающий пласт, а через свободную поверхность нет потока вещества), то суммарное изменение массы воды в элементе грунта равно

$$-\left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\rho \cdot u (H + h)] + \frac{\partial}{\partial y} [\rho \cdot v (H + h)] \right\} dx dy dt \quad (5)$$

Общее количество жидкости в параллелепипеде равно его объему, умноженному на плотность  $\rho$  и на коэффициент пористости  $m < 1$  (так как часть объема занята грунтом):

$$m \rho (H + h) dx dy.$$

Изменение массы воды в элементе за время  $dt$ , очевидно, равно

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho \cdot m (H + h)] dx dy \right\} dt$$

Учитывая, что  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0, \dots \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , из последнего выражения получаем

$$m \rho \frac{\partial h}{\partial t} dx dy dt \quad (6)$$

и, приравнявая (5) к (6), приходим к уравнению неразрывности, выражающему закон сохранения массы в рассматриваемом процессе:

$$m \rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\rho \cdot u (H + h)] - \frac{\partial}{\partial y} [\rho \cdot v (H + h)] \quad (7)$$

В уравнении (7) скорость изменения рассматриваемой величины (в данном случае массы) со временем определяется дивергенцией потока этой величины — свойство, характерное для многих моделей, получаемых из законов сохранения.

С учетом того, что  $\frac{\partial \rho}{\partial x} \equiv 0, \dots \frac{\partial \rho}{\partial y} \equiv 0$ , уравнение (7)

переписывается в более простой форме:

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [u (H + h)] - \frac{\partial}{\partial y} [v (H + h)] \quad (8)$$

**4. Замыкание закона сохранения массы.** Уравнение (8)

содержит три неизвестных величины —  $h$ ,  $u$ ,  $v$ . Следовательно, для замыкания модели необходимо привлечь какие-то дополнительные соображения о характере процесса. Их дает полуэмпирический закон Дарси

$$u = -\mu \frac{\partial p}{\partial x} \quad v = -\mu \frac{\partial p}{\partial y} \quad (9)$$

где  $p(x, y, z, t)$  — давление в жидкости,  $\mu > 0$  — коэффициент, определяемый свойствами грунта. Согласно закону Дарси компоненты скорости течения жидкости пропорциональны соответствующим компонентам градиента давления. Заметим, что по своему физическому смыслу градиент давления — это сила (отнесенная к единице объема). В то же время по второму закону Ньютона действующая на тело сила пропорциональна его ускорению, а не скорости, как в законе Дарси. Однако данное противоречие кажущееся, так как при течении через грунт (фильтрации) жидкость преодолевает сопротивление его частиц, в отличие от свободного течения.

В формулах (9) используется новая неизвестная величина —  $p$  давление жидкости. Ее связь с уже введенными величинами нетрудно найти, приняв предположение о медленном и почти горизонтальном течении воды. Тогда динамической составляющей давления можно пренебречь и вычислять его по чисто гидростатическому закону как давление, создаваемое столбом жидкости:

$$p(x, y, z, t) = \rho g \{h(x, y, t) - z\} + \text{const},$$

где  $\text{const}$  — давление на поверхности жидкости (например, атмосферное),  $g$  — ускорение свободного падения.

Подставляя последнюю формулу в (9), получаем

$$u = -\mu \rho g \frac{\partial h}{\partial x}, \dots \dots \dots v = -\mu \rho g \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (10)$$

и, используя (10) в уравнении неразрывности (8), окончательно приходим к уравнению движения грунтовых вод

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left[ (H(x, y) + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + k \frac{\partial}{\partial y} \left[ (H(x, y) + h) \frac{\partial h}{\partial y} \right],$$

$$k = \frac{\mu \rho g}{m}.$$

или к уравнению Буссинеска, содержащему лишь одну неизвестную функцию  $h(x, y, t)$ .

### **5. О некоторых свойствах уравнения Буссинеска.**

Уравнение (11) нестационарное (искомая функция  $h$  зависит от  $t$ ), двумерное ( $h$  зависит от  $x$  и  $y$ ), относящееся к параболическому типу. Оно неоднородное, так как функция  $H$  зависит от  $x, y$ , и нелинейное, поскольку в его правой части присутствуют члены вида  $(hh_x)_x$  и  $(hh_y)_y$ . В сравнении с уравнением (1) уравнение Буссинеска — гораздо более сложный математический объект. В силу нелинейности его общее решение не может быть найдено аналитически, однако относительно нетрудно получить некоторые вполне содержательные частные решения, которые служат также тестами при разработке численных методов для уравнения (11).

Для построения завершенной модели движения грунтовых вод необходимо знать входные данные для уравнения (11): форму подстилающей



поверхности  $H(x, y)$ , коэффициент  $k$  и краевые условия, задающие функцию  $h$  в начальный момент времени и на границах пласта (и, быть может, в некоторых выделенных областях пласта, например, на артезианской скважине). Здесь отметим только, что простейшим вариантом формулировки краевых условий для уравнения (11) является задание лишь начального условия — функции  $h(x, y, t)$  в момент  $t = 0$ :

$$h(x, y, t = 0) = h_0(x, y), \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

Такая постановка отвечает задаче Коши для уравнения (11), решаемого, естественно, также в области  $-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$ . В задаче Коши по известному распределению уровня грунтовых вод  $h_0$  находится функция  $h$  для всех  $t > 0$ .

Рассмотрение пласта бесконечных размеров, конечно же, идеализация. Однако если изучается течение в небольшой центральной области пласта на относительно небольшом промежутке времени, то влиянием границ пласта можно пренебречь, и решение задачи Коши описывает вполне реальный процесс.

Отметим также, что некоторые краевые условия были фактически неявно введены в модель при выводе уравнения Буссинеска.

Предположение о непроницаемости пласта было использовано при получении уравнения баланса, а без предположения 5) о «зазоре» между поверхностью земли и поверхностью грунтовых вод (т. е. когда вся жидкость находится в пористой среде) нельзя было бы использовать закон Дарси во всей рассматриваемой области. Разумеется, выполнение этих и других предположений должно контролироваться при изучении данного объекта на основе построенной модели.

При введении дополнительных предположений общая модель упрощается. Так, если по каким-то причинам решение не зависит от времени  $t$  (стационарный процесс), то приходим к эллиптическому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ (H + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (H + h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] = 0 \quad (12)$$

для решения которого, естественно, не требуется задание функции  $h$  в начальный момент. В простейшем случае (12) превращается в уравнение Лапласа. Если подстилающая поверхность горизонтальна ( $H(x, y) = H_0 = \text{const}$ ), то уравнение Буссинеска становится однородным:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right) + k \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

При дополнительном предположении об одномерности течения, когда искомое решение зависит лишь от одной пространственной переменной, например, координаты  $x$ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (13)$$

называемому также *одномерным уравнением типа нелинейной теплопроводности* или одномерным уравнением изотермической фильтрации. Одномерными являются, например, течения в пластах, сильно

вытянутых по одному из направлений, так что изменением величин вдоль поперечного сечения пласта можно пренебречь (если через ограничивающие его в поперечных направлениях поверхности жидкость не протекает). Наконец, самая простая модель течения грунтовых вод дается *уравнением теплопроводности* (или *уравнением диффузии вещества*)

$$\frac{dh}{dt} = kH_0 \frac{d^2h}{dx^2}, \quad (14)$$

получаемым при условии  $h \ll H_0$ , т. е. для малых изменений уровня жидкости по сравнению с толщиной пласта.

Последние три уравнения относятся к параболическому типу, причем уравнение (14) линейное и существуют хорошо известные методы получения его общего решения. Разумеется, кроме перечисленных возможны и другие упрощения исходной модели, например двумерное уравнение (13). Из уравнения Буссинеска относительно нетрудно получить и более сложные модели, когда неверны некоторые из сформулированных в п. 2 предположений. В частности, во многих случаях грунт неоднороден, т. е.  $m = m(x, y)$ ,  $\mu = \mu(x, y)$ , и необходимо учитывать поступление жидкости в пласт в результате осадков. Тогда обобщение уравнения Буссинеска имеет вид

$$\frac{m(x, y)}{\rho g} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu(x, y)(H + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu(x, y)(H + h) \frac{\partial h}{\partial y} \right] + q(x, y, t) \quad (15)$$

где  $q(x, y, t)$  характеризует мощность осадков в точке  $x, y$  в момент времени  $t$ .

Итак, применение фундаментального закона сохранения массы позволило получить разнообразные модели рассматриваемых процессов. Различие между моделями определяется типом полученных уравнений (гиперболический, параболический, эллиптический), их пространственно-временными характеристиками (стационарное, нестационарное, одномерное, многомерное), наличием или отсутствием нелинейностей, а также постановкой краевых условий. Таким образом, в зависимости от конкретных свойств объекта и дополнительных предположений, основываясь на одном и том же фундаментальном законе, можно получить совершенно различные математические модели.

С другой стороны, как будет не раз показано в дальнейшем, одни и те же математические модели могут, в силу своей универсальности, отвечать объектам совершенно разной природы.

## § 2. Сохранение энергии

Закон сохранения энергии вместе с некоторыми дополнительными предположениями применим для построения моделей распространения тепла в сплошной среде. Сформулируем типичные краевые задачи для уравнений теплопередачи. Обсудим некоторые физические и математические свойства полученных моделей.

**1. Предварительные сведения о процессах теплопередачи.** Тепловая энергия, или тепло — это энергия хаотического движения атомов или молекул вещества. Обмен теплом между различными участками материала называется *теплопередачей*, а сами материалы, обладающие хорошо выраженным свойством теплопередачи, — *теплопроводными*. К ним относятся, например, металлы, в которых тепловая энергия переносится в основном свободными электронами, некоторые газы и т. д. Процессы передачи тепла рассматриваются в условиях так называемого *локального термодинамического равновесия* (ЛТР). Понятие ЛТР для газов вводится при  $\lambda \ll L$ , т. е. когда длина свободного пробега частиц вещества много меньше характерных размеров рассматриваемого объекта (*сплошная среда*). ЛТР подразумевает также, что процессы изучаются при временах, больших, чем  $\tau$  (время между столкновениями частиц), и на размерах, больших, чем  $\lambda$ . Тогда в областях вещества, размеры которых превосходят величину  $\lambda$  (но много меньше величины  $L$ ), устанавливается равновесие и для них можно ввести средние величины плотности, скорости теплового движения частиц и т. д. Эти локальные величины (разные в разных точках среды) при сформулированных предположениях находятся из равновесного максвелловского распределения частиц. К ним относится и *температура*  $T$ , определяющая среднюю кинетическую энергию частиц:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

где  $m$  — масса частицы,  $v$  — средняя скорость хаотического движения,  $k$  — постоянная Больцмана (в случае так называемого *больцмановского газа*). Связанная с хаотическим движением частиц энергия вещества (внутренняя энергия) определяется через температуру с помощью величины *удельной теплоемкости*  $c(\rho, T)$ , а именно

$$c(\rho, T) = \frac{\partial \varepsilon(\rho, T)}{\partial T}, \dots \dots c(\rho, T) > 0,$$

где  $\rho = mn$  — плотность вещества ( $n$  — число частиц в единице объема),  $\varepsilon(\rho, T)$  — *внутренняя энергия единицы массы*. Другим словами, теплоемкость — это энергия, которую надо сообщить единице массы вещества, чтобы увеличить его температуру на один градус.

Наиболее простое выражение для теплоемкости получается в случае идеального газа (газа, частицы которого взаимодействуют лишь при непосредственном столкновении и, подобно бильярдным шарам, без потери суммарной кинетической энергии). Если в некотором объеме идеального газа содержится  $N$  частиц, то их полная внутренняя энергия есть

$$E = N \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} NkT = \frac{3}{2} M \frac{k}{m} T$$

где  $M = Nm$  — суммарная масса частиц, а удельная внутренняя энергия, или энергия на единицу массы, дается формулой

$$\varepsilon = \frac{E}{M} = \frac{3}{2} \frac{k}{m} T$$

т. е. теплоемкость идеального газа равна  $3k/(2m)$  и не зависит от величин  $\rho$ ,  $T$ .

В общем случае связь между внутренней энергией и температурой более сложная. Например, помимо кинетической энергии движущихся частиц, внутренняя энергия содержит составляющую, связанную с потенциальной энергией их взаимодействия, зависящей от среднего расстояния  $r$  между ними. В свою очередь  $r \approx (n)^{-1/3} = (\rho/m)^{-1/3}$ , где  $n$  — число частиц в единице объема, т. е.  $\varepsilon$  зависит от плотности  $\rho$ .

Поэтому в теории теплопередачи величины  $\varepsilon$  (или, что то же самое,  $c$ ) являются, вообще говоря, функциями от  $\rho$  и  $T$ . Их конкретный вид определяется свойствами рассматриваемой среды.

**2. Вывод закона Фурье из молекулярно-кинетических представлений.** Для получения математической модели теплопередачи необходимо, помимо описанных в п. 1 понятий, ввести важное понятие *потока тепла*. Потокom тепла (или тепловой энергии) в данной точке называется количество тепла, переносимое в единицу времени через единичную поверхность, помещенную в данную точку вещества (ср. с понятием потока массы в § 1). Очевидно, что поток тепла — векторная величина (поскольку она в общем случае зависит от ориентации единичной поверхности в пространстве).

Выделим в среде точку с координатами  $x, y, z$  и вычислим компоненты потока  $W$  тепла по соответствующим осям (величины  $W_x, W_y, W_z$ ).

Расположим площадку единичной величины (штриховая линия на рис. 25) перпендикулярно оси  $x$ . Частицы, движущиеся вдоль оси  $x$ , пересекают ее справа налево и слева направо с равной вероятностью. Однако если температуры частиц ( $a$ , следовательно, и их кинетические энергии) разные по правую и левую стороны площадки, то в единицу времени через нее справа и слева переносятся разные энергии. Разность этих энергий и формирует поток тепла вдоль оси  $x$ .

Выделим на рис. 25 области, отстоящие на расстояние  $\lambda = v\tau$  от площадки справа и слева. Из частиц, находящихся в правой области, примерно  $1/6$  часть движется налево, так как все шесть направлений (вверх — вниз, вперед — назад, направо — налево) равновероятны. За время  $\tau$  эта часть частиц с необходимостью пересечет площадку и перенесет энергию, равную

**Рис. 25**

$$\frac{1}{6} n \lambda \frac{mv_n^2}{2},$$

где  $v_n$  — скорость частиц в правой области (величины  $n, \lambda$  считаются в первом приближении равными по обе стороны площадки). Аналогично, частицы из левой области переносят энергию

$$\frac{1}{6} n \lambda \frac{mv_l^2}{2}$$

где  $v_l$  — скорость частиц слева от площадки. Разность этих энергий, отнесенная к единице времени, представляет собой величину

$$W_x = \frac{1}{6} n v \left( \frac{m v_l^2}{2} - \frac{m v_n^2}{2} \right) = \frac{m n v}{6} (\varepsilon_l - \varepsilon_n),$$

где  $\varepsilon_l$ ,  $\varepsilon_n$  — внутренняя энергия вещества соответственно слева и справа от площадки, а в качестве  $v$  берется средняя между  $v_l$  и  $v_n$  скорость частиц. В первом приближении величины  $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_l$  можно выразить через величину  $\varepsilon$  (энергию в точке  $x$ ; т. е. на площадке) следующим образом:

$$\varepsilon_n = \varepsilon + \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \varepsilon + \lambda c \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \varepsilon_l = \varepsilon - \lambda \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \varepsilon - \lambda c \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Подставляя эти формулы в выражение для  $W_x$ , получаем

$$W_x = -\chi \frac{\partial T}{\partial x}, \dots \dots \dots \chi = \frac{\rho \cdot c \cdot \lambda \cdot v}{3} \quad (1)$$

Проводя такие же рассуждения для компонент  $W_y$ ,  $W_z$ , приходим к выражениям

$$W_y = -\chi \frac{\partial T}{\partial y}, \dots \dots \dots W_z = -\chi \frac{\partial T}{\partial z}. \quad (2)$$

Объединение (1) и (2) дает закон Фурье

$$W = -\chi \text{grad} T \quad (3)$$

Величина  $\chi$  называется *коэффициентом теплопроводности*.

Заметим, что коэффициент теплопроводности зависит в общем случае от плотности и температуры вещества:

$$\chi = \frac{\rho \cdot c \cdot \lambda \cdot v}{3} \geq 0, \quad (4)$$

поскольку не только теплоемкость  $c$ , но и длина свободного пробега  $\lambda$  также может быть функцией от  $\rho$ ,  $T$ . Так, например, в газе, находящемся в обычных условиях, тепло переносится молекулами (молекулярная теплопроводность). Для величины  $\lambda$  в этом случае справедливо  $\lambda \sim 1/\rho$ , а так как  $v \sim \sqrt{T}$ , то из (4) имеем  $\chi_m \sim \sqrt{T}$  (теплоемкость считается постоянной). В плазме (где основную роль в переносе тепла играют электроны) длина пробега электрона зависит от  $\rho$ ,  $T$ , так что  $\lambda \sim T^2 \rho^{-1}$  и для величины  $\chi_c$  справедливо  $\chi_c \sim T^{5/2}$  ( $c$  — постоянная).

Итак, закон Фурье гласит: поток тепла пропорционален градиенту температуры. Так как тепловая энергия непосредственно связана с температурой, то в определенном смысле можно считать, что «поток» температуры пропорционален градиенту самой температуры.

Совершенно таким же свойством обладает близкий по сущности процесс диффузии вещества (закон Фика). Аналогичную интерпретацию можно придать закону Дарси (10) из § 1, хотя движение грунтовых вод по своей природе принципиально отличается от процесса диффузии тепла (и закон Дарси не имеет столь относительно простого теоретического обоснования, как законы Фурье и Фика).

**3. Уравнение баланса тепла.** Применим закон сохранения энергии для математического описания процесса теплопередачи. Будем при этом считать, что внутренняя энергия вещества изменяется лишь благодаря механизму

теплопроводности, т. е. другие виды энергии полагаем несущественными (например, пренебрегаем изменением внутренней энергии за счет химических реакций или за счет работы сил давления, сжимающих некоторый объем газа, и т. д.).

Выделим в теплопроводной среде элементарный кубик со сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 26) и приведем подсчет изменения содержащейся в нем тепловой энергии за малый промежуток времени  $dt$ . По сделанным предположениям

**Рис. 26**

это изменение может быть вызвано лишь разностью потоков тепла, входящих и выходящих через разные грани кубика. Так, потоки вдоль оси  $x$  приводят к уменьшению или увеличению внутренней энергии объема на величину

$$[W_x(x, y, z, t) - W_x(x + dx, y, z, t)] dy dz dt,$$

где  $dy dz$  — площадь грани, перпендикулярной оси  $x$ . В этой формуле

считается, что  $W_x$  как функция времени не сильно изменяется за промежуток  $dt$ , и можно взять ее значение в момент  $t$ . Точно таким же образом

вычисляются изменения внутренней энергии по осям  $y$ ,  $z$ :

$$[W_y(x, y, z, t) - W_y(x, y + dy, z, t)] dx dz dt,$$

$$[W_z(x, y, z, t) - W_z(x, y, z + dz, t)] dx dy dt$$

Суммарное изменение энергии  $\Delta E = E(t + dt) - E(t)$  есть

$$\Delta E = - \operatorname{div} W dx dy dz dt.$$

С другой стороны, величину  $\Delta E$  можно выразить через изменение

температуры объема и через его теплоемкость по формуле

$$\Delta E = (T(t + dt) - T(t)) c(\rho, T) \rho dx dy dz,$$

в которой из-за малости объема берутся некоторые средние по нему значения температуры и плотности.

Приравнявая два последних выражения друг другу и устремляя  $dt$  к нулю, получаем общее уравнение, описывающее распространение тепла:

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(\chi \cdot \operatorname{grad} T) \quad (5)$$

имеющее в развернутой форме вид

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (6)$$

где  $C = \rho c$ .

Уравнение (6) — нестационарное, трехмерное (функция  $T$  зависит от времени  $t$  и трех пространственных переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) уравнение параболического типа. Оно неоднородное, так как теплоемкость, коэффициент теплопроводности и плотность могут быть, вообще говоря, разными в разных точках вещества, и нелинейное, поскольку функции  $c$  и  $\chi$  могут зависеть от температуры  $T$  (т. е. от искомого решения).

При дополнительных предположениях о характере процесса теплопередачи уравнение (6) может упрощаться. Так, если процесс стационарный, т. е.

температура не зависит от времени, то (6) превращается в уравнение эллиптического типа

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, \quad (7)$$

а если функции  $c$ ,  $\chi$  не зависят от температуры, то (6) становится линейным параболическим уравнением, которое в случае однородной среды ( $\chi$ ,  $c$ ,  $\rho$  не зависят от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_0 \Delta T, \quad (8)$$

где величина  $k_0 = \chi/C$  называется коэффициентом температуропроводности. Для уравнения (8) относительно нетрудно выписать общее решение.

В одномерном случае (температура зависит лишь от  $t$  и  $x$ ) из (6) получаем

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (9)$$

Уравнение (9) сводится к уравнению типа нелинейной теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (10)$$

при допущении, что  $\frac{\partial C}{\partial x} \equiv 0$ ,  $\frac{\partial \chi}{\partial x} \equiv 0$  (ср. с уравнением (13) из § 1). Наконец,

если  $\chi = \chi_0$ ,  $C = C_0$ , где  $\chi_0$ ,  $C_0$  — постоянные, то из (10) получается уравнение теплопроводности — простейшее уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (11)$$

Как и в случае уравнения Буссинеска, из основного уравнения (6) можно получить различные обобщения, соответствующие более сложным, чем рассмотренные выше, механизмам теплопередачи. Так, для неизотропной среды (т. е. когда коэффициенты теплопроводности разные по разным направлениям) с энерговыделением вместо (6) имеем

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + f(x, y, z, t, T), \quad (12)$$

где  $\chi_x$ ,  $\chi_y$ ,  $\chi_z$  — коэффициенты в законе Фурье (3) по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а функция  $f$  — мощность выделения (или поглощения) энергии.

Неизотропность, например, в случае электронной теплопроводности, может вызываться достаточно сильным магнитным полем, затрудняющим движение переносчиков тепла поперек силовых линий поля, а выделение энергии может быть связано с идущими в веществе химическими реакциями или протеканием электрического тока.

Все полученные в данном пункте уравнения выведены с помощью фундаментального закона сохранения энергии и закона Фурье (ср. с выводом уравнения Буссинеска в § 1). Вместе с заданными функциями  $c$ ,  $\chi$ ,  $\rho$  и краевыми условиями они представляют собой замкнутые математические модели процесса теплопередачи.

#### **4. Постановка типичных краевых условий для уравнения**

**теплопроводности.** Для простоты будем рассматривать одномерные процессы теплопроводности. Они имеют место, например, в длинном и

тонком металлическом стержне (рис. 27), нагреваемом с одного из торцов, при условии, что стержень изотропен, его начальная температура в любом поперечном сечении не зависит от  $y, z$  (это же свойство должно соблюдаться и на торцах стержня), а потерями тепла с боковой поверхности можно пренебречь. Будем считать также, что теплоемкость стержня постоянна. Тогда температура зависит только от  $x$  и  $t$ , и ее распределение вдоль стержня в различные моменты времени описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (13)$$

справедливым при  $0 < x < l, t > 0$ . Для определения функции  $T(x,t)$ , т. е. решения, достаточно задать начальную температуру стержня:

$$T(x,0) = T_0(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (14)$$

и знать температуру на концах стержня в любой момент времени:

$$T(0,t) = T_1(t), \quad T(l,t) = T_2(t), \quad t > 0. \quad (15)$$

Задача (13) (15) называется первой краевой задачей для параболического уравнения (13) на отрезке  $x \in [0,l]$ . Физически условие (15) соответствует тому, что на концах стержня с помощью каких-то внешних источников тепла поддерживается определенная температура, зависящая, вообще говоря, от времени.

Если же на торцах стержня задаются вместо (15) потоки тепла как функции времени:

$$-k(T(0,t)) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = W_1(t), \dots, k(T(l,t)) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = W_2(t), \dots, t > 0.$$

то такая задача называется *второй краевой задачей на отрезке*  $[0,l]$ .

Данная ситуация реализуется, например, когда торцы стержня нагреваются лучами лазерного света известной мощности.

Более сложный (нелинейный) вариант условий на торцах отвечает сильно нагретому и поэтому излучающему энергию стержню, не контактирующему с какими-либо телами. Тогда в единицу времени стержень теряет на своих границах (торцах) энергию, равную  $\sigma T^4(0,t)$  и  $\sigma T^4(l,t)$  соответственно, и вместо (15) или (16) получаются условия

$$\sigma T^4(0,t) = k(T(0,t)) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0}, \dots, \sigma T^4(l,t) = k(T(l,t)) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l}, \quad (17)$$

$t > 0$ ,

где  $\sigma > 0$ .

Возможны также и иные виды краевых условий, соответствующие иным физическим ситуациям. Разумеется, допустимы различные комбинации условий (15)—(17), например, на левом конце известна температура, а на правом поток тепла, и т. д.

Разнообразие постановок краевых условий для уравнений теплопередачи связано и с различными идеализациями исходной задачи (13)—(15). При анализе распространения тепла около одного из торцов длинного стержня в течение сравнительно короткого времени влиянием другого торца можно пренебречь. Вместо (15) достаточно задать лишь одно из условий (для определенности на левом конце):



$$T(0,t) = T_1(t) \quad t > 0, \quad (18)$$

и решать уравнение в области  $x > 0$  ((13), (14), (18) – первая краевая задача в полупространстве).

Обсуждавшаяся уже на примере уравнения Буссинеска задача Коши рассматривается во всем пространстве  $-\infty < x < \infty$ . Для уравнения (13) задается лишь начальное распределение температуры (14). Такая постановка вполне разумна, когда рассматриваются процессы в центральной части стержня и влияние обоих торцов можно считать несущественным.

Для многомерных уравнений теплопроводности постановка краевых условий по сравнению с одномерным случаем существенно не меняется: на границах области задаются либо температура, либо поток тепла, либо какие-то более сложные их комбинации, а также (в момент  $t = 0$ ) начальное распределение температуры. Заметим, что в случае стационарного уравнения (7) задаются лишь граничные условия. Краевые условия для уравнения движения грунтовых вод из § 1 вполне аналогичны описанным в этом пункте (при этом аналогами температуры и потока тепла в уравнении Буссинеска служат уровень грунтовых вод и поток массы).

**5. Об особенностях моделей теплопередачи.** Наиболее простая из всех обсуждавшихся выше задач теплопроводности — задача о стационарном процессе для уравнения (11) на отрезке  $[0, l]$ :

$$k_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \quad T(0) = T_1, \quad T(l) = T_2.$$

Ее решение — линейная функция координаты  $x$ :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{l} x + T_1, \dots \dots \dots 0 < x < l. \quad (19)$$

Решение (19) имеет вполне очевидный физический смысл.

Действительно, при стационарном процессе потоки тепла, входящие в любое поперечное сечение стержня и выходящие из него, равны (иначе температура в сечении менялась бы). Поэтому поток должен быть постоянен в любой точке  $x$ , что по закону Фурье (3) при  $\chi = \chi_0 = \text{const}$  возможно лишь при линейном «профиле» температуры.

Вместе с тем применение закона Фурье приводит к появлению одного не имеющего физического смысла эффекта, характерного для уравнений параболического типа. Поясним его, рассмотрев для уравнения (11), решаемого во всем пространстве  $-\infty < x < \infty$ , задачу о так называемом мгновенном точечном источнике тепла. Требуется найти распределение температуры при всех  $t > 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ , вызванное выделением в момент  $t = 0$  в плоскости  $x = 0$  некоторого количества тепла  $Q_0$ . Начальная температура считается равной нулю:

$T(x, 0) = T_0(x) = 0$ ,  $-\infty < x < \infty$ . Такая постановка — идеализация реального процесса, справедливая при выполнении соответствующих условий (например, по центру холодного стержня пропускается мощный поперечный импульс электрического тока, действующего очень короткое время и затрагивающего малый участок металла). Решение поставленной таким образом задачи дается формулой

$$T(x,t) = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi k_0 t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4k_0 t}\right), \dots\dots t > 0, \dots\dots C \equiv 1 \quad (20)$$

что проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (11). Симметричная функция (20) в силу известного равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

обладает свойством

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(x,t) dx = Q_0, \dots\dots t > 0,$$

так что закон сохранения энергии выполняется. В то же время согласно (20) температура в любой точке пространства в любой момент  $t > 0$  отлична от нуля. Тем самым модель (11) и многие другие модели теплопередачи описывают процессы с бесконечной скоростью распространения возмущений (температура при  $t = 0$  была нулевой для всех  $x$ ).

Этого недостатка лишены (но лишь при определенных условиях) уравнения типа нелинейной теплопроводности (10) (в частности, уравнение (13) § 1). Для модели (10) с  $k(T) = k_0 T^\sigma$ ,  $\sigma > 0$  рассмотрим процесс распространения тепла в полупространство  $x > 0$  при заданной на границе температуре:

$T(0,t) = T_1(t)$ . Начальная температура среды считается нулевой:

$T(x,0) = T_0(x) = 0$ ,  $x \geq 0$ . Частное решение этой задачи, отвечающее граничному закону

$$T_1(t) = \left(\frac{\sigma \cdot D^2}{k_0} t\right)^{1/\sigma}, \dots\dots t > 0,$$

имеет вид бегущей волны (ср. с решением (4) § 1), распространяющейся от границы вглубь вещества не с бесконечной, а с конечной скоростью  $D > 0$  (рис. 28):

$$T(x,t) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma D}{k_0}\right)^{1/\sigma} (Dt - x)^{1/\sigma}, \dots\dots x \leq Dt, \\ 0, \dots\dots x > Dt \end{cases} \quad (21)$$

Однако это свойство реализуется лишь при распространении тепла в холодную среду и теряется в случае отличной от нуля начальной температуры вещества.

Описанный дефект, связанный с неприменимостью закона Фурье (и закона Дарси в случае уравнения Буссинеска) в окрестности фронта распространения тепловой энергии, не препятствует широкому применению параболических уравнений (из (20) видно, что доля энергии, содержащейся в веществе при достаточно больших значениях  $x$ , ничтожно мала в сравнении с полной энергией  $Q_0$ ). Они служат хорошим примером универсальности математических моделей, описывая большое количество разнообразных процессов имеющих принципиально разную природу.

### § 3. Сохранение числа частиц

Введем некоторые понятия теории теплового излучения, переносимого в среде световыми квантами. Закон сохранения числа квантов используем для получения кинетического уравнения, которому подчиняется функция распределения фотонов. Обсудим некоторые свойства построенной модели лучистого теплообмена в веществе.

**1. Основные понятия теории теплового излучения.** В веществе, нагретом до достаточно высокой температуры, большую роль играют процессы переноса энергии световыми квантами (фотонами).

Распространяясь в среде, рассеиваясь и поглощаясь на атомах и молекулах вещества, а также испускаясь ими, фотоны обеспечивают лучистый теплообмен между различными участками среды. Благодаря именно этому механизму горящий камин нагревает воздух в помещении.

Поле излучения, заполняющее пространство, можно рассматривать как электромагнитное излучение с частотой колебаний  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$ , связанными через скорость света  $c$  ( $\lambda = c/\nu$ ). Если же говорить о поле излучения как о совокупности большого числа частиц — световых квантов, то необходимо ввести понятие энергии кванта  $h\nu$  ( $h$  — постоянная Планка), движущегося со скоростью  $c$ . В отличие от поля температур, характеризуемого координатами  $x, y, z$  и временем  $t$ , для описания излучения важно знать также его частоту  $\nu$  (вообще говоря, разную для разных квантов) и направление движения квантов в любой точке пространства в любой момент  $t$ .

Проследить траекторию каждого из огромного числа фотонов в веществе попросту невозможно. Поэтому в теории излучения используется статистический вероятностный подход, основанный на введении *функции распределения частиц*. Это важное понятие успешно используется для изучения совокупности большого числа частиц или иных объектов в различных областях знания.

Функция распределения фотонов  $f = f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ , зависит от частоты квантов, радиуса-вектора  $\vec{r}$  (т. е. от координат  $x, y, z$ ), направления движения частиц  $\vec{\Omega}$  и времени  $t$ . Ее смысл состоит в следующем. Рассмотрим в некоторый момент времени  $t$  элемент объема  $d\vec{r}$  около точки  $\vec{r}$  (рис. 29). Тогда величина

$$f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\nu \cdot d\vec{r} \cdot d\vec{\Omega} \quad (1)$$

#### Рис. 29

по определению — это число квантов, находящихся в спектральном интервале  $(\nu, \nu + d\nu)$  (т. е. их частота лежит между значениями  $\nu$  и  $\nu + d\nu$ ), занимающих объем  $d\vec{r}$  и имеющих направление движения в диапазоне от  $\vec{\Omega}$  до  $\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}$  ( $\vec{\Omega}$  - единичный вектор). Размер объема  $d\vec{r}$  предполагается гораздо больше длины волны  $\lambda$ , так что волновые эффекты несущественны.

Функция распределения (1) — одно из исходных понятий теории лучистого теплообмена, с помощью которого вводятся и вычисляются все остальные характеристики, описывающие этот процесс. Величина  $I_\nu$  определяемая по формуле

$$I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = h \cdot \nu \cdot c \cdot f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t) \quad (2)$$

называется *спектральной интенсивностью излучения*. Она представляет собой количество лучистой энергии в спектральном интервале от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$  переносимое фотонами за единицу времени через единичную площадку, помещенную в точке  $\vec{r}$  и перпендикулярную к направлениям их полета (которые лежат в диапазоне углов от  $\vec{\Omega}$  до  $\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}$  рис. 30).

**Рис. 30**

Действительно, так как энергия кванта равна  $h\nu$ , а общее число квантов с частотой от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$  и с направлением полета от  $\vec{\Omega}$  до  $\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}$  в единице объема равно  $f d\nu d\vec{\Omega}$ , то переносимая ими за 1 с через расположенную перпендикулярно полету площадку в 1 см<sup>2</sup> энергия равна  $h\nu c f d\nu d\vec{\Omega}$ , что согласуется с определением (2).

*Спектральная плотность* излучения

$$U_\nu(\vec{r}, t) = h\nu \int_{4\pi} f d\vec{\Omega} = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu d\vec{\Omega} \quad (3)$$

представляет собой количество лучистой энергии квантов, содержащихся в 1 см<sup>3</sup> пространства в точке  $\vec{r}$  в момент  $t$  в единичном интервале частот и имеющих частоту  $\nu$ .

Еще одной важной характеристикой служит *спектральный поток* излучения  $S_\nu$ . Фотоны, пересекающие единичную площадку с направлением нормали  $\vec{n}$ , переносят через нее энергию (в 1 с в интервале от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ ) равную

$$h \cdot \nu \cdot c \cdot \int_{2\pi} f \cos\theta \cdot d\vec{\Omega} \quad (\text{рис. 31}).$$

Аналогично вычисляется энергия, распространяющаяся через площадку справа налево, но интегрирование ведется по левой полусфере. Их разность и дает величину  $S_\nu$ :

$$S_\nu(\vec{r}, t, \vec{n}) = h \cdot \nu \cdot c \cdot \int_{4\pi} f \cos\theta \cdot d\vec{\Omega}, \quad (4)$$

**Рис. 31**

где  $\theta$  — угол между направлением движения квантов и нормалью. Величина  $S_\nu$  — проекция вектора  $S_\nu$  на нормаль  $\vec{n}$ , а сам вектор есть

$$\vec{S}_\nu = \int_{4\pi} I_\nu \vec{\Omega} d\vec{\Omega}. \quad (5)$$

Заметим, что при изотропном (не зависящем от направления  $\vec{\Omega}$ ) излучении спектральная плотность, как следует из (3), равна

$$U_\nu = 4\pi \cdot h \cdot \nu \cdot f$$

а из (5) видно, что поток  $\vec{S}_\nu$  равен нулю в любой точке пространства.

Полные интенсивность, плотность и поток излучения можно получить из спектральных характеристик интегрированием по всему спектру частот  $\nu$ .

**2. Уравнение баланса числа фотонов в среде.** Выведем уравнение, описывающее перенос излучения в среде, пользуясь законом сохранения числа частиц и следующими предположениями:

1) процесс распространения квантов одномерный, т. е.

$$f = f(\nu, x, \vec{\Omega}, t);$$

2) рассеянием квантов света на атомах или молекулах (т. е. изменением их

направления) можно пренебречь;

3) известен характер поглощения и испускания света атомами и молекулами вещества;

4) фотоны самопроизвольно не исчезают и не появляются.

Рассмотрим баланс частиц в элементарном цилиндре, имеющем ось в направлении  $\vec{\Omega}$ , длину  $ds = dx / \cos\theta$  и основание  $d\sigma$  (рис. 32), где

$\Theta$  - угол между осью  $x$  и вектором  $\vec{\Omega}$ . Будем интересоваться излучением частоты  $\nu$  в единичном интервале частот, распространяющимся внутри единичного телесного угла в направлении  $\vec{\Omega}$ .

**Рис. 32**

В соответствии с (1) (см. также определение (2)) за время  $dt$  в левое основание цилиндра входит число частиц, равное

$$cf(\nu, x, \vec{\Omega}, t) \cdot d\sigma \cdot dt.$$

За то же время из его правого основания выходит число частиц

$$(cf(\nu, x, \vec{\Omega}, t) + cdf) d\sigma \cdot dt$$

где величина  $df$  описывает приращение функции  $f$  при переходе от одного основания к другому. Поскольку  $f = f(\nu, x, \vec{\Omega}, t)$ , то эту величину можно представить в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial s} ds, \dots \dots ds = \frac{dx}{\cos\theta},$$

где первое слагаемое отвечает ее приращению по времени за промежуток  $dt$ , а второе — приращению по координате  $s$ .

Учитывая, что скорость фотонов равна  $c$  и  $dt = ds/c$ , получаем

$$df = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} \right) ds.$$

Итак, число фотонов в цилиндре за время  $dt$  изменилось на величину

$$-\left( \frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial s} \right) ds \cdot d\sigma \cdot dt = -\left( \frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} \right) ds \cdot d\sigma \cdot dt \quad (6)$$

Напомним, что через боковую поверхность цилиндра фотоны, имеющие направление полета  $\vec{\Omega}$  и не претерпевающие рассеяния, не пролетают.

Таким образом, изменение числа квантов в объеме цилиндра может вызываться лишь их поглощением или испусканием атомами и молекулами вещества, находящегося внутри цилиндра. Для вычисления этой величины вводится понятие *равновесного излучения*, когда число квантов, поглощенных веществом, равно числу испущенных частиц (излучение и вещество находятся в равновесии) в любой момент времени. Равновесная функция распределения  $f_p$  есть (*закон Планка*)

$$f_p = \frac{2\nu^2}{c^3} \exp\left(1 - \frac{h\nu}{kT}\right), \quad (7)$$

где  $T$  — температура вещества (считается, что среда находится в условиях локального термодинамического равновесия, и в любой ее точке можно ввести такие характеристики, как температура, внутренняя энергия и т. д.).

В отсутствие равновесия между излучением и веществом интенсивность поглощения (испускания) фотонов пропорциональна разности между  $f_p$  и  $f$ , т. е. величине

$$\chi_v c (f - f_p),$$

где  $\chi_v = \chi'_v \left(1 - \exp \frac{h\nu}{kT}\right)$ , а  $\chi'_v$  - коэффициент поглощения, определяемый

состоянием среды и ее свойствами. Изменение числа квантов в объеме цилиндра за время  $dt$  равно

$$\chi_v (f - f_p) d\sigma \cdot ds \cdot dt \quad (8)$$

Приравнявая (6) и (8), получаем для функции распределения кинетическое уравнение, описывающее перенос излучения в среде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cdot \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} = \chi_v (f_p - f), \quad (9)$$

где  $f_p$  задается формулой (7). Уравнение (9) вместе с функциями  $f_p, \chi'_v$  и краевыми условиями представляет собой замкнутую модель распространения лучистой энергии при сделанных выше предположениях.

### **3. Некоторые свойства уравнения переноса излучения.**

Полученное на основании закона сохранения числа частиц нестационарное одномерное неоднородное гиперболическое уравнение (9) может быть обосновано также и с помощью закона сохранения энергии.

Действительно, в цилиндре рассматривался баланс частиц, имеющих одинаковую частоту  $\nu$  и, следовательно, одинаковую энергию  $h\nu$ .

Учитывая это, (9) легко переписать как уравнение относительно спектральной интенсивности излучения  $I_\nu = h \cdot c \cdot \nu \cdot f$ :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial x} = \chi_\nu (I_{\nu,p} - I_\nu) \quad (10)$$

которое эквивалентно (9), но имеет более непосредственный физический смысл.

При интегрировании (10) по телесному углу  $\bar{\Omega}$  (т. е. по всем направлениям полета квантов) получаем уравнение, связывающее плотность излучения (3) и его поток (4):

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \frac{\partial S_\nu}{\partial x} = c \chi_\nu (U_{\nu,p} - U_\nu) \quad (11)$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение неразрывности для излучения данной частоты, выражающее закон сохранения излучения и вполне аналогичное уравнению (7) § 1 в теории движения грунтовых вод и уравнению (5) § 2 в теории теплопроводности. Наиболее очевидна эта аналогия в трехмерном случае, когда уравнения (10) и (11) принимают вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \bar{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = \chi_\nu (I_{\nu,p} - I_\nu), \quad (12)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \text{div} \bar{S}_\nu = c \cdot \chi_\nu (U_{\nu,p} - U_\nu), \quad (13)$$

Хотя уравнения (9)-(13) линейные, нельзя, вообще говоря, утверждать, что модели лучистого теплообмена проще нелинейных моделей, рассмотренных

в § 1,2. Ведь, решая (9)-(13) можно получать каждый раз лишь спектральные (т. е. для данной частоты  $\nu$ ) характеристики излучения, распространяющегося в заданном направлении  $\vec{\Omega}$ . Для полной картины необходимо найти нужные величины для всех значений  $\nu, \vec{\Omega}$  (или какие-то интегралы от них), что является гораздо более трудной задачей. К тому же в более сложных ситуациях (наличие рассеивания фотонов и т. д.) сами модели (9)- (13) могут значительно усложняться.

Наиболее простая модель переноса излучения получается из (10), если поглощением и испусканием квантов можно пренебречь и рассматривать случай, когда все частицы движутся в одном направлении. Тогда для любых значений  $\nu$  можно положить  $\cos \theta = 1$  и прийти к уравнению

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial x} = 0,$$

полностью идентичному уравнению (3) § 1 для потока невзаимодействующих материальных частиц.

Если интенсивность излучения не зависит от времени, то (10) превращается в неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$\cos \theta \frac{dI_\nu}{dx} + \chi_\nu I_\nu = \chi_\nu I_{\nu,p} \quad (14)$$

общее решение которого имеет вид

$$I_\nu(x) = \int_{x_0}^x \chi_\nu I_{\nu,p} e^{-\chi(x')} dx' + I_{\nu_0} e^{-\chi(x_0)} \quad (15)$$

Здесь  $\chi(x') = \int_{x'}^x \chi_\nu dx''$ , .....  $\chi(x_0) = \int_{x_0}^x \chi_\nu dx''$ , (для простоты в (15) положено  $\cos \theta = 1$ ),

$I_{\nu_0}$  - постоянная интегрирования.

Не останавливаясь подробно на физическом смысле решения (15), поясним, что первый член обязан своим происхождением излучению, возникшему в веществе на отрезке от  $x_0$  до  $x$  (и ослабленному поглощением). Второе слагаемое представляет собой излучение от каких-то внешних источников, входящих в вещество на его границе  $x_0$  (и также ослабленное поглощением по мере распространения по среде).

Если  $I_{\nu,p}$  и  $\chi_\nu$  — известные функции координаты  $x$  (для этого должны быть известны температура и плотность вещества вдоль траектории частиц), то решение уравнения (14) сводится к квадратуре.

В противоположном рассмотренному случае пространственно однородного поля излучения из (10) получаем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} = \chi_\nu (I_{\nu,p} - I_\nu) \quad (16)$$

Процесс, описываемый уравнением (16), соответствует ситуации, когда в неограниченной и первоначально холодной среде (т. е. в момент  $t = 0$  излучения нет) с постоянной плотностью происходит быстрый нагрев вещества до некоторой температуры  $T$ , которая затем поддерживается неизменной во времени. Поскольку потерь излучения с границ нет, то

пространственные градиенты  $T$  равны нулю и  $\chi_v, I_{vp}$  не зависят от  $x, y, z$ .  
Возникшее в результате нагрева излучение также имеет нулевой градиент  
(т. е.  $I_v = I_v(t)$ ) и, обмениваясь энергией с веществом, стремится с течением  
времени к равновесному значению по экспоненциальному закону.