

Міністерство освіти і науки України  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

**П. П. Лошицький**  
**М. О. Ніколов**

# **Моделювання біофізичних процесів. Вступ до синергетики**

**Навчальний посібник**

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України  
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів,  
які навчаються за напрямом підготовки  
«Мікро- та наноелектроніка»*

Київ  
НТУУ «КПІ»  
2014

УДК 577.3(075.8)+536.755(075.8)  
ББК 14я73+28.071в.я73  
Л81

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки,  
молоді та спорту України  
(Лист № 1/11-1287 від 01.02.2012 р.)*

Рецензенти: *Е. Г. Азнакаєв*, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
Національний авіаційний університет

*О. В. Чалий*, чл.-кор. НАПН України, д-р фіз.-мат. наук, проф.,  
Національний медичний університет  
ім. О. О. Богомольця

*В. Е. Орел*, д-р біол. наук, проф.,  
Національний інститут раку

Відповідальний редактор *В. І. Тимофєєв*, д-р техн. наук, проф.,  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут»

### **Лошицький П. П.**

Л81      Моделювання біофізичних процесів. Вступ до синергетики  
[Текст] : навч. посіб. / П. П. Лошицький, М. О. Ніколов. – К. :  
НТУУ «КПІ», 2014. – 412 с. – Бібліогр. : с. 403–411. – 200 пр.

**ISBN 978-966-622-614-6**

Викладено основні положення математичного моделювання на прикладі біофізичних явищ і процесів, зокрема складних кооперативних явищ, що приводять до самоорганізації систем.

Розглянуто методи дослідження нелінійних динамічних систем, які застосовано для вирішення завдань, що полягають у самоорганізації систем. Наведено відповіді на завдання, які подано в кінці розділів. Окрім того, розглянуто відомості з розділів математики, потрібні для вивчення і розуміння відповідної теми без залучення додаткової математичної літератури.

Для студентів, інженерів і медичних працівників, що спеціалізуються в галузі біомедичної інженерії.

**УДК 577.3(075.8)+536.755(075.8)**  
**ББК 14я73+28.071в.я73**

ISBN 978-966-622-614-6

© П. П. Лошицький,  
М. О. Ніколов, 2014  
© НТУУ «КПІ» (ФЕЛ), 2014

# Зміст

<b>ПЕРЕДМОВА</b> .....	7
<b>ВСТУП</b> .....	9
<b>ЧАСТИНА ПЕРША</b>	
<b>Розділ 1. ВСТУП ДО КІНЕТИКИ ОРГАНІЧНИХ РЕАКЦІЙ</b> .....	<b>31</b>
1.1. Основні кінетичні закони.....	31
1.2. Аналіз кінетичних результатів.....	35
1.2.1. Диференціальний метод.....	36
1.2.2. Інтегральний метод.....	37
Завдання.....	39
<b>Розділ 2. НАЙПРОСТІШІ ФЕРМЕНТНІ ПРОЦЕСИ</b> .....	<b>40</b>
2.1. Система кінетичних рівнянь.....	40
Завдання.....	43
<b>Розділ 3. ТОПОЛОГІЧНІ МЕТОДИ І ГРАФІЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ</b> .....	<b>44</b>
3.1. Інтегральні криві рівнянь другого порядку.....	44
3.2. Класифікація особливих точок.....	44
3.3. Метод ізоклін.....	46
3.4. Приклади застосування методу ізоклін.....	46
Завдання.....	50
<b>Розділ 4. ФАЗОВИЙ ПОРТРЕТ</b> .....	<b>53</b>
4.1. Маятник. Основні співвідношення.....	53
4.2. Фазовий портрет маятника.....	54
4.3. Солітонні розв'язки на сепаратрисі.....	56
4.4. Метод послідовних наближень.....	60
Завдання.....	63
<b>Розділ 5. БІФУРКАЦІЇ</b> .....	<b>64</b>
5.1. Біфуркація у простій дисипативній системі.....	64
5.2. Моделі пульсації серця і нервового імпульсу.....	67
5.3. Біфуркації динамічних систем другого порядку.....	75
Завдання.....	78
<b>Розділ 6. ДИНАМІКА ХІМІЧНОГО РЕАКТОРА</b> .....	<b>79</b>
6.1. Модель хімічного реактора.....	79
Завдання.....	91
<b>Розділ 7. МОДЕЛІ РОСТУ КЛІТИННИХ ПОПУЛЯЦІЙ</b> .....	<b>92</b>
7.1. Побудова моделей.....	92
7.2. Проточні культури мікроорганізмів.....	95
Завдання.....	98
<b>Розділ 8. ЕКОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ</b> .....	<b>99</b>
8.1. Експоненціальний та логістичний ріст популяції.....	99
8.2. Рівняння Вольтерра. Система хижак–жертва.....	101
Завдання.....	103

<b>Розділ 9. ПОРОГОВІ ЯВИЩА .....</b>	<b>104</b>
9.1. Рівняння, які описують стан імунної системи .....	105
Завдання .....	106

## ЧАСТИНА ДРУГА

<b>Розділ 10. СИСТЕМИ З ХІМІЧНИМИ РЕАКЦІЯМИ ТА ДИФУЗІЄЮ .....</b>	<b>107</b>
10.1. Відкриті системи в умовах механічної рівноваги .....	107
10.2. Рівняння балансу маси.....	108
10.3. Постановка завдання.....	111
10.4. Стійкість за Ляпуновим.....	113
10.5. Орбітальна стійкість.....	114
10.6. Структурна стійкість.....	116
Завдання .....	117
<b>Розділ 11. АВТОКАТАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ.....</b>	<b>118</b>
11.1. Автоколивальні системи .....	118
11.2. Тримолекулярна модель (брюсселятор) .....	122
11.3. Безрозмірні змінні, стаціонарні стани і граничні умови .....	124
11.4. Лінійний аналіз стійкості.....	125
11.5. Загальна схема біфуркації стаціонарних дисипативних структур.....	134
11.6. Біфуркація за фіксованих граничних умов .....	137
11.7. Якісні властивості дисипативних структур в околі першої біфуркації.....	142
11.8. Послідовні нестійкості та вторинні біфуркації.....	147
11.9. Порівняння з результатами числового моделювання..	152
11.10. Висновки.....	155
Завдання .....	155
<b>Розділ 12. ДЕТЕРМІНОВАНИЙ ХАОС .....</b>	<b>156</b>
12.1. Термін «хаос».....	156
12.2. Топологічні різноманіття та фрактали .....	157
12.3. Неінтегровані консервативні системи: нова механіка.	164
12.4. Модель нестійкого руху: підкова .....	169
12.5. Дисипативні системи. ....	171
12.6. Модель Лоренца.....	172
12.7. Системи, що приводять до моделі Лоренца.....	175
12.7.1. Конвекція в замкненій петлі та водяне колесо	175
12.8. Динаміка системи Лоренца .....	178
12.8.1. Результати числового розв'язання рівнянь Лоренца .....	178
12.8.2. Аналітичне дослідження рівнянь Лоренца.....	178
Завдання .....	187

<b>Розділ 13. ФРАКТАЛИ .....</b>	<b>188</b>
13.1. Поняття «фрактал» .....	188
13.2. Класифікація фракталів.....	189
13.2.1. Геометричні фрактали .....	189
13.2.2. Алгебраїчні фрактали .....	190
13.2.3. Стохастичні фрактали.....	192
13.2.4. Самоподібність і фрактальна розмірність.....	193
13.3. Довжина берегової лінії. Периметри фракталів .....	197
13.4. Фрактали та самоорганізація в природі.....	201
<b>Розділ 14. ЗАСТОСУВАННЯ ФРАКТАЛІВ</b>	
<b>У МЕДИЧНІЙ ІНЖЕНЕРІЇ .....</b>	<b>204</b>
14.1. Формалізація ознак просторово-часового хаосу медичного зображення .....	204
14.2. Параметр розходження.....	205
14.3. Параметри асиметрії.....	209
14.3.1. Асиметрія тіла матки .....	209
14.3.2. Асиметрія новоутворення.....	211
14.4. Оцінювання гетерогенності .....	213
14.4.1. Статистичні показники.....	213
14.4.2. Автокореляційний аналіз.....	214
14.5. Фрактальний аналіз.....	214
14.5.1. Фрактальна розмірність.....	215
14.5.2. Yardstick-метод .....	216
14.5.3. Метод Vox-counting .....	220
Завдання .....	223
<b>Розділ 15. САМООРГАНІЗОВАНА КРИТИЧНІСТЬ .....</b>	<b>224</b>
<b>Розділ 16. СТОХАСТИЧНІ МЕТОДИ .....</b>	<b>233</b>
16.1. Флуктуації в реальних вимірюваннях .....	233
16.2. Особливості стохастичного опису .....	234
16.3. Закон великих чисел.....	236
16.4. Марковські процеси.....	238
16.5. Граничний випадок рівноваги.....	242
16.6. Флуктуації в нерівноважних системах.....	246
<b>Розділ 17. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ.....</b>	<b>248</b>
17.1. Ймовірна модель експерименту зі скінченною кількістю результатів.....	248
17.2. Деякі класичні моделі та розподілення.....	250
17.3. Умовні ймовірності. Незалежність.....	253
17.4. Випадкові величини та їх характеристики .....	255
17.5. Нерівність Чебишева.....	258
17.6. Розподіл Пуассона .....	259
17.7. Гаусівський розподіл імовірностей .....	260
17.8. Ланцюги Маркова .....	262
Завдання .....	263

<b>Розділ 18. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ .....</b>	<b>264</b>
18.1. Основні поняття.....	264
18.2. Броунівський рух: вінерівський процес .....	265
18.3. Кінетичне рівняння.....	268
18.4. Кола Маркова .....	269
18.5. Дифузійні процеси .....	271
18.6. Стаціонарні випадкові процеси .....	273
18.7. Випадкові процеси в лінійних системах.....	276
<b>Розділ 19. СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ..</b>	<b>277</b>
19.1. Використання білого шуму .....	277
19.1.1. Стохастичні інтеграли.....	278
19.1.2. Стохастичні інтеграли та диференціали .....	280
19.1.3. Визначення стохастичного інтеграла.....	281
19.1.4. Обчислення одного стохастичного інтеграла.....	282
19.1.5. Інтеграл вінерівського процесу.....	285
19.2. Інтеграл Іто .....	288
19.3. Стохастичні диференціальні рівняння Іто.....	291
19.4. Стохастичний інтеграл Стратоновича.....	294
<b>Розділ 20. СТОХАСТИЧНИЙ РЕЗОНАНС .....</b>	<b>298</b>
20.1. Визначення стохастичного резонансу .....	298
20.2. Фізичні основи ефекту стохастичного резонансу .....	299
20.3. Теоретичні підходи .....	301
20.4. Теорія лінійного відгуку.....	302
20.5. Стохастичний резонанс як фундаментальний пороговий ефект .....	307
20.6. Стохастичний резонанс і обробка інформації живими організмами.....	310
Завдання .....	314
<b>Розділ 21. ІНДУКОВАНІ ШУМОМ ПЕРЕХОДИ.....</b>	<b>315</b>
21.1. Загальні положення.....	315
21.2. Стаціонарне розв'язання рівняння Фоккера–Планка.....	316
21.3. Адитивний і малий мультиплікативний шум в околі детерміністичної поведінки .....	318
21.4. Системи Ферхюльста в середовищі з білим шумом .....	321
21.5. Модель хижаків із двома станами.....	325
Завдання .....	329
<b>ДОДАТКИ. ВІДПОВІДІ ТА РОЗВ'ЯЗКИ .....</b>	<b>330</b>
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .....</b>	<b>403</b>

## Передмова

Одним із найбільш вражаючих явищ навколишнього світу є спонтанне утворення високоупорядкованих структур із зародків або з хаосу. Подібні явища спостерігаються не лише в живому світі, а й у простих системах неживого світу. Процеси самоорганізації виявляються багато у чому схожими для різноманітних систем. Спонтанне виникнення часових, просторових, просторово-часових структур відбувається за участі великої кількості об'єктів, які взаємодіють разом, кооперативно. Саме тому науковий напрям, який вивчає утворення структур у результаті кооперативної дії, називають синергетикою. Синергетика стала не просто «модною», а необхідною під час вивчення будь-яких складних систем, зокрема і штучних. Для розуміння загальних закономірностей процесів самоорганізації доводиться використовувати достатньо складний математичний апарат, тому більша частина літератури, що присвячена синергетиці (зокрема й класична книга Г. Хакена «Синергетика»), потребує детального вивчення розділів вищої математики, які не входять у загальні курси інженерних спеціальностей, що створює труднощі для багатьох неспеціалістів, а особливо для тих, хто займається прикладними науками. Тому в навчальному посібнику, який був би доступний студентам різних спеціальностей, відчувається гостра потреба.

Запропонований навчальний посібник є спробою узагальнити досвід викладання розділів курсу «Прикладна біофізика» («Моделювання біофізичних процесів» і «Самоорганізація біофізичних процесів») студентам, які вивчають біомедичні інженерні спеціальності.

Головною метою цього навчального посібника є максимально просте та математично строге викладення основних питань синергетики, при цьому необхідні математичні визначення, викладки і доведення, з якими читачі недостатньо добре ознайомлені, наведено і роз'яснено послідовно, що значно зменшує потребу у додатковій математичній літературі. У книзі показано тісний зв'язок між теоретичними положеннями та їх застосуваннями.

Посібник складається з двох частин та додатків. У першій частині розглянуто основні питання математичного моделювання; у другій – вступ у самоорганізацію, де наведено детерміністичні й стохастичні методи, до більшості розділів є завдання для самоперевірки. У додатках розглянуто розв'язання задач, та необхідний теоретичний матеріал, пояснено особливості викладеного матеріалу, методики використання отриманих результатів. Наведені літературні джерела

дозволяють читачам у разі необхідності детальніше вивчити частини розділів синергетики.

Варіант 11 розділу був написаний авторами разом, розділи 14, 13, та відповіді до розділу 12, 17 додатків – М. О. Ніколовим, решта – П. П. Лошицьким. Далі весь матеріал був спільно обговорений і відредагований.

Книга розрахована на магістрів, аспірантів, інженерів і лікарів, які цікавляться питаннями самоорганізації, розробкою апаратури, методами лікування та діагностики на основі принципів синергетики.



## Вступ

**Математичне моделювання як метод наукового пізнання.** Моделювання є не єдиним методом вивчення навколишнього світу. Існує багато дисциплін, які спеціально займаються вивченням методів пізнання. Їх називають *методологією*. Методологія дослівно означає «вчення про методи» (від грец. *metodos* – метод, шлях до чого-небудь і *logos* – вчення). Вивчаючи закономірності людської пізнавальної діяльності, методологія створює на цій основі методи її здійснення. Найважливішим завданням методології є вивчення походження, сутності, ефективності та інших характеристик методів пізнання.

Поняття «метод» означає сукупність прийомів і операцій практичного і теоретичного освоєння дійсності. Метод дає людині систему принципів, вимог, правил, керуючись якими вона може досягти поставленої мети.

Правильний метод є орієнтиром у русі до надійного істинного знання. Відомий вчений і філософ Р. Декарт виклав своє розуміння методу: «Під методом я розумію точні і прості правила, суворе дотримання яких ... без зайвої витрати розумових сил, але поступово і безперервно збільшуючи знання, сприяє тому, що розум досягає істинного пізнання всього, що йому доступно».

Методи наукового пізнання поділяють за ступенем їх спільності, тобто за широтою застосування у процесі наукового дослідження (рис В.1), на *всезагальні, загальнонаукові та спеціальні*.

Відомо два загальнофілософські методи пізнання: діалектичний і метафізичний. За метафізичного підходу об'єкти і явища навколишнього світу розглядають ізольовано одне від одного, без урахування їх взаємних зв'язків, ніби у застиглому, фіксованому, незмінному стані. Діалектичний підхід навпаки, передбачає вивчення об'єктів і явищ із усім багатством їх взаємозв'язків та урахуванням реальних процесів їх зміни і розвитку.

Загальнонаукові методи використовують у найрізноманітніших галузях науки, тобто мають широкий міждисциплінарний спектр застосування. Класифікація цих методів тісно пов'язана з поняттям рівнів наукового пізнання. Розрізняють два рівні наукового пізнання: емпіричний і теоретичний. Деякі загальнонаукові методи застосовують тільки на емпіричному рівні (спостереження, експерименти, вимірювання), інші – тільки на теоретичному (ідеалізація, формалізація), але є й такі (наприклад, моделювання), які використовують як на емпіричному, так і на теоретичному рівнях.

До групи приватнонаукових методів наукового пізнання належать методи, які використовують тільки у межах досліджень будь-якої конкретної науки або якого-небудь конкретного явища. Кожна окрема наука (біологія, хімія, геологія тощо) має свої специфічні методи дослідження.

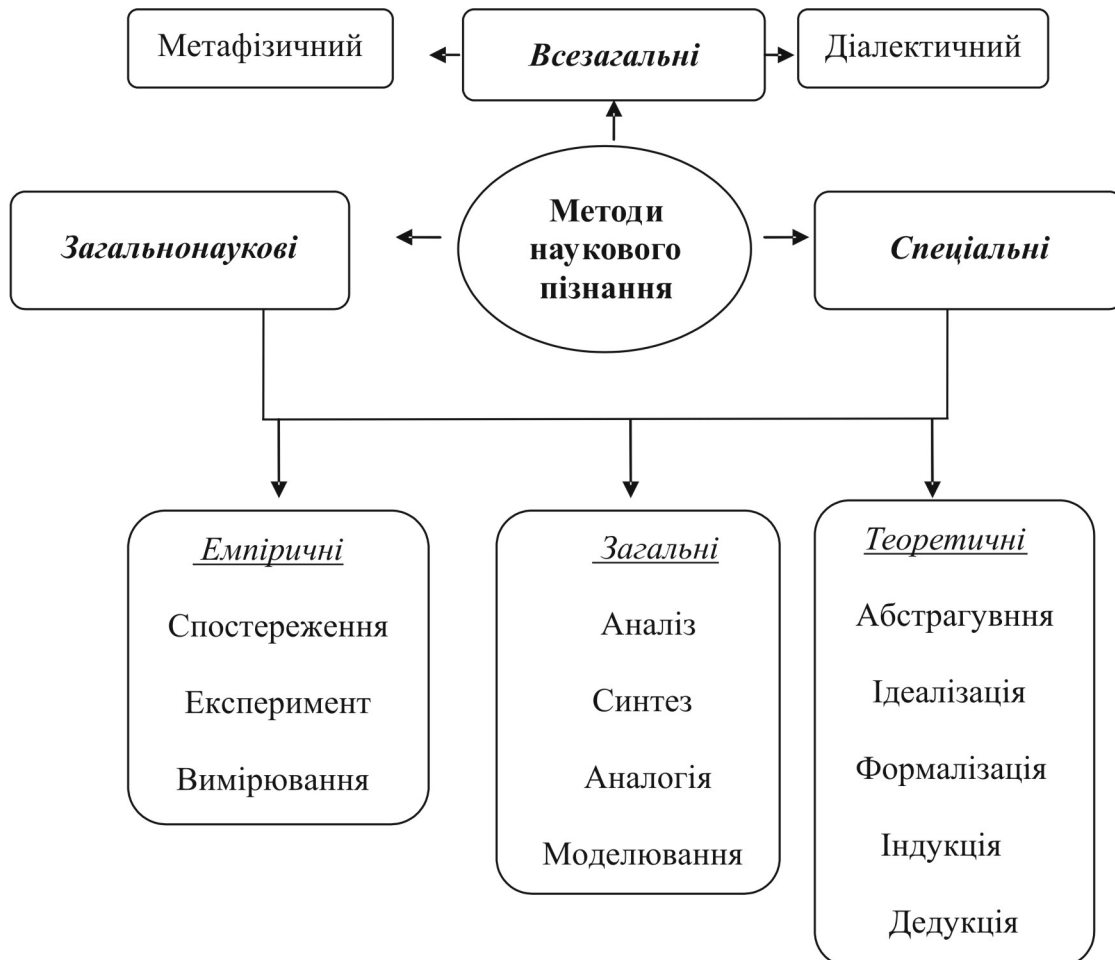


Рис. В.1. Методи наукового пізнання

Отже, **моделювання** – це метод пізнання навколишнього світу, який належить до загальнонаукових методів, що застосовуються як на емпіричному, так і на теоретичному рівнях пізнання. Під час побудови й дослідженні моделі можна використовувати майже всі інші методи пізнання.

**Визначення моделі.** Наукове пізнання зосереджене на вивченні предметів, явищ і процесів, що існують поза нашою свідомістю. Їх називають об'єктами дослідження (від лат. *objectum* – предмет).

Поняття «моделі» та «моделювання» найбільш поширені у сфері навчання, наукових дослідженнях, проектно-конструкторських роботах, у серійному технічному виробництві. Кожна з цих галузей

моделювання має свої особливості. Далі моделювання буде розглянуто зокрема у застосуванні в наукових дослідженнях. Найчастіше термін «модель» використовують для позначення:

- пристрою, що відтворює будову або дію будь-якого іншого пристрою (зменшене, збільшене або у натуральну величину);
- аналога (креслення, графіка, плану, схеми, опису і т. д.) будь-якого явища, процесу або предмета.

**Модель** (від лат. *modulus* – міра, зразок, норма) – це такий матеріальний чи уявний об'єкт, котрий у процесі пізнання (вивчення) заміщує об'єкт-оригінал, зберігаючи деякі важливі для цього дослідження типові риси. Процес побудови та використання моделі називають *моделюванням*.

**Властивості моделей.** Під час побудови моделі дослідник завжди діє згідно з поставленими цілями, враховує тільки найважливіші для досягнення фактори, тому будь-яка модель нетотожна об'єкту-оригіналу і, отже, неповна, оскільки під час її побудови дослідник враховував лише найважливіші з його погляду чинники. Інші фактори, незважаючи на свій відносно малий вплив на поведінку об'єкта, порівняно з обраними факторами, у сукупності можуть призводити до значних розбіжностей між об'єктом і його моделлю.

Якщо результати моделювання задовольняють дослідника і можуть слугувати основою для прогнозування поведінки або властивостей досліджуваного об'єкта, то вважають, що модель адекватна (від лат. *adaequatus* – прирівняний) об'єкту. У цьому разі адекватність моделі залежить від цілей моделювання й обраних критеріїв.

Як одна з характеристик моделі є її простота (або складність). Очевидно, що з двох моделей, що дозволяють досягти бажаної мети та отримати потрібні результати із заданою точністю, перевагу потрібно надати більш простій, при цьому адекватність і простота моделі не завжди є суперечливими вимогами. Враховуючи нескінченну складність будь-якого об'єкта дослідження, можна припустити існування нескінченної послідовності його моделей, що відрізняються за ступенем повноти, адекватності та простоти.

У якості ще однієї властивості моделі можна розглянути її потенційність (від лат. *potential* – міць, сила), або передбачуваний із позицій можливості отримання нових знань про досліджуваний об'єкт.

Наукові дослідження моделі, що не мають визначеної «передбачуваності», не можуть вважатися задовільними.

Відомо багато випадків, коли вивчення або використання моделей дозволило зробити наукові відкриття. Як приклад можна навести відкриття планети Нептун, положення якої було передбачене французьким астрономом Лаверовим на основі розрахунків, виконаних із використанням закону всесвітнього тяжіння (тобто моделі) і даних про рух планети Уран.

**Цілі моделювання.** Правильно побудована модель, зазвичай, доступніша, інформативніша та зручніша для дослідника, ніж реальний об'єкт. Найважливішим і найпоширенішим призначення моделей є їх застосування під час вивчення та прогнозування поведінки складних процесів і явищ. Потрібно враховувати, що деякі об'єкти й явища, безпосередньо, взагалі не можна вивчити.

Друге, не менш важливе, призначення моделей полягає у виявленні найбільш суттєвих характеристик об'єкта і формування тих чи інших його властивостей, оскільки сама модель відображає лише деякі основні характеристики вихідного об'єкта, облік яких необхідний для дослідження процесів чи явищ.

Модель дає змогу навчитися правильно керувати об'єктом за допомогою апробування різних варіантів. Використовувати для цього реальний об'єкт часто ризиковано або просто неможливо. Наприклад, отримати перші навички у керуванні сучасним літаком безпечніше, швидше і дешевше на тренажері (тобто моделі), ніж піддавати себе і дорогу техніку ризику.

Отже, модель потрібна для:

1) розуміння, як влаштований конкретний об'єкт, якою є його структура, внутрішні зв'язки, основні властивості, закони розвитку, саморозвитку та взаємодії з навколишнім середовищем;

2) навчання у керуванні об'єктом або процесом, визначення найкращих способів керування для заданих цілей і критеріїв;

3) прогнозування прямих і непрямих наслідків реалізації заданих способів і форм впливу на об'єкт.

**Класифікація моделей.** Моделювання належить до загальнонаукових методів пізнання. Використання моделювання на емпіричному й теоретичному рівнях дослідження призводить до умовного поділу моделей на матеріальні та ідеальні. **Матеріальне моделювання** – це моделювання, під час якого дослідження об'єкта виконують із використанням його матеріального аналога, що відтворює основні фізичні, геометричні, динамічні та функціональні характеристики цього об'єкта. До таких моделей, наприклад, належать використання макетів у архітектурі та експериментальні зразки для створення різних транспортних засобів.

Ідеальне моделювання відрізняється від матеріального тим, що ґрунтується не на матеріалізованій аналогії об'єкта та моделі, а на аналогії ідеальній, уявній і завжди має теоретичний характер.

Зазначимо, що ідеальне моделювання є первинним відносно матеріального (спочатку у свідомості людини формуються ідеальна модель, а потім на її підставі будується матеріальна). Існуючі типи моделювання можна зобразити так, як показано на рис. В.2.

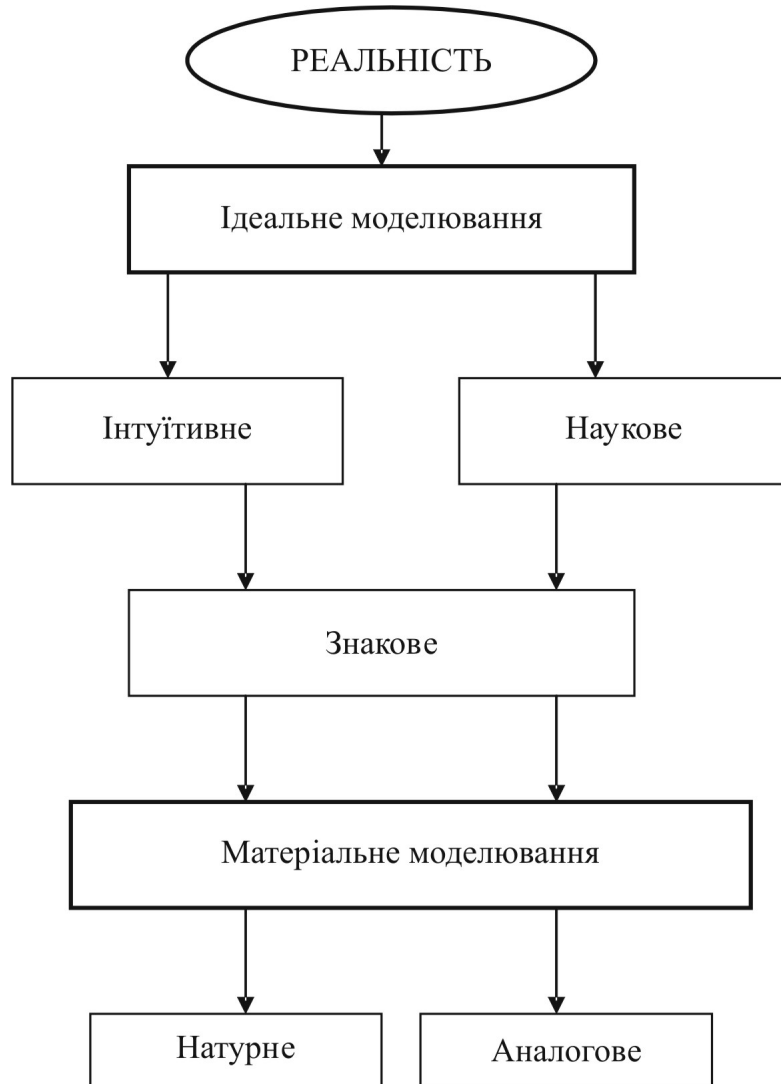


Рис. В.2. Види моделювання

**Матеріальне моделювання.** Головними різновидами матеріального моделювання є натурне й аналогове, при цьому обидва види моделювання основані на властивостях геометричної або фізичної подібності.

**Натурне моделювання** – це таке моделювання, за якого реальному об'єкту ставляться відповідно нього збільшений або зменшений матеріальний аналог, який допускає дослідження (зазвичай, у лабораторних умовах) за допомогою наступного перенесення влас-

тивостей досліджуваних процесів і явищ із моделі на об'єкт, на основі теорії подібності.

До прикладів натурних моделей належать макети в архітектурі, моделі суден у суднобудуванні. Слід зазначити, що з натурних моделей суден у середині ХІХ ст. моделювання почали розвивати як наукову дисципліну, а самі моделі – активно використовували у проектуванні нових технічних пристроїв.

Враховуючи, що будівництво одного крейсера займало декілька років, а його вартість була значною, можна зрозуміти прагнення суднобудівників знайти швидший і дешевший (порівняно з традиційним методом спроб і помилок) спосіб пошуку оптимальних параметрів судна. Вихід було знайдено в моделюванні. Протягуючи в басейнах невеликі моделі майбутніх суден і вимірюючи силу опору, конструктори знайшли раціональне рішення, як за формою корпусу судна, так і за потужністю силової установки.

На сьогодні методи натурального моделювання зазвичай застосовують у суднобудуванні, авіабудуванні, автомобілебудуванні, ракетобудуванні та інших галузях. Натурні методи використовують і під час дослідження причин великих аварій і катастроф. Активно використовують натурні моделі у поєднанні з іншими методами моделювання (наприклад, комп'ютерне) для зйомки кінофільмів. Так, на зйомках американського фільму «Титанік» для сцен загибелі корабля було використано більше десяти моделей судна.

**Аналогове моделювання** – це моделювання, основане на аналогії процесів і явищ, що мають різну фізичну природу, але однаково описаних формально (одними і тими самими математичними співвідношеннями, логічними і структурними схемами).

В основу аналогового моделювання покладено збіг математичних описів різних об'єктів. Прикладами таких моделей можуть бути електричні й механічні коливання, які з погляду математики описуються однаковими співвідношеннями, але належать до якісно відмінних фізичних процесів, тому вивчення механічних коливань можна проводити за допомогою електричної схеми, і навпаки. За певних припущень аналогічними можна вважати процеси розповсюдження тепла в тілі, дифузії домішок і просочування рідин.

Моделі фізичного та аналогового типів є матеріальним відображенням реального об'єкта і тісно пов'язані з ним своїми геометричними, фізичними та іншими характеристиками. Фактично процес дослідження моделей цього типу зводиться до проведення низки натурних експериментів, де замість реального об'єкта використовують його фізичну чи аналогову модель.

**Ідеальне моделювання** поділяють на два основних типи: інтуїтивне й наукове.

Найбільш яскравим прикладом інтуїтивної моделі навколишнього світу можна вважати життєвий досвід будь-якої людини. До цього типу моделювання належать вміння та знання, накопичені багатовіковим досвідом, що передаються від покоління до покоління (наприклад, вміння лікувати хвороби з використанням трав і прийомів народної медицини). Будь-яке емпіричне (тобто отримане з експерименту або в процесі спостереження) знання без пояснення причин і механізмів явища спостерігається, що також слід вважати інтуїтивним.

**Інтуїтивне моделювання** – це моделювання, основане на інтуїтивному (не обґрунтованому з позицій формальної логіки) уявленні про об'єкт дослідження, що не піддається формалізації або її не потребує.

**Наукове моделювання** – це завжди логічно обґрунтоване моделювання, що використовує мінімальну кількість припущень, прийнятих в якості гіпотез на підставі спостережень за об'єктом моделювання.

Головна відмінність наукового моделювання від інтуїтивного полягає не тільки в умінні виконувати необхідні операції та дії з власне моделювання, але й у розумінні «внутрішніх» механізмів, які при цьому використовуються. Отже, наукове моделювання знає не тільки як необхідно моделювати, а й чому так треба робити.

**Знаковим** називають моделювання, що використовує в якості моделей знакові зображення будь-якого вигляду: схеми, графіки, креслення, ієрогліфи, руни, набори символів, і включає також сукупність законів і правил, якими можна оперувати з вибраними знаковими утвореннями та елементами. Прикладами таких моделей можна вважати будь-яку мову, усне та письмове людське спілкування; алгоритмічні, хімічні формули, живопис, ноти для запису музичних творів і т. д. Знакову форму використовують для передачі як наукового, так й інтуїтивного знання. Моделювання за допомогою математичних співвідношень також є прикладом знакового моделювання.

У найбільш абстрактній галузі фундаментальної науки – математиці – інтуїція відіграє визначальну роль: «Ви маєте здогадатися про математичну теорему перш, ніж її доведете; і ви маєте здогадатися про ідею доведення, перш ніж ви її проведете в деталях ...; доведення відбувається ... за допомогою здогадки» – писав Д. Пойа.

Отже, інтуїтивне знання є генератором нового знання. Однак не всі припущення й ідеї витримують подальшу перевірку експе-

риментом і методами формальної логіки, що властиво науковому підходу, який є своєрідним фільтром для виділення найбільш цінних знань.

*Модель* – інструмент, орієнтований, насамперед, на дослідження поведінки і властивості конкретного об'єкта з метою керування ним або передбачення його властивостей.

*Теорія* – більш абстрактний за модель засіб, головною метою якого є пояснення поведінки або властивостей не конкретного об'єкта, а певного класу об'єктів. Отже, теорія має кінцеву або навіть нескінченну сукупність певних моделей.

**Когнітивні, концептуальні та формальні моделі.** Як вже зазначалося, під час спостереження за об'єктом-оригіналом у дослідника формується уявний образ об'єкта, його ідеальна модель, яку в науковій літературі називають *когнітивною* (уявною, що сприяє пізнанню). Формуючи таку модель, дослідник, зазвичай, прагне відповісти на конкретні запитання, тому від нескінченно складної будови об'єкта відкидається все непотрібне з метою отримання його більш компактного й лаконічного опису. Когнітивну модель зазвичай називають *змістовною* моделлю.

За функціональною ознакою і цілями змістовні моделі поділяють на описові, пояснювальні та прогностичні. *Описовою* моделлю називають будь-який опис об'єкта. *Пояснювальна* модель дозволяє відповісти на запитання, чому що-небудь відбувається? *Прогностична* модель має описувати майбутню поведінку об'єкта. Зазначимо, що прогностична модель не зобов'язана включати в себе пояснювальну.

*Концептуальною* моделлю називають змістовну модель, для формулювання якої використовують поняття та уявлення предметних галузей знання, що вивчають об'єкт моделювання.

*Формальна* модель є представленням концептуальної моделі за допомогою одного або декількох формальних мов (наприклад, мов математичних теорій, універсальної мови моделювання (UML) або алгоритмічних мов).

У природно-наукових дисциплінах, зазвичай можливо побудувати формальну модель, тому когнітивні, змістовні та формальні моделі складають три взаємопов'язані рівні моделювання. Перераховані різновиди моделей не можна розглядати ізольовано одну від одної. «Взаємовідносини» моделей зображено на рис. В.3.

Як вже зазначалося, одним з видів знакового моделювання є математичне моделювання.



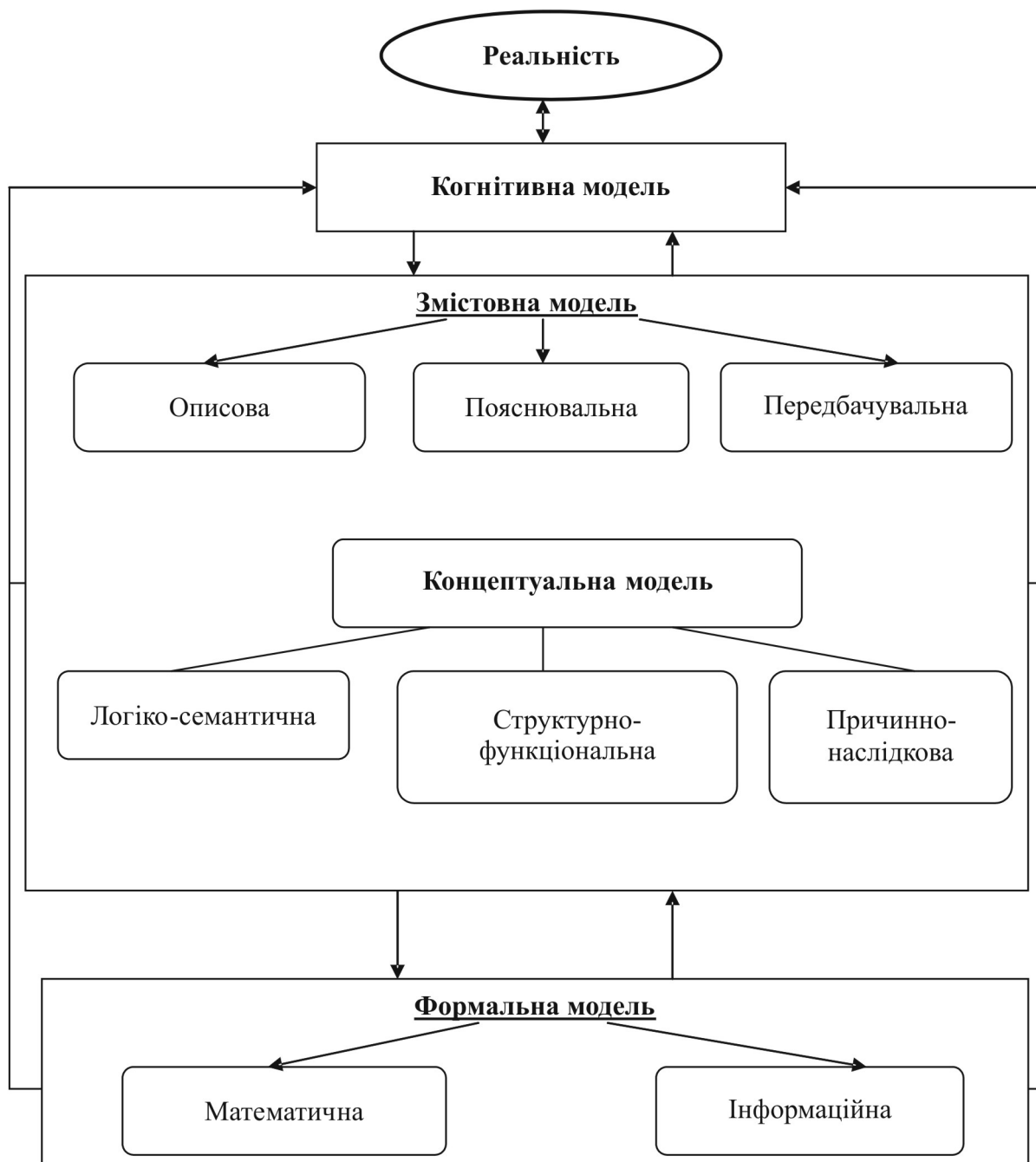


Рис. В.3. Взаємозв'язок моделей

**Математичне моделювання** – це ідеальне наукове знакове формальне моделювання, за якого опис об'єкта здійснюється мовою математики, а дослідження моделі проводять з використанням тих чи інших математичних методів.

Майже всі сучасні розділи фізики присвячені побудові та дослідженню математичних моделей різноманітних фізичних об'єктів і явищ. Так, фізики-ядерники до проведення експериментів виконують дослідження із застосуванням математичних моделей, при цьому на підставі результатів теоретичного моделювання розробляють

і уточнюють методику натурних експериментів, з'ясовують, які ефекти, де і коли слід очікувати, коли і що реєструвати. Такий підхід дозволяє значно зменшити витрати на проведення експерименту, підвищити його ефективність. Аналогічні зауваження можна зробити й щодо інших сучасних дисциплін.

Слід зазначити певні переваги математичного моделювання порівняно з натурним експериментом:

- економічність (зокрема, збереження ресурсів реальної системи);
- можливість моделювання гіпотетичних, тобто нереалізованих у природі об'єктів (насамперед на різних етапах проектування);
- можливість реалізації режимів, небезпечних або важковитворюваних у природі (критичний режим ядерного реактора, робота системи протиракетної оборони);
- можливість зміни масштабу часу;
- простота багатоаспектного аналізу;
- велика прогностична сила внаслідок можливості виявлення загальних закономірностей;
- універсальність технічного та програмного забезпечення проведеної роботи (ЕОМ, системи програмування і пакети прикладних програм широкого призначення).

За *математичну модель* візьмемо будь-який оператор  $A$ , який дозволяє за відповідними значеннями вхідних параметрів  $X$  встановити вихідні значення параметрів  $Y$  об'єкта моделювання:

$$A: X \rightarrow Y; \quad X \in \Omega_x; \quad Y \in \Omega_y,$$

де  $\Omega_x$  і  $\Omega_y$  – множини допустимих значень вхідних і вихідних параметрів для модельованого об'єкта. Залежно від природи модельованого об'єкта, елементами множин  $\Omega_x$  і  $\Omega_y$  можуть бути будь-які математичні об'єкти (числа, вектори, тензори, функції, множини тощо).

Поняття «оператор» у наведеному прикладі можна трактувати досить широко. Це може бути як будь-яка функція, що пов'язує як вхідні й вихідні значення, так і відображення, що зображає символічний запис системи алгебраїчних, диференціальних, інтегродиференціальних або інтегральних рівнянь. Це також може бути будь-який алгоритм, сукупність правил або таблиць, які забезпечують знаходження (або встановлення) вихідних параметрів із заданими значеннями.

Із розвитком обчислювальної техніки значного поширення набули *інформаційні моделі*, наприклад автоматизовані довідники,

реалізовані за допомогою систем управління базами даних. Отримуючи на вході певний запит на пошук необхідної інформації, подібні моделі дозволяють знайти всю наявну в базі даних інформацію про потрібне запитання. Однак такі моделі не можуть генерувати нові знання, яких немає у базі даних. Зауважимо, що це моделі з нульовим потенціалом. У той самий час у поєднанні навіть із дуже простими математичними моделями (наприклад, із застосуванням регресивного аналізу), інформаційні моделі можуть призвести до відкриття нових закономірностей, дозволити прогнозувати розвиток досліджуваних процесів.

**Класифікація математичних моделей.** Математичні моделі можна поділити на різні класи залежно від:

- складності об'єкта моделювання;
- оператора моделі (підмоделі);
- вхідних і вихідних параметрів;
- способу дослідження моделі;
- мети моделювання.

**Класифікація математичних моделей залежно від складності об'єкта моделювання.** За об'єкт моделювання можна використати як деяке матеріальне тіло або конструкцію, так і природний, технологічний або соціальний процес або явище. Усі об'єкти моделювання можна поділити на дві групи: прості та об'єкти-системи (рис. В.4). Під час моделювання простого об'єкта не розглядають його внутрішню будову і не виділяють складові його елементи або підпроцеси. Як приклад подібного об'єкта є матеріальна точка в класичній механіці.

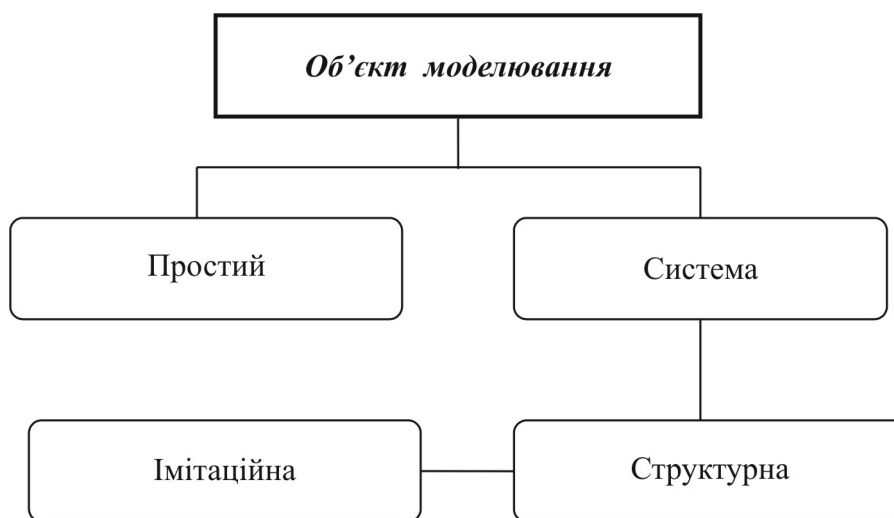


Рис. В.4. Класифікація об'єктів моделювання

*Система* є сукупністю взаємопов'язаних елементів, у певному сенсі відокремлена від навколишнього середовища і взаємодіє з ним як ціле. Для складних систем характерна наявність великої кількості взаємопов'язаних, взаємодіючих між собою елементів, при цьому зв'язок між елементами  $A$  і  $B$  системи може відрізнятися від зв'язку між елементами  $B$  і  $A$ .

Моделі об'єктів-систем, що враховують властивості та поведінку окремих елементів, а також взаємозв'язки між ними, називають *структурними*. Детальніше моделі подібного типу розглянуто в розділі 4.

Серед структурних динамічних систем в окремий підклас виділяють *імітаційні* системи, що складаються з кінцевої кількості елементів, кожен з яких має кінцеву кількість станів.

**Класифікація математичних моделей залежно від оператора моделі.** Вище зазначалося, що будь-яку математичну модель можна розглядати як деякий оператор  $A$ , який є алгоритмом або визначається сукупністю рівнянь – алгебраїчних, звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР), систем ЗДР (СЗДР), диференціальних рівнянь у часткових похідних (ДРЧП), інтегродиференціальних рівнянь (ІДР) та ін. (рис. В.5).

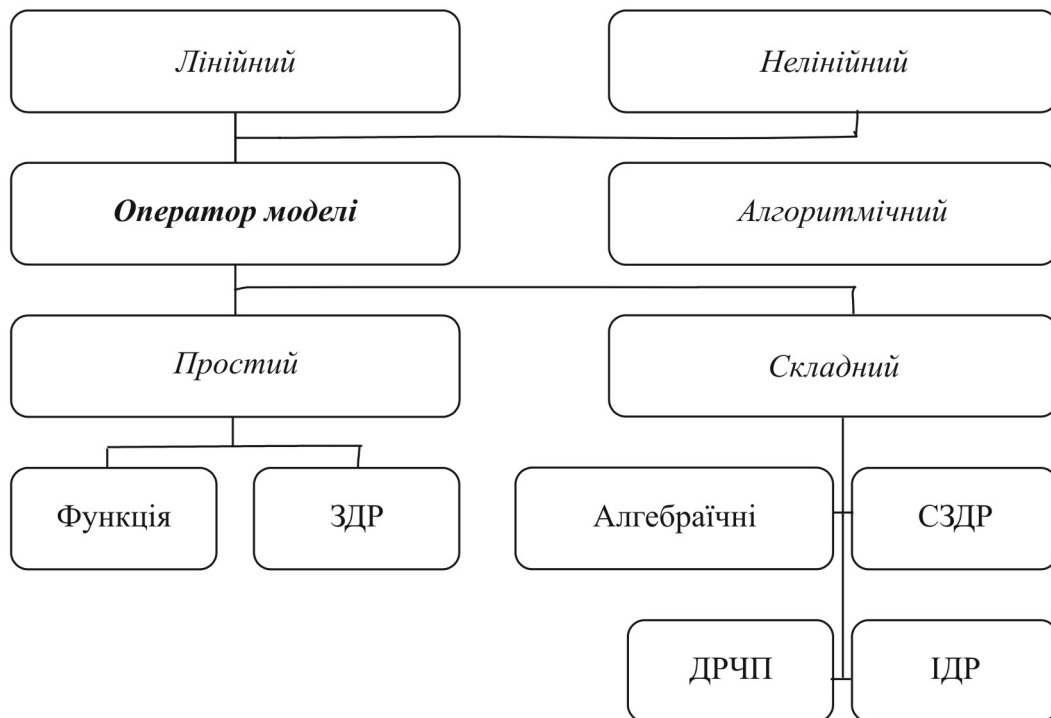


Рис. В.5. Класифікація математичних моделей залежно від оператора моделі

Лінійна поведінка властива простим об'єктам. Системам, зазвичай, притаманна нелінійна багатоваріантна поведінка.

Залежно від виду оператора математичні моделі можна поділити на *прості* і *складні*.

Якщо оператор моделі є алгебраїчним виразом, що відображає функціональну залежність вихідних параметрів  $Y$  від вхідних  $X$ , модель називають *простою*. Модель, яка включає системи диференціальних та інтегральних співвідношень вже не належить до простих, оскільки для свого дослідження вимагає застосування складних математичних методів.

**Класифікація математичних моделей залежно від параметрів моделі.** Загалом параметри, що описують стан і поведінку об'єкта моделювання, розбивають на низку підмножин, що не перетинаються (рис. В.6).

Для побудови моделі важливим є порівняння часу істотних змін зовнішніх впливів і характерних часів переходу об'єкта в новий рівноважний стан із навколишнім середовищем, а також часу релаксації, що визначає встановлення рівноваги між окремими елементами всередині об'єкта. Якщо швидкості зміни зовнішніх впливів на об'єкт моделювання значно менше швидкості релаксації, то залежністю від часу в моделі можна знехтувати, тоді цей процес називають *квазистатичним*.

Якщо швидкості зміни зовнішніх впливів і параметрів стану досліджуваного об'єкта високі (порівняно зі швидкостями релаксації), то необхідний облік часу. У цьому разі об'єкт дослідження розглядають у межах *динамічного процесу*.

**Класифікація математичних моделей залежно від цілей моделювання.** Метою *дескриптивних моделей* (від лат. *Descriptio* – опис) є встановлення законів зміни параметрів моделі (рис. В.7). Як приклад розглянемо модель руху матеріальної точки під дією прикладених сил, що використовує другий закон Ньютона. Задаючи положення і швидкість точки у початковий момент часу (вхідні параметри), масу (власний параметр) і закон зміни прикладених сил (зовнішні дії), можна визначити швидкість і координати матеріальної точки у будь-який момент часу (вихідні параметри). Отримана модель описує залежність вихідних параметрів від вхідних, тому дескриптивні моделі є реалізацією описових і пояснювальних змістовних моделей на формальному рівні моделювання.

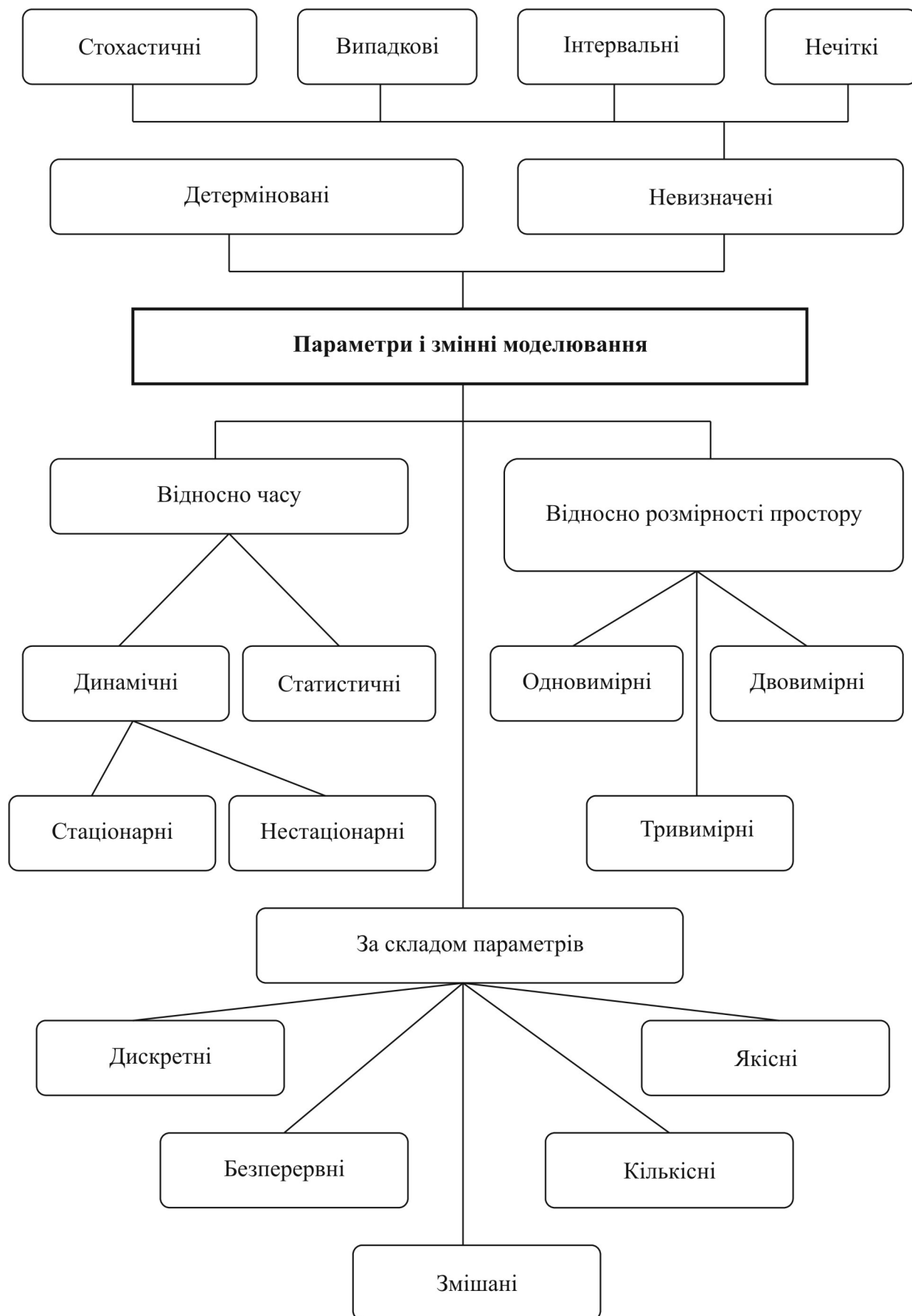


Рис. В.6. Класифікація математичних моделей залежно від параметрів моделі



Рис. В.7. Класифікація математичних моделей залежно від цілей моделювання

*Оптимізаційні моделі* призначені для визначення найкращих, з погляду окремого критерію, параметрів модельованого об'єкта або ж для пошуку найкращого режиму керування певним процесом. Частина параметрів моделі належить до параметрів керування, змінюючи які можна отримувати різні варіанти наборів значень вихідних параметрів. Зазвичай ці моделі будують із використанням однієї або декількох дескриптивних моделей і включають певний критерій, що дозволяє порівнювати різноманітні варіанти наборів значень вихідних параметрів між собою з метою вибору найкращого. На область значень вхідних параметрів можна накласти обмеження у вигляді рівностей та нерівностей, пов'язаних з особливостями цього об'єкта або процесу. Метою оптимізаційних моделей є пошук таких допустимих параметрів керування, за яких критерій вибору досягає свого «найкращого значення».

*Керувальні моделі* застосовують для прийняття ефективних керувальних рішень у різних галузях цілеспрямованої діяльності людини. Загалом прийняття рішень є процесом, за своєю складністю його можна порівняти із процесом мислення. Однак на практиці для прийняття рішень зазвичай розуміють вибір деяких альтернатив із заданої їх безлічі, а загальний процес прийняття рішень подають як послідовність таких виборів альтернатив. Наприклад, на підприємстві звільнилася посада головного інженера, і завдання директора полягає у виборі з наявної безлічі кандидатів одного, який відповідає потрібним вимогам.

**Класифікація математичних моделей залежно від методів реалізації (рис. В.8).** Метод реалізації моделі належить до *аналітичних*, якщо дає змогу отримати вихідні параметри у вигляді *аналітичних виразів*, тобто таких, у яких використовується не більше ніж зліченна множина арифметичних операцій і переходів до границь.

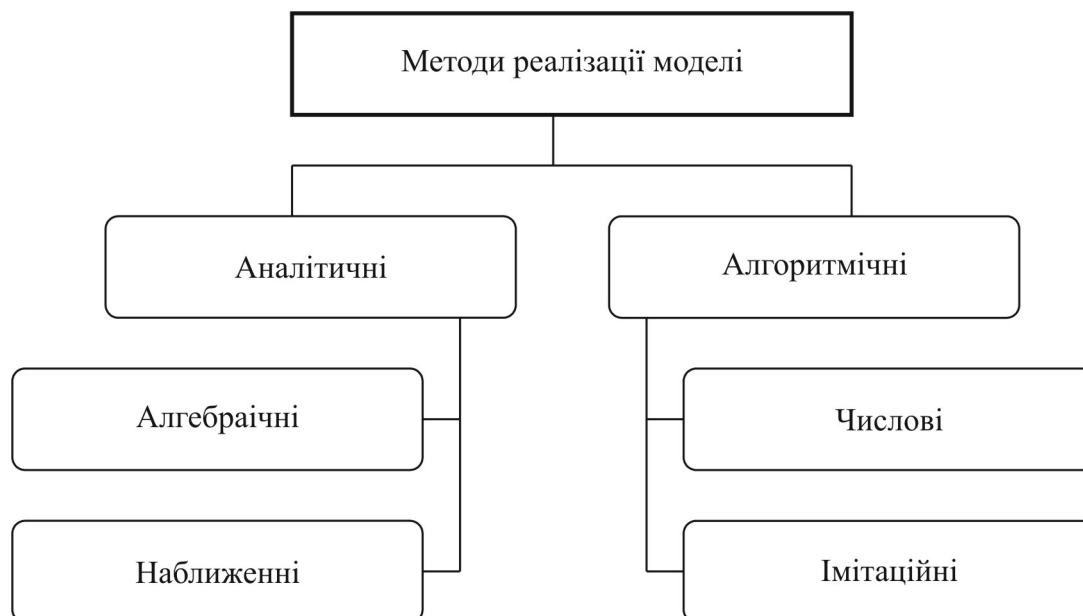


Рис. В.8. Класифікація математичних моделей залежно від методів реалізації

Інтерес до аналітичних методів під час реалізації моделей пов'язаний із появою пакетів математичних обчислень (*Derive*, *MatLab*, *Mathcad*, *Maple*, *Mathematica*, *Scientific Workplace* та ін.). Спектр розв'язуваних цими пакетами завдань дуже великий і постійно розширюється (елементарна математика, символні операції з поліномами, похідними й інтегралами, з векторами і матрицями, задачі теорії поля та векторного аналізу, метод кінцевих елементів тощо). Застосування подібних програмних засобів не тільки спрощує процедуру отримання аналітичного розв'язку, але й полегшує подальший його аналіз із застосуванням різних візуалізаторів.

За *числового підходу* сукупність математичних співвідношень моделі замінюється кінцевимірним аналогом. Це найчастіше досягається дискретизацією вихідних співвідношень, тобто переходом від функцій неперервного аргумента до функцій дискретного аргумента. Після дискретизації вихідної задачі виконується побудова обчислювального алгоритму, тобто послідовності арифметичних і логічних дій, виконуваних на електронно обчислювальній техніці (ЕОМ), що дозволяє за малу кількість кроків отримати розв'язок дискретної задачі. Знайдений розв'язок дискретної задачі приймають за наближений розв'язок вихідної математичної задачі.

Якщо за числового підходу дискретизації піддавали отриману систему математичних співвідношень, то за *імітаційного підходу* на окремі елементи розбивається сам об'єкт дослідження. У цьому разі систему математичних співвідношень для об'єкта-системи



в цілому не записують, а замінюють певним алгоритмом, який моделює її поведінку та враховує взаємодію одна з одною моделей окремих елементів системи. Ці моделі можуть бути як аналітичними, так і алгоритмічними. Алгоритмічні моделі, що використовують як числовий, так й імітаційний підхід, не дають змоги отримати вирішення завдань в аналітичній формі, що ускладнює процес аналізу результатів моделювання. Оскільки застосування моделей цього типу можливе лише за наявності обчислювальної техніки, то їх ефективність залежить від потужності та швидкодії ЕОМ. Перевагою алгоритмічних моделей є відсутність принципових обмежень на складність моделі, що дозволяє застосовувати їх для дослідження систем довільної складності.

**Вступ до синергетики. Проблема самоорганізації.** Класична фізика підкреслює стійкість, постійність навколишнього світу, що справедливо лише у певних випадках. Дійсно, ми всюди спостерігаємо еволюційні процеси, що призводять до зростання різноманітності й складності. Це потребує розвитку таких розділів фізики і математики, які могли б мати інтерес у вивченні еволюційних процесів. З'явилися наукові напрями, пов'язані з проблемою *самоорганізації* у фізичних або біологічних системах.

Новим узагальненим напрямом у науці, що вивчає основні закони самоорганізації складних систем є синергетика, в яку входять такі галузі як нелінійна динаміка, хаос, фрактали, катастрофи, хвильові і польові ефекти тощо. Синергетика вивчає самоорганізацію та ускладнення форми, або структуру системи, які утворюються у результаті біфуркацій за сумісної дії декількох різних чинників, тоді як кожен чинник окремо подібного явища не викликає. Виникнення синергетики зумовлене необхідністю аналізувати складні процеси різної природи, використовуючи нові математичні методи, пов'язані з вивченням як детерміністичної, так і стохастичної динаміки у підпросторі залежних від часу керувальних параметрів.

Упорядкованість утворюється у відкритих системах, що перебувають у нерівноважному стані. Далеко від рівноважного стану система нестійка і повернення до початкового стану не є обов'язковим, окрім того у точках біфуркації поведінка системи є неоднозначною, при цьому можуть виникати ефекти узгодження, коли кооперативна поведінка елементів системи корелює на макроскопічних відстанях через макроскопічні інтервали часу.

Лінійна нерівноважна термодинаміка охоплює всі випадки, коли потоки (чи швидкості незворотних процесів) є лінійними функціями «термодинамічних сил» (градієнтів температури чи концентрацій).

Одним із випадків використання лінійної нерівноважності термодинаміки є термодифузія. Так, якщо на суміш двох різних газів накласти градієнт температури, то один з газів концентрується поблизу гарячої стінки, а другий – поблизу холодної. У результаті ентропія суміші стає меншою, ніж тоді, коли суміш була б однорідною. Отже, маємо ситуацію, *коли нерівноважність може слугувати джерелом упорядкованості*.

Розв'язок, що відповідає рівноважним умовам, які зводяться до вимоги максимальності ентропії для ізольованих систем чи мінімальності гільмгольцевої вільної енергії для систем за фіксованих температури та об'єму, називають термодинамічною гілкою.

Нехай зовнішня дія змінюється так, що система дедалі більше віддаляється від рівноваги, при цьому нерівноважна термодинаміка дозволяє сформулювати достатню умову стійкості термодинамічної гілки. Якщо ця умова не виконується, термодинамічна гілка стає нестійкою, і в системі виникають нові структури, які характеризуються *когерентною поведінкою*.

Розглянемо посудину з рідиною, що нагрівається знизу. Якщо градієнт температури залишається малим порівняно з деяким характерним значенням, тепло переноситься через рідину за рахунок процесу теплопровідності. Проте зі зростанням інтенсивності нагрівання за певного градієнту температури спонтанно виникають конвективні осередки з регулярною течією. Така течія відповідає високому ступеню молекулярної організації, при цьому вона можлива лише за рахунок перенесення енергії від теплового до макроскопічного конвективного руху. Цей ефект називають *бенарівською нестійкістю*. Важливо, що поза областю стійкості термодинамічної гілки може виникати новий тип організації, яка пов'язує когерентну просторово-часову поведінку системи з динамічними процесами всередині системи (наприклад, конвекцію з хімічною кінетикою).

Термодинамічна гілка стає нестійкою достатньо далеко від рівноваги лише за наявності в системі відповідного зворотного зв'язку. Нові структури, що з'являються при цьому, суттєво відрізняються від рівноважних структур, що вивчаються класичною термодинамікою, наприклад рідин або кристалів. Такі структури можуть існувати у стані далекому від рівноваги лише за рахунок збільшення енергії й речовини.

**Дисипативні структури.** Термін «дисипативних структур» вводиться для того, щоб підкреслити їхню відмінність від рівноважних структур. Дисипативні структури є прикладом, який демонструє

здатність нерівноваги служити джерелом упорядкованості. Механізм утворення дисипативних структур слід чітко відрізнити від механізму формування рівноважних структур, основанийого на больцманівському принципі впорядкованості.

Больцман пов'язав ентропію з кількістю станів системи  $P$  за допомогою співвідношення

$$S = k \log P, \quad (\text{B.1})$$

де  $k$  – універсальна стала Больцмана. З цього співвідношення випливає, що термодинамічна рівновага замкненої системи, що характеризується максимальною ентропією  $S_{\max}$ , відповідає ситуації з максимальною кількістю станів системи. Для дисипативних систем, замкнутих стосовно масообміну, проте здатних обмінюватися із зовнішнім середовищем енергією за заданої температури, положення залишається аналогічним, за винятком того, що замість ентропії  $S$  тепер розглядатимемо вільну енергію  $F$ , визначену співвідношенням

$$F = E - TS, \quad (\text{B.2})$$

де  $E$  – енергія системи;  $T$  – абсолютна температура, К. У стані рівноваги вільна енергія досягає мінімального значення.

Структура рівняння (B.2) відображає конкуренцію між енергією  $E$  та ентропією  $S$ . За низьких температур другий член настільки незначний порівняно з першим, що ним можна знехтувати. Ентропія при цьому також незначна. За низьких температур речовина перебуває у твердому стані, що характеризується впорядкованою структурою з низькою ентропією, тоді як за вищих температур спостерігаються газоподібні стани з високою ентропією. Отже, рівноважні структури підпорядковуються больцманівському принципу впорядкованості, який виражається рівняннями (B.1) і (B.2).

Стосовно дисипативних структур, то больцманівський принцип впорядкованості для них непридатний. Так, у разі бенарівської нестійкості, згідно з принципом Больцмана, ймовірність виникнення когерентного руху більш ніж  $10^{20}$  молекул майже дорівнює нулю, тому бенарівську нестійкість можна пояснити лише у межах принципово нового підходу. Наприклад, можна уявити, що конвективні потоки флуктуаційного походження нижче деякого критичного значення градієнта температури, який наявний завжди, зменшуються за амплітудою й зникають. З другого боку, за градієнтів температури, що перевищують критичне значення, деякі флуктуації посилюються і призводять до макроскопічного потоку, тому виникає новий молекулярний порядок, що відповідає макроскопічній

флуктуації, стабілізованій за рахунок обміну енергією із зовнішнім середовищем.

Такий порядок характеризується виникненням дисипативної структури. Цей ефект називають *впорядкованістю через флуктуації*, щоб підкреслити його відмінність від больцманівського принципу впорядкованості, що відіграє фундаментальну роль у розумінні природи рівноважних структур.

**Стійкість і біфуркації.** Під час обговорення, виникнення нових типів розв'язків динамічних рівнянь, які описують термодинамічні процеси, природним параметром стає віддаленість системи від термодинамічної рівноваги. Проблему стійкості легко формулюють й аналізують у термінах термодинамічних потенціалів, таких як ентропія або вільна енергія. Якщо відомо, що система перебуває в стані з мінімальною вільною енергією, то можна зробити висновок, що цей стан стійкий.

Якщо у результаті флуктуації рівновагу системи порушити, то вільна енергія системи зменшуватиметься, поки рівновага не відновиться. Ця ситуація радикально відрізняється від нерівноважних систем, оскільки за великим рахунком не існує такого потенціалу, за допомогою якого можна було б описати стан такої системи. Саме з цієї причини теорія стійкості відіграє важливу роль.

Природним підходом до проблеми появи нових розв'язків є використання теорії біфуркації. Мета цієї теорії – вивчення можливого розгалуження розв'язків, що виникають за певних умов. Множинність розв'язків у нелінійних системах можна розглядати як поступову появу автономності відносно навколишнього середовища.

**Флуктуації.** Системи складаються з величезної кількості елементів (наприклад, молекул у рідині, клітин в організмі чи нейронів у мозку). Очевидно, що всі ці елементи не можуть знаходитися в однаковому стані, тому у макроскопічних системах виникає випадковий «шум», що деякою мірою відіграє роль збурювання у теорії стійкості. Слід зазначити, що в цьому разі збурювання генерує сама система (окрім них є ще флуктуації, пов'язані з зовнішнім середовищем).

Флуктуації відіграють особливо важливу роль поблизу точок біфуркації, де система має «обирати» одну з можливих стійких гілок, що відповідають макроскопічним рівнянням. Проте такі рівняння не мають переваги тієї або іншої гілки. Це приводить до необхідності враховувати випадкові чинники, тобто потрібен більш точний опис, що включає флуктуації.

У межах малих масштабів відбувається майже пуасонівський розподіл, але зі збільшенням масштабу розподіл відхиляється від

пуасонівського. Це відхилення особливо цікаве поблизу точки біфуркації, де з'являються довгохвильові просторові кореляції. У цьому разі виникає аналогія між нестійкістю нерівноважного стану та фазовими переходами. Поза межею стійкості випадкові флуктуації збільшуються у часі, внаслідок чого середні значення змінюються на макроскопічному рівні. Вважають, що у таких процесах відбувається порушення «закону великих чисел». Справді, якщо цей закон виконується, то адекватний опис системи зображають мовою середніх значень. Тут, навпаки, флуктуації керують середніми значеннями.

Існують цілі класи нелінійних явищ, які не супроводжуються фазовими переходами, при цьому в цих явищах флуктуації можуть відігравати набагато важливішу роль, ніж це передбачалося.

**Біологічні структури.** До процесу метаболізму простої клітини залучено декілька тисяч спряжених хімічних реакцій, що, безумовно, вимагає тонких механізмів координації та регуляції, тобто тут потрібна надзвичайно складна функціональна організація. Для проходження метаболічних реакцій необхідні спеціальні каталізатори, які називають *ферментами*. Кожен фермент виконує своє конкретне завдання, і якщо розглянути як клітина виконує складну послідовність операцій, то можна помітити, що вона працює за тими самими принципами, що й сучасний складальний конвеєр. Можна стверджувати, що між просторово-часовою структурою і функціонуванням цього об'єкта є певний зв'язок, тобто біологічна впорядкованість є одночасно структурною та функціональною.

Упорядкованість саме цього типу характерна для дисипативних структур, які виникають у результаті функціонування системи (тобто участі в хімічних процесах) в умовах, далеких від рівноваги.

Слід зазначити, що між хімічним складом простої клітини та складом її оточення є суттєва відмінність (нагадаємо, що середня молекулярна вага білка за порядком величини становить приблизно  $10^5$ , тоді як для води вона дорівнює 18).

Біологічна організація – це послідовність структур і функцій зростаючої складності та ієрархічного характеру. У зв'язку з цим одною з основних цілей є розуміння зв'язків між молекулярним і надмолекулярним рівнями, клітинним із надклітинним рівнями, а також як відбуваються переходи між різними рівнями.

Зазначимо, що нині деякі з найцікавіших аспектів біологічної активності, такі як регуляція клітинного поділу або клітинне диференціювання і морфогенез, піддаються моделюванню за допомогою дисипативних структур. Важливу роль у цих процесах

відіграє нестійкість, пов'язана з дифузією, оскільки завдяки їй може з'явитися виділена вісь симетрії системи, що знаходиться спочатку в ізотропному стані.

Між «хімією», що вивчають у молекулярній біології, і «просторово-часовою структурою», що визначається математичними властивостями кінетичних рівнянь під час виконання різних умов, існує глибокий і непередбачений зв'язок. Саме цей зв'язок між хімією, термодинамікою і математикою такий привабливий у вивченні проблеми самоорганізації.

Еволюцію можна розглядати як проблему структурної стійкості, при цьому слід вивчати флуктуації не концентрацій або інших макроскопічних величин, а флуктуації механізмів хімічних процесів, що приводять до модифікації кінетичних рівнянь.

## Частина перша

### Розділ 1. ВСТУП ДО КІНЕТИКИ ОРГАНІЧНИХ РЕАКЦІЙ

#### 1.1. Основні кінетичні закони

Хімічна кінетика вивчає швидкості хімічних реакцій і параметри, від яких ці швидкості залежать. Найбільш важливими і вивченими з цих параметрів є концентрація, температура і тиск. Послідовно досліджуючи вплив всіх цих параметрів на швидкість реакцій, можна дійти певного висновку про деталі механізмів, за яких проходять хімічні реакції. Можливо кінетичні дослідження є обов'язковими для вивчення механізму реакції, а некінетичні, наприклад стереохімічні, можуть дати дуже важливу інформацію про механізми реакції, й їх завжди потрібно враховувати у кінетичних дослідженнях.

У будь-якій галузі науки спочатку наводять поняття про феноменологічні чи емпіричні закони, які мають певний зміст, а потім формулюють їм теоретичні основи, щоб пояснити ці закони.

Кінетика органічних реакцій часто виявляється головною ланкою, яка визначає результати впливу зовнішніх фізичних факторів на біологічний об'єкт у цілому. Саме з цієї причини ознайомимось з основними поняттями та законами, за якими відбуваються біохімічні процеси як в окремій клітині, так і в організмі в цілому.

Швидкість хімічних реакцій можна виразити різними способами. Іноді зручно вимірювати концентрацію продукту реакції  $x$  у різні моменти часу. Зміну концентрації від часу схематично зображено на рис. 1.1 (крива  $a$ ). Нахил дотичної до цієї кривої  $dx/dt$ , у деякій точці є швидкістю реакції у цей момент часу. Якщо концентрація вимірюється у *моль/л*, то швидкість в *моль/л · сек*. Крім того, можна виміряти зміни концентрації вихідних продуктів (крива  $b$ ). Нахил дотичної до цієї кривої  $dc/dt$  завжди буде від'ємною величиною.

Зазначимо, що швидкість хімічних реакцій може мати різні числові значення залежно від способу її вимірювання.

Наприклад, реакція  $N_2 + 3H_2 = 2NH_3$ , в якій у кожний момент часу одна молекула азоту призводить до утворення двох молекул аміаку, очевидно, що швидкість утворення аміаку  $V_{NH_3}$  дорівнює

подвійній швидкості зникнення азоту  $V_{N_2}$  :

$$V_{NH_3} \equiv \frac{d[NH_3]}{dt} = -2 \frac{d[N_2]}{dt} \equiv -2 V_{N_2} .$$

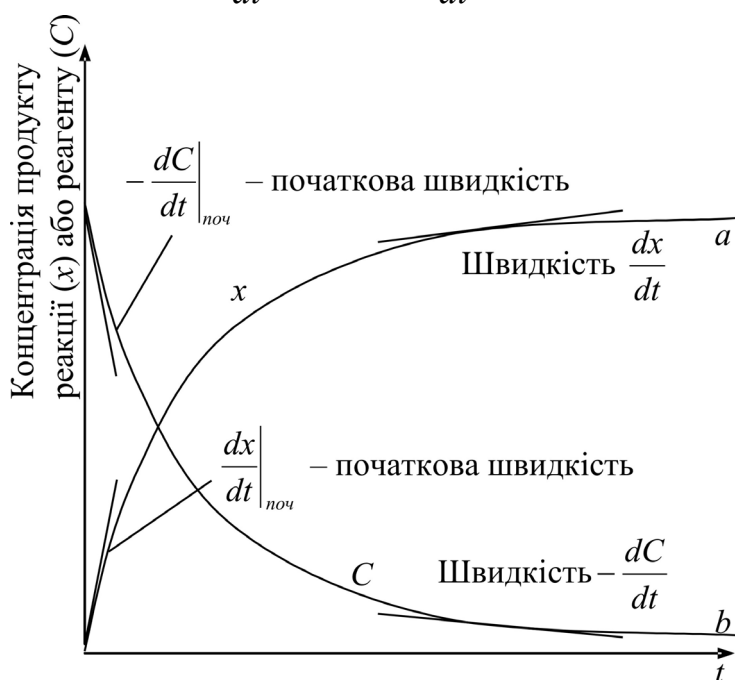
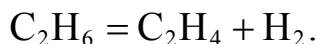


Рис. 1.1. Визначення швидкості хімічних реакцій

Аналогічно, швидкість зникнення водню  $V_{H_2}$  дорівнює потрійній швидкості зникнення азоту  $V_{N_2}$  :

$$V_{H_2} \equiv -\frac{d[H_2]}{dt} = -3 \frac{d[N_2]}{dt} \equiv -3 V_{N_2} .$$

**Порядок реакції.** Швидкість деяких реакцій, зазвичай, пропорційна концентрації реагентів, тому зручно ввести поняття про *порядок* реакції. Отже, якщо швидкість прямо пропорційна першому ступеню концентрації, тобто  $V = kC$ , то реакцію називають реакцією *першого порядку*. Прикладом такої реакції є реакція розкладу етану в газовій фазі



У звичайних експериментальних умовах швидкість появи етилену дорівнює швидкості отримання етану, що пропорційна концентрації етану в першому ступені чи його тиску в системі.

До реакції *другого порядку* належить два типи: до яких швидкість реакції пропорційна квадрату концентрації реагенту

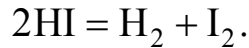
$$V = kC^2 ,$$



і коли швидкість пропорційна першим ступеням концентрації різних реагентів

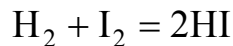
$$V = kC_A C_B.$$

Реакція розкладу йодистого водню у газовій фазі належить до процесів першого типу



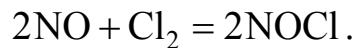
Для реакції, яка проходить зліва направо, швидкість пропорційна квадрату концентрації йодистого водню.

Швидкість зворотної реакції



пропорційна добутку концентрацій водню і йоду, тому зворотна реакція також має другий порядок: перший – за воднем, і перший – за йодом.

Відомі також реакції *третього порядку*. До них належить реакція окису азоту з хлором



Швидкість цієї реакції пропорційна квадрату концентрації азоту і першому степеню концентрації хлору

$$V = k[\text{NO}]^2 [\text{Cl}_2].$$

Ця реакція має другий порядок за окисом азоту і перший за хлором; її загальний порядок дорівнює трьом.

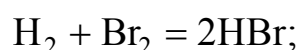
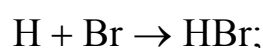
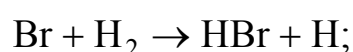
Отже, якщо швидкість реакції пропорційна концентрації реагенту  $A$  у степені  $\alpha$ , концентрації реагенту  $B$  у степені  $\beta$  і т. д., то швидкість реакції

$$V = kC_A^\alpha C_B^\beta,$$

тоді порядок реакції за  $A$  дорівнює  $\alpha$ , а за  $B$  –  $\beta$  тощо. Загальний порядок такої реакції  $n = \alpha + \beta + \dots$ .

Існують деякі хібні уявлення, пов'язані з поняттям порядку реакції.

1. Не про всі реакції можна сказати, що вони мають якийсь визначений порядок. Так швидкість реакції бром у воднем можна описати рівняннями:



$$\frac{d[\text{HBr}]}{dt} = \frac{k[\text{H}_2][\text{Br}_2]^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{k^1[\text{HBr}]}{[\text{Br}_2]}}$$

У цьому разі говорять не про визначення порядку такої реакції, а про залежність, виражену рівнянням.

2. Ніколи не можна виводити порядок реакції за її стехіометричним рівнянням. Лише для дуже простого механізму такий висновок може бути правильним. Так, реакція  $\text{H}_2 + \text{I}_2 = 2\text{HI}$  справді має другий порядок (перший за воднем, і перший за йодом), як це і впливає зі стехіометрії. Проте реакція  $\text{H}_2 + \text{Br}_2 = 2\text{HBr}$ , не є реакцією другого порядку, тому що вона відбувається за складним механізмом.

Як видно, порядок реакції – строго експериментальна величина, яка показує залежність швидкості реакції від концентрації. Термін «*порядок*» у загальному випадку не можна розглядати як термін «*молекулярність*» реакції, який позначає кількість молекул, що вступають в елементарну реакцію.

Зазначимо, що можливі нецілі порядки реакцій. Так, реакція термічного перетворення параводню в ортоводень має дробовий порядок – 3/2:

$$V = k[n - \text{H}_2]^{3/2}.$$

Дробові порядки також є наслідками складних механізмів реакцій.

**Константа швидкості.** Множник  $k$  з виразів для швидкості реакцій простих порядків називають *константою швидкості* реакції. Інколи, особливо коли ця величина змінюється зі зміною умов проведення реакції, множник  $k$  розглядають як коефіцієнт швидкості цієї реакції. Величина  $k$  чисельно дорівнює швидкості реакції коли концентрації всіх реагентів не перевищують одиниці, тому її зазвичай називають *питомою швидкістю*.

Розмірність константи швидкості, яка змінюється з порядком реакції, легко отримати з виразу для швидкості реакції. Так, для реакції першого порядку, для якої  $V = kC$ , розмірність  $k$  визначають діленням розмірності  $V\left(\frac{\text{моль}}{\text{л} \cdot \text{сек}}\right)$  на розмірність концентрації  $C\left(\frac{\text{моль}}{\text{л}}\right)$ . У цьому разі розмірність  $k$  становить  $(\text{сек})^{-1}$ .

Швидкість реакції другого порядку можна описати або виразом  $V = kC_A C_B$ , або  $V = kC^2$ , тому розмірність константи виводять

діленням розмірності швидкості на квадрат концентрації, й отже, вона становить  $\left(\frac{\text{л}}{\text{моль} \cdot \text{сек}}\right)$ . У загальному випадку для реакції  $n$ -го

порядку  $V = kC^n$ , розмірність константи становить  $\left(\frac{\text{моль}^{1-n}}{\text{л}^{1-n} \cdot \text{сек}}\right)$ .

Швидкість реакції може змінитись залежно від того, за яким із компонентів реакції спостерігає дослідник, при цьому також зазвичай змінюється і константа швидкості.

## 1.2. Аналіз кінетичних результатів

Під час каталітичного дослідження прямим чи непрямим способом вимірюється зміна концентрації речовин за часом. Завдання полягає у вираженні швидкості реакції через концентрацію реагентів, а іноді й продуктів реакції чи інших сполук, які перебувають у системі (каталізаторів, ферментів). Якщо порядок реакції низький, варто визначити як порядок реакції, так і константу швидкості. Якщо навпаки, наприклад у разі реакції бром у воднем, то потрібно визначити вигляд виразу для швидкості реакції та значення констант.

Для розв'язку такої задачі існує два основних методи:

- а) інтегральний;
- б) диференціальний.

Розрахунок результатів за допомогою інтегрального методу починають з виразу для швидкості реакції, який вважають для цього придатним; наприклад, якщо припустити, що порядок реакції перший, то починають з виразу

$$-\frac{dC}{dt} = kC,$$

де  $C$  – концентрація реагенту.

Розрахунки за допомогою інтегрального методу починають з виразу для  $C$  як функції від  $t$ , а потім порівнюють знайдену функцію з експериментальною зміною  $C$  за часом. Якщо значення майже збігаються, то графічно можна визначити значення константи швидкості реакції. Якщо збігу немає, то застосовуючи певні прийоми, намагаються вивести інше рівняння для швидкості, поки не досягнуть задовільного збігу. Цей метод часто має вигляд як метод спроб та помилок, але незважаючи на це, він виявляється корисним, особливо якщо немає жодних ускладнень.

### 1.2.1. Диференціальний метод

У диференціальному методі використовують рівняння швидкості в його диференціальній формі. Значення  $dC/dt$  визначають будуючи графік залежності  $C$  від  $t$ , а кут нахилу визначеної залежності порівнюють безпосередньо з рівнянням швидкості реакції.

Основні труднощі пов'язані з тим, що неможливо точно знайти значення кута нахилу, але незважаючи на цей недолік метод у цілому використовують частіше й, на відміну від інтегрального методу, він не призводить до значних ускладнень, коли треба використовувати складні кінетичні результати.

Диференціальний метод, запропонований Вант-Гоффом, оснований на вимірюванні швидкості реакції визначенням нахилу кривих, що описують залежність концентрації від часу. Точне вимірювання нахилу пов'язане з певними практичними труднощами, але нині для таких цілей виготовлено спеціальні пристрої. Якщо відбувається яка-небудь реакція  $n$ -го порядку, її швидкість залежно від концентрації може бути описана рівнянням

$$V = kC^n.$$

Логарифмування цього виразу дає

$$\lg V = \lg k + n \lg C.$$

Якщо тепер визначити швидкість реакції за різних значень концентрації реагентів і побудувати залежність логарифму швидкості реакції від логарифму концентрації, можна отримати пряму лінію. Нахил

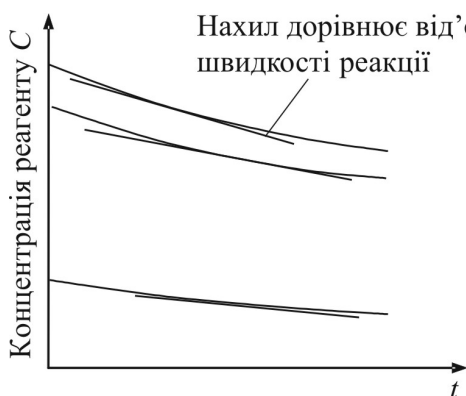


Рис. 1.2. Швидкість реакції за різних значень концентрації реагентів

отриманої прямої буде зображати порядок реакції відносно речовини, концентрацію якої вимірювали, а відрізок, що відрізається на осі  $\lg V$ , буде дорівнювати  $\lg k$ . Цей метод можна застосувати у двох різних варіантах. У першому – основний вплив надається початковим швидкостям, тобто дотичній до кривої на самому початку реакції: для цього швидкості вимірюються за різних початкових концентрацій. Схематично це зображено на рис. 1.2. Отриману залежність в

дослідах із різними концентраціями реагентів зображено на рис. 1.3, до кожної кривої проведено дотичну на самому початку реакції.

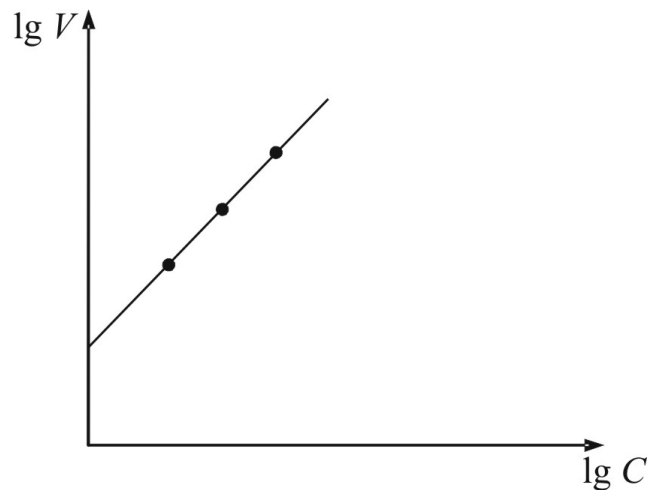
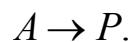


Рис. 1.3. Залежність логарифма швидкості від логарифма концентрації реагенту

### 1.2.2. Інтегральний метод

**Кінетика реакції першого порядку.** Реакцію першого порядку можна схематично зобразити так:



Вважають, що на початку реакції за  $t = 0$ , концентрації  $A$  та  $P$  дорівнюють  $a$  та  $0$  відповідно. Із закінченням певного часу  $t$  концентрація  $P$  становить  $x$ , а концентрація  $A - (a - x)$ . Швидкість, утворення  $P$  становить  $dx/dt$ , тому для реакцій першого порядку можна записати, що

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x).$$

Розділивши змінні, отримуємо

$$\frac{dx}{(a - x)} = k dt.$$

Після інтегрування маємо

$$-\ln(a - x) = kt + I,$$

де  $I$  – константа інтегрування. Її можна визначити за таких граничних умов:  $x = 0$ ,  $t = 0$ , тоді

$$-\ln(a) = I.$$

Підставляючи вираз для  $I$ , отримуємо рівняння

$$\ln \frac{a}{(a - x)} = kt,$$

яке можна переписати як  $x = a(1 - e^{-kt})$  або  $(a - x) = ae^{-kt}$ .

З останнього рівняння видно, що концентрація реагенту  $(a - x)$  експоненціально зменшується за часом від початкової концентрації до нульової.

Існує декілька різних способів перевірити відповідність цих рівнянь експериментальними даними: на рис. 1.4 і 1.5 зображено два графічних способи.

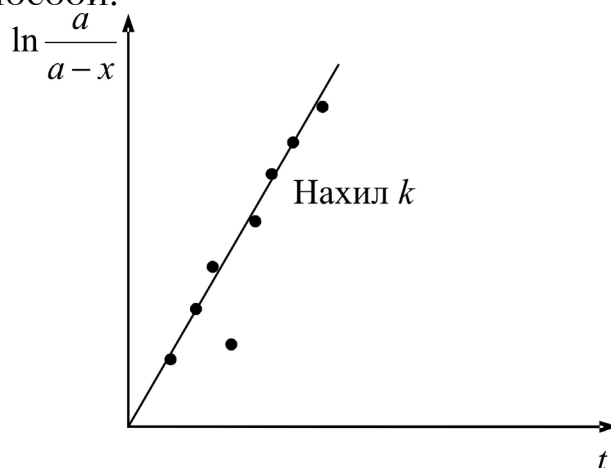


Рис. 1.4. Залежність  $\ln(a/(a - x))$  від часу  $t$

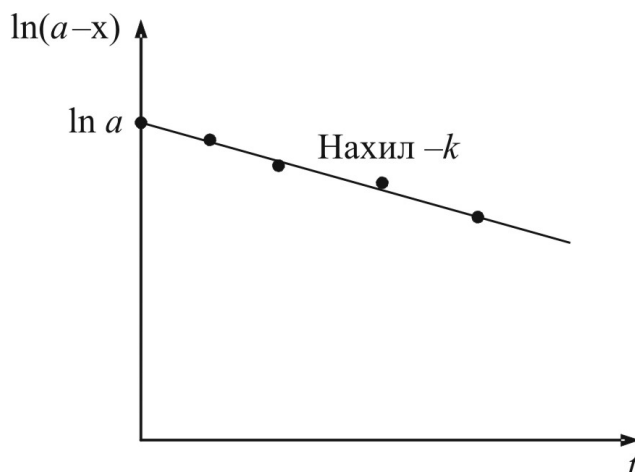


Рис. 1.5. Залежність  $\ln(a - x)$  від часу  $t$

Залежність  $\ln(a/(a - x))$  від  $t$  зображено на рис 1.4. Усі точки лежать на прямій, що проходить через нуль: нахил цієї прямої дає величину  $k$ . Ще простіше побудувати залежність  $\ln(a - x)$  від  $t$  (рис. 1.5) відповідно до іншої форми рівняння

$$\ln(a - x) = \ln a - kt.$$

За нахилом отриманої прямої розраховують величину  $-k$ , а на осі ординат ця пряма відрізає відрізок, що дорівнює  $\ln a$ .

Інший спосіб полягає у розрахунку числових значень функції  $(1/t) \ln(a/(a - x))$  для різних значень  $t$ .

Якщо досліджувана реакція дійсно є реакцією першого порядку, значення  $k$  не мають змінюватись за часом, але якщо є відхилення, потрібно спробувати обробити експериментальні дані за допомогою виразу для реакції першого порядку.

Іноді зручно використовувати величину часу *напівперетворення* чи *напівперіоду* реакції: це час, за який прореагує половина вихідної речовини. Існує просте співвідношення між часом напівперетворення  $\tau$  та константою  $k$ ; це співвідношення можна вивести для реакції першого порядку. Замінивши в отриманих раніше виразах  $x$  на  $a/2$  та  $t$  на  $\tau$ , отримаємо

$$\tau = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{(a - a/2)} = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0,693}{k}.$$

Отже, час напівперетворення обернено пропорційний константі швидкості реакції, причому він не залежить від початкової концентрації  $a$ .

### **Завдання**

1. Для реакції другого порядку  $2A \rightarrow P$  вивести вирази залежностей:

- а) зміни концентрації продукту  $P$  від часу;
- б) часу напівперетворення.

2. Для реакції другого порядку  $A + B \rightarrow P$  знайти вираз залежності концентрації продукту  $P$  від часу.

3. Для реакції  $n$ -го порядку  $nA \rightarrow P$  вивести вирази залежностей:

- а) зміни концентрації продукту  $P$  від часу;
- б) часу напівперетворення.

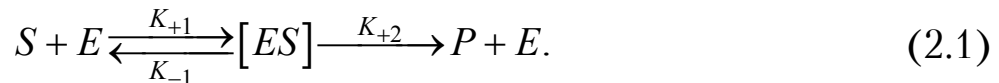
## Розділ 2. НАЙПРОСТІШІ ФЕРМЕНТНІ ПРОЦЕСИ

### 2.1. Система кінетичних рівнянь

У ланцюзі біологічних реакцій, які визначають той або інший процес, можуть бути реакції, що відбуваються з різними швидкостями. Ця різниця може бути значною, тому процес поділяють на «швидкі» й «повільні» реакції. Під час моделювання подібний поділ зводиться до виділення малого параметра. Першим кроком у дослідженні конкретної динамічної системи є зведення її до *безрозмірного* вигляду так, щоб змінні у заданому інтервалі їх змін були одного порядку; тільки після цього можна виділити й порівняти між собою характерні часи в різних рівняннях системи. У реальних хімічних реакціях концентрації різних речовин можуть дуже сильно відрізнятися, тому величини розмірних констант швидкостей ще не визначають швидкості зміни змінних. Це спостерігається на прикладі найпростішої ферментативної реакції.

Реакція переробки субстрату  $S$  у продукті  $P$  за допомогою ферменту  $E$  складається із двох стадій: зворотного утворення фермент-субстратного комплексу  $[ES]$  та розпаду цього комплексу з утворенням продукту  $P$  і поверненням ферменту  $E$  назад у коло реакції.

Схема такої реакції:



Зазвичай зворотна реакція  $P + E \xrightarrow{k_{+2}} [ES]$  має дуже малу швидкість, тому нею знехтуємо. Вважатимемо, що є збільшення субстрату  $S$  інтенсивністю  $v$ , тоді можна записати систему кінетичних рівнянь, що відповідають схемі (2.1):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -k_{+1}SE + k_{-1}[ES] + v; \\ \frac{dE}{dt} = -k_{+1}SE + k_{-1}[ES] + k_{+2}[ES]; \\ \frac{d[ES]}{dt} = k_{+1}SE - k_{-1}[ES] - k_{+2}[ES]; \\ \frac{dP}{dt} = k_{+2}[ES]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Система допускає спрощення: складаємо друге й третє рівняння, знаходимо, що  $(d(E + [ES]))/dt = 0$ , звідки слідує, що

$$E + [ES] = \text{const} = E_0, \quad (2.3)$$

де  $E_0$  – початкова концентрація ферменту.



Рівність (2.3) є умовою збереження в процесі реакції загальної кількості молекул ферменту – вільних і зв'язаних у комплексі.

Отже, одне з рівнянь системи (2.2) можна замінити алгебраїчною рівністю (2.3), тоді перше й третє рівняння матимуть вигляд

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -K_{+1}S(E_0 - [ES]) + K_{-1}[ES] + \nu; \\ \frac{d[ES]}{dt} &= K_{+1}SE_0 - [ES](K_{-1} + K_{+2} + K_{+1}S).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Система рівнянь (2.4) є замкненою й не містить змінної  $P$ , це означає, що четверте рівняння описує «ведений процес» швидкість якого визначається розв'язанням системи (2.4).

Зведемо систему (2.4) до безрозмірного вигляду. Це можна зробити декількома способами. Наприклад, як характерні масштаби можна обрати стаціонарні концентрації субстрату й фермент-субстратного комплексу. Під стаціонарними концентраціями розуміють точку рівноваги системи рівнянь, коли швидкості всіх змінних системи прямують до нуля. Прирівнюючи до нуля праві частини системи (2.4), знаходимо стаціонарні концентрації:

$$\bar{S} = \frac{K_m \nu}{K_{+2} E_0 - \nu}; \quad [\bar{ES}] = \frac{\nu}{K_{+2}},$$

де  $K_m(K_{+1} + K_{+2}) / K_{+1}$ .

Введемо змінні

$$x = \frac{[ES]}{[\bar{ES}]}; \quad y = \frac{S}{\bar{S}},$$

якщо процес відбувається поблизу стаціонарного стану, змінні  $x$  та  $y$  явно близько одиниці. Запишемо рівняння (2.4) з урахуванням нових змінних:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{T_x} [ay - x(a - 1 + y)]; \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{T_y} [-y(a - x) + bx + (a - b - 1)],\end{aligned}\tag{2.5}$$

де введено такі параметри:

$$\begin{aligned}a &= \frac{E_0}{[\bar{ES}]} = \frac{E_0 K_{+2}}{\nu}; \quad b = \frac{K_{-1}(a - 1)}{K_{-1} + K_{+1}}; \\ T_x &= \frac{1}{K_{+1} \bar{S}}; \quad T_y = \frac{1}{K_{+1} [\bar{ES}]}.\end{aligned}$$

Оцінимо порядки величин, що входять до рівнянь (2.5). Концентрації субстратів зазвичай бувають одного порядку з константою  $K_m$ :

$$\bar{S} \approx K_m \approx 10^{-2} \text{ моль/л,}$$

концентрації ферментів набагато порядків нижчі:

$$[ES] \approx E_0 \approx 10^{-6} \text{ моль/л,}$$

тому параметри  $a$  та  $b$  дорівнюють близько одиниці, час  $T_x$  та  $T_y$  істотно різний і відношення  $T_x/T_y = \varepsilon$  може служити як малий параметр:

$$\varepsilon = \frac{[ES]}{S} \approx 10^{-4}.$$

Введемо безрозмірний час  $\tau = \frac{t}{T_y}$ , тоді рівняння (2.4) матимуть канонічний вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dx}{d\tau} &= ay - x(a - 1 + y); \\ \frac{dy}{d\tau} &= -y(a - x) + bx + (a - b - 1). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Відповідно до теореми Тихонова, якщо є система  $N$  рівнянь, частина з яких містить малий параметр  $\varepsilon$  перед похідною (ці рівняння називають приєднаними, а інші – виродженими), то розв'язок повної системи прямує до виродженого за  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Перше рівняння системи (2.6) можна розглядати як приєднане, а друге – як вироджене. Відповідно до стандартної процедури досліджуватимемо, насамперед, стійкість стаціонарного стану приєданого рівняння. Розглядаючи  $y$  як параметр, знайдемо стаціонарне значення  $\bar{x} = ay/(a - 1 + y)$ . Введемо нову змінну  $\xi = x - \bar{x}$  й, обмежуючись малими відхиленнями від стаціонарного значення, запишемо лінеаризоване рівняння

$$\varepsilon \frac{d\xi}{d\tau} = -(a - 1 + y)\xi,$$

його розв'язок буде

$$\xi = \xi_0 \exp\left\{-(a - 1 + y)\frac{\tau}{\varepsilon}\right\},$$

тобто відхилення від стаціонарного значення прямують до нуля за всіх позитивних значеннях  $y$ ; отже, точка  $\bar{x}$  стійка, тобто за  $\tau \rightarrow \infty$  й  $x \rightarrow \bar{x}$ .

Отже, умови застосовності теореми виконані й перше «швидке» диференціальне рівняння (2.6) можна замінити алгебраїчним

співвідношенням

$$x = \frac{ay}{a-1+y},$$

або, повертаючись до розмірних змінних,

$$[ES] = \frac{E_0 S}{K_m + S}.$$

Цей вираз називають *формулою Міхаеліса-Ментен*. Величина  $K_m$  має розмірність концентрації, її називають *константою Міхаеліса*.

Запишемо друге «повільне» рівняння системи (2.6) у розмірних змінних

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{K_{+2}E_0S}{K_m + S} + v.$$

Повертаючись до вихідної системи (2.2) можна записати вираз для швидкості веденого процесу – утворення продукту

$$\frac{dP}{dt} = K_{+2}[ES] = \frac{K_{+2}E_0S}{K_m + S}.$$

За  $S \ll K_m$  швидкість утворення продукту лінійно залежить від величини  $S$ . Зі збільшенням концентрації субстрату ця швидкість не збільшується безкінечно, а прагне до максимального значення,

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)_{\max} = K_{+2}E_0.$$

### Завдання

1. Визначити стаціонарні концентрації субстрату і фермент-субстратного комплексу системи (2.4).
2. Вивести перше рівняння системи (2.5).

# Розділ 3. ТОПОЛОГІЧНІ МЕТОДИ І ГРАФІЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

## 3.1. Інтегральні криві рівнянь другого порядку

Топологічний метод аналізу диференціальних рівнянь є одним з найважливіших засобів дослідження різних явищ, пов'язаних із нелінійними коливаннями та процесами.

Цей метод використовують для вивчення автономних систем. Із його допомогою розв'язки диференціальних рівнянь шукають не як явні функції часу, а у вигляді інтегральних кривих у фазовому просторі або, у більш загальному випадку, у просторі станів. Дослідження інтегральних кривих дозволяє отримати достатнє уявлення про якісний характер розв'язку, а також деякі кількісні дані. Графічні методи використовують розв'язки, переважно для систем малого порядку.

Умови рівноваги, коли система перебуває у стані спокою, відповідають *особливій точці* у просторі станів; періодичним розв'язкам відповідають *граничні цикли*. Отже, інтегральні криві, які прямують до таких особливих точок або граничних циклів, можуть зображувати перехідні режими системи.

Для автономної системи, яку описують двома диференціальними рівняннями  $dx / dt = X(x, y)$  та  $dy / dt = Y(x, y)$ , інтегральна крива має вигляд

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}.$$

Точку  $(x_0, y_0)$ , у якій функції  $X(x_0, y_0) = Y(x_0, y_0) = 0$ , називають *особливою точкою*.

## 3.2. Класифікація особливих точок

Для дослідження особливих точок розглядають лінеаризовану систему диференціальних рівнянь, які описують рух поблизу положення рівноваги (особливої точки):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= X(x, y) = a_1x + a_2y + X_2(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y) = b_1x + b_2y + Y_2(x, y),\end{aligned}$$

де  $X_2(x, y)$ ,  $Y_2(x, y)$  – функції порядку вищого за перший.

Розкладемо праві частини системи за степенями  $\xi$  та  $\eta$  – малим відхиленням від стаціонарних значень  $x_0, y_0$ :

$$\xi = x - x_0; \quad \eta = y - y_0.$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \xi + \frac{\partial X}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \eta = a_1 \xi + a_2 \eta;$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial Y}{\partial x} \Big|_{x_0, y_0} \xi + \frac{\partial Y}{\partial y} \Big|_{x_0, y_0} \eta = b_1 \xi + b_2 \eta.$$

Корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ a_1 + b_2 \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \right];$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ a_1 + b_2 \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1} \right].$$

Залежно від характеру інтегральних кривих біля особливих точок, тобто залежно від коренів характеристичних рівнянь, особливі точки поділяють на:

– вузлову точку (вузол), якщо обидва корені характеристичного рівняння дійсні та одного знаку:

$$(a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 \geq 0;$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0;$$

– сідло, якщо обидва корені дійсні, але мають різні знаки:

$$(a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 > 0;$$

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 < 0;$$

– фокус, якщо корені комплексно-спряжені:

$$(a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 < 0;$$

– центр або фокус, якщо обидва корені уявні:

$$(a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1 < 0;$$

$$a_1 + b_2 = 0.$$

Для стійких особливих точок дійсна частина коренів характеристичного рівняння від'ємна, а для нестійких – додатна.

Границю стійких фокусів та вузлів визначають за виразом

$$a_1 + b_2 = 0.$$

Границя сідел

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Границя фокусів

$$(a_1 + b_2)^2 - 4(a_2 b_1 - a_1 b_2) = 0.$$

### 3.3. Метод ізоклін

Метод ізоклін дає змогу досліджувати поле інтегральних кривих графічно, не розв'язуючи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)} \equiv F(x, y) = \text{const},$$

де  $F(x, y) = C$  – ізокліна, тобто крива на площині  $(x, y)$ , вздовж якої нахил  $dy/dx$  інтегральних кривих постійний.

Після того як крива  $F(x, y) = C_i$  проведена, уздовж неї наносять короткі відрізки прямих, що мають заданий нахил  $dy/dx = C$ . Повторюючи ці побудови для інших значень  $C_i$ , отримують криві  $F(x, y) = C_i$  із відповідними нахилами. Ці нахили визначають поле напрямів дотичних та інтегральних кривих. Починаючи з точки  $x_0, y_0$  та прямуючи завжди згідно з направленням ліній поля, можна накреслити неперервну криву, що є інтегральною кривою, яка проходить крізь початкову точку  $(x_0, y_0)$ .

### 3.4. Приклади застосування методу ізоклін

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння першого порядку, яке легко можна розв'язати методом розділення змінних

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = t + \frac{t}{x} = t \left( 1 + \frac{1}{x} \right);$$

$$\frac{dx}{\left( 1 + \frac{1}{x} \right)} = t dt;$$

$$\int \frac{x}{1+x} dx = \int t dt;$$

$$\int \frac{x+1-1}{1+x} dx = \int t dt,$$

де  $x - \ln|x+1| = \frac{1}{2}t^2 + C$  – розв'язок цього диференціального рівняння, яке достатньо важко аналізувати.

Отримаємо розв'язок цього самого рівняння методом ізоклін

$$\frac{dx}{dt} = t \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = C_i.$$

1. Знаходимо рівняння ізоклін

$$t \left( 1 + \frac{1}{x} \right) = C_i,$$

де  $x = \frac{t}{C_i - t}$  – рівняння ізокліни, тобто криві, на кожній з яких

дотична до шуканої інтегральної кривої становить  $\frac{dx}{dt} = C_i$ .

2. З рівняння ізоклін визначаємо асимптоти:

$$\text{за } t \rightarrow \infty; x \rightarrow -1;$$

$$\text{за } x \rightarrow \infty; C_i = t.$$

3. Визначаємо області, в яких інтегральна крива ввігнута ( $dx/dt \geq 0$ ) і випукла ( $dx/dt \leq 0$ ), тоді легко знайти другу похідну потрібного рівняння (рис. 3.1)

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d^2x}{dt^2} = 1 + \frac{d}{dt} \left( \frac{t}{x} \right) = 1 + \frac{x - t dx/dt}{x^2} = \frac{x^2 + x - t - t^2/x}{x^2} = \\ &= \frac{x^3 + x^2 - xt^2 - t^2}{x^3} = x^{-3} [x^2(x+1) - t^2(x+1)] = \\ &= x^{-3} [(x+1)(x^2 - t^2)] = x^{-3} [(x+1)(x-t)(x+t)]. \end{aligned}$$

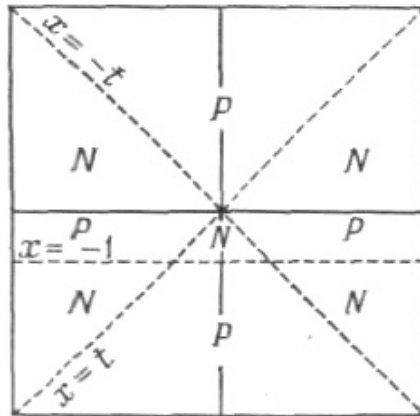


Рис. 3.1. Області випуклості (N) і ввігнутості (P) інтегральних кривих рівняння  $dx/dt = t + (t/x)$

4. Будуємо деякі ізокліни (рис. 3.2)

а)  $C_1 = 0; \frac{dx}{dt} = 0; x = -1$  ( $t \rightarrow 0$ , вісь  $x$  ізокліна  $\frac{dx}{dt} = 0$ );

б)  $C_2 = 1; \frac{dx}{dt} = 1; x = \frac{t}{1-t};$  ( $t = 1$  – асимптота);

- в)  $C_3 = -1; \frac{dx}{dt} = -1; x = \frac{t}{-1-t};$  ( $t = -1$  – асимптота);
- г)  $C_4 = 3; \frac{dx}{dt} = 3; x = \frac{t}{3-t};$  ( $t = 3$  – асимптота);
- д)  $C_5 = -3; \frac{dx}{dt} = -3; x = \frac{t}{-3-t};$  ( $t = -3$  – асимптота).

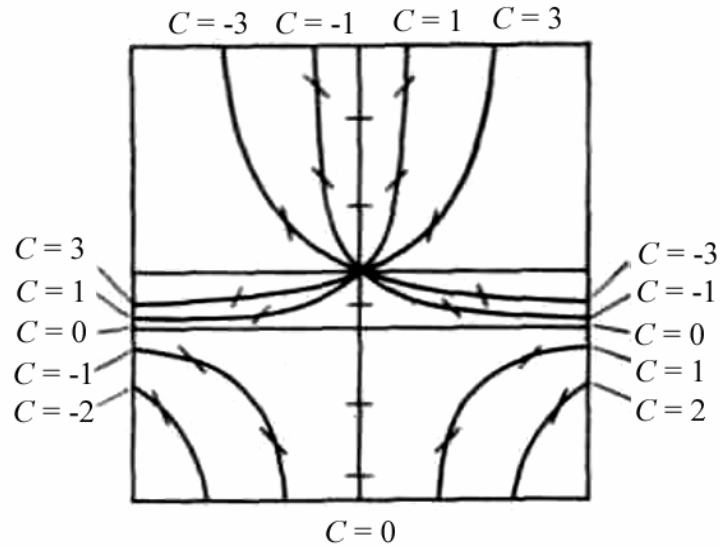


Рис. 3.2. Рівняння ізокліни

5. Будуємо сімейство шуканих інтегральних кривих, дотичних до побудованих ізоклін із заданим нахилом (рис. 3.3).

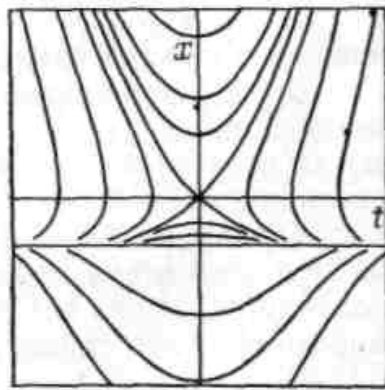


Рис. 3.3. Інтегральні криві диференціального рівняння

Як приклад застосування методу ізоклін для диференціального рівняння другого порядку розглянемо класичне нелінійне диференціальне рівняння Ван-дер Поля, яке описує коливальну систему зі змінним коефіцієнтом демпфірування

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1-x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \text{за} \quad \varepsilon > 0.$$



Це рівняння другого порядку можна звести до системи двох рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y; \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon(1-x^2)y - x.\end{aligned}$$

Інтегральна крива визначається рівнянням

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varepsilon(1-x^2)y - x}{y}.$$

Єдиною особливою точкою цього рівняння є початок координат  $x_0 = y_0 = 0$ . Звідси випливає, що метод ізоклін застосовується усюди, крім цієї точки.

Коефіцієнти лінійного розкладу системи в околі особливої точки:

$$\begin{aligned}a_1 &= 0; & a_2 &= 1; \\ b_1 &= -1; & b_2 &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Корені характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \right],$$

за  $\varepsilon < 2$  особлива точка – нестійкий фокус;  
за  $\varepsilon > 2$  особлива точка – нестійкий вузол.

Рівняння ізокліни

$$y = \frac{x}{\varepsilon(1-x^2) - C_i}.$$

Графічну побудову для  $\varepsilon = 1$  зображено на рис. 3.4.

1.  $C_1 = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0; \quad y = \frac{x}{1-x^2};$
2.  $C_2 = 1; \quad \frac{dy}{dx} = 1; \quad y = -\frac{1}{x};$
3.  $C_3 = -1; \quad \frac{dy}{dx} = -1; \quad y = \frac{x}{2-x^2}.$

Враховуючи умови Бендиксона, якщо вираз  $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$  змінює знак, то можлива наявність стійкого граничного циклу. Визначимо область зміни знаку виразу

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0 + (1-x^2) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0.$$

Знак змінюється на межі  $x = \pm 1$ .

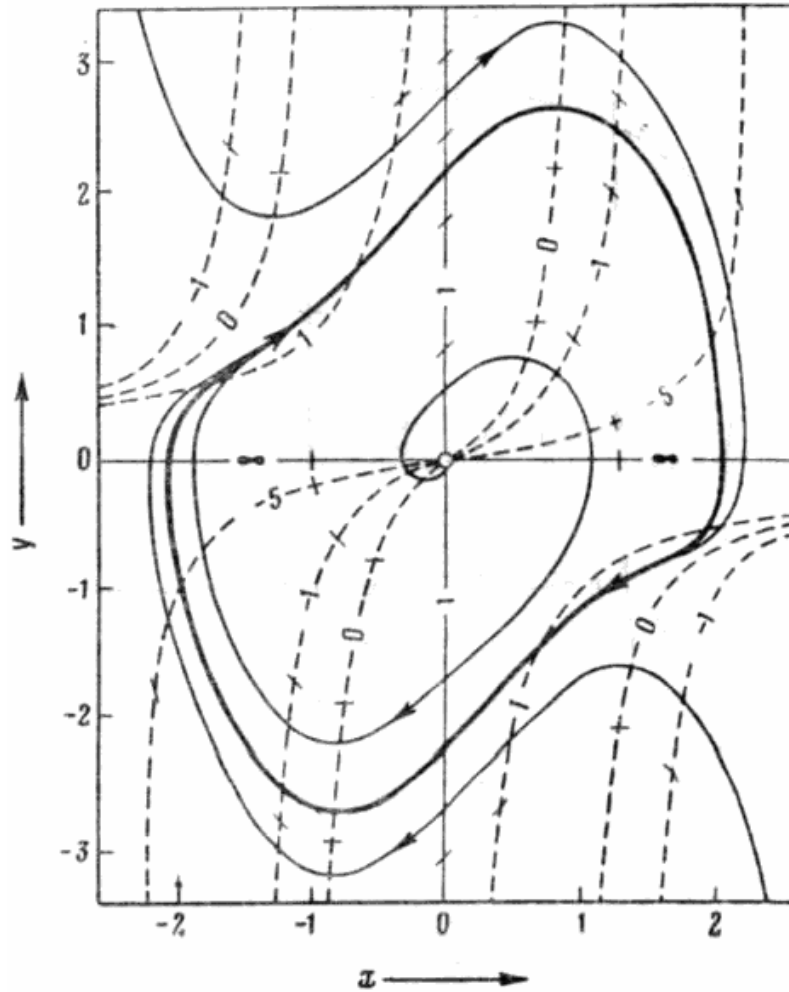


Рис. 3.4. Фазовий портрет рівняння Ван-дер Поля

Всередині області  $x < \pm 1$  траєкторії віддаляються від особливої точки  $x_0 = y_0 = 0$  нестійкого фокуса і зсередини навиваються на граничний цикл. Траєкторії, які перебувають поза граничним циклом, прагнуть до нього ззовні.

### Завдання

1. Знайти розв'язки рівнянь методом ізоклін:

$$1.1. \frac{dx}{dt} = x + 5t - 2; \quad x_0 = 5, \quad t_0 = 0.$$

$$1.2. \frac{dx}{dt} = -2t - x; \quad x_0 = -1, \quad t_0 = 0.$$

$$1.3. \frac{dx}{dt} = -x + t; \quad x_0 = 0,2, \quad t_0 = 0.$$

$$1.4. \frac{dx}{dt} = 3x + 2t - 5; \quad x_0 = 4, \quad t_0 = 0.$$

1.5.  $\frac{dx}{dt} = -4x - 5t;$   $x_0 = 0, t_0 = 0.$

1.6.  $\frac{dx}{dt} = x + 3t;$   $x_0 = 0, t_0 = 0.$

1.7.  $\frac{dx}{dt} = 2x + 3t;$   $x_0 = 0, t_0 = 0.$

1.8.  $\frac{dx}{dt} = -4x - 5t;$   $x_0 = 0, t_0 = 0.$

2. Знайти розв'язки рівнянь

2.1.  $\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 16;$  із мінімальним значенням  $X_{\min} = 2.$

2.2.  $\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 25;$  із максимальним значенням  $X_{\max} = 4.$

2.3.  $\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 100;$  із мінімальним значенням  $X_{\min} = 6.$

2.4.  $\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 106;$  із максимальним значенням  $X_{\max} = 5.$

2.5.  $\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 64;$  із мінімальним значенням  $X_{\min} = 5.$

3. Дослідити особливі точки системи рівнянь

3.1. Знайти межу сідел системи:

$$\dot{x} = 1 - y \ln |x|;$$

$$\dot{y} = x(x^2 + 2y - a^2).$$

3.2. Дослідити особливі точки системи:

$$\dot{x} = x + 8 - y;$$

$$\dot{y} = xy + 7.$$

3.3. Знайти межу стійких вузлів та фокусів системи:

$$\dot{x} = -x + xy^2;$$

$$\dot{y} = x + y.$$

3.4. Знайти межу сідел системи:

$$\dot{x} = x + 5y^2;$$

$$\dot{y} = x^2 + xy.$$

3.5. Знайти межу фокусів системи:

$$\dot{x} = y(x + y + 4) + x^2;$$

$$\dot{y} = 5x + 4y - 6.$$

3.6. Знайти умови стійкості системи:

$$\dot{x} = y(5 + x + x^2) - 2x;$$

$$\dot{y} = (y + 2y^2) + x + x^2.$$

3.7. Знайти межу фокусів системи:

$$\dot{x} = 1 - y \ln |x|;$$

$$\dot{y} = x(x^2 + 2y - a^2).$$

3.8. Дослідити стаціонарні точки системи:

$$\dot{x} = x + y + 6;$$

$$\dot{y} = x(x + y^2).$$

3.9. Дослідити стаціонарні точки системи:

$$\dot{x} = xy;$$

$$\dot{y} = y - 6.$$

3.10. Знайти межу стійкості вузлів та фокусів системи:

$$\dot{x} = 1 - y \ln |x|;$$

$$\dot{y} = x(x^2 + 2y - a^2).$$

## Розділ 4. ФАЗОВИЙ ПОРТРЕТ

### 4.1. Маятник. Основні співвідношення

Розглянемо найпростішу динамічну систему – маятник без тертя. У будь-якій точці  $A$  рух відбувається під дією тангенціальної складової сили тяжіння (рис. 4.1)

$$F = -mg \sin \varphi,$$

де  $m$  – маса маятника;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\varphi$  – кут відхилення маятника від вертикалі  $O-O'$ ;  $l$  – довжина підвісу маятника.

$$V = S' = l\varphi';$$

$$a = V' = l\varphi'';$$

$$ma = -mg \sin \varphi;$$

$$ml\varphi'' = -mg \sin \varphi;$$

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0;$$

$$\varphi'' + \omega_0^2 \sin \varphi = 0; \quad \left( \omega_0^2 = \frac{g}{l} \right).$$

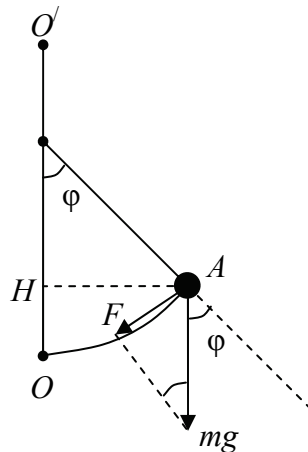


Рис. 4.1. Маятник

Отримане рівняння руху маятника є нелінійним тільки для малих коливань, коли  $\sin \varphi = \varphi$  ( $\varphi \approx 8,5 - 10^\circ$ ), то рівняння буде лінійне:

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

з відомим розв'язком  $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t)$ , і періодом  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

Кінетична енергія маятника

$$E_K = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}ml^2(\varphi')^2.$$

Потенціальна енергія маятника (рис. 4.1)

$$E_{\Pi} = mg(OH) = mg(AO) \sin \frac{\varphi}{2} = mg2l \sin^2 \frac{\varphi}{2} = 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Повна енергія

$$E = \frac{1}{2}ml^2(\varphi')^2 + 2mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Нормуємо величину повної енергії маятника на величину  $E_0 = \frac{1}{2}m(l\omega_0)^2$  – кінетичну енергію маси  $m$ , що рівномірно обертається за окружністю радіуса  $l$  з періодом  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . Отже,

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{\varphi'}{\omega_0}\right)^2 + 4\sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (4.1)$$

## 4.2. Фазовий портрет маятника

На фазовій площині зв'язок між кутовою швидкістю  $\varphi'$  й кутом відхилення  $\varphi$  визначається рівнянням енергії (4.1), якщо  $E = 0$ , система перебуває у спокої та на фазовій діаграмі у точці 0.

Якщо  $E/E_0 < 4$ , то існує  $\varphi_{\max} < \pi$ , оскільки має виконуватися нерівність  $\frac{E}{E_0} - 4\sin^2 \frac{\varphi}{2} > 0$ , тому  $\varphi$  не може досягати значення  $\pi$  (точка  $O'$  на рис. 4.1). Маятник коливається між  $-\varphi_{\max}$  і  $+\varphi_{\max}$ , тобто рух періодичний. За малих кутів  $\varphi$   $\left(\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}\right)$  вираз для енергії відповідає колу 1 (рис. 4.2).

$$\left(\frac{\varphi'}{\omega_0}\right)^2 + \varphi^2 = \sqrt{\left(\frac{E}{E_0}\right)^2}.$$

За більших кутів відхилення коло трансформується в «овал». Нелінійна сила дає менше прискорення, ніж лінійна, тому період нелінійних коливань більший, ніж період лінійних (крива 2, рис. 4.2).

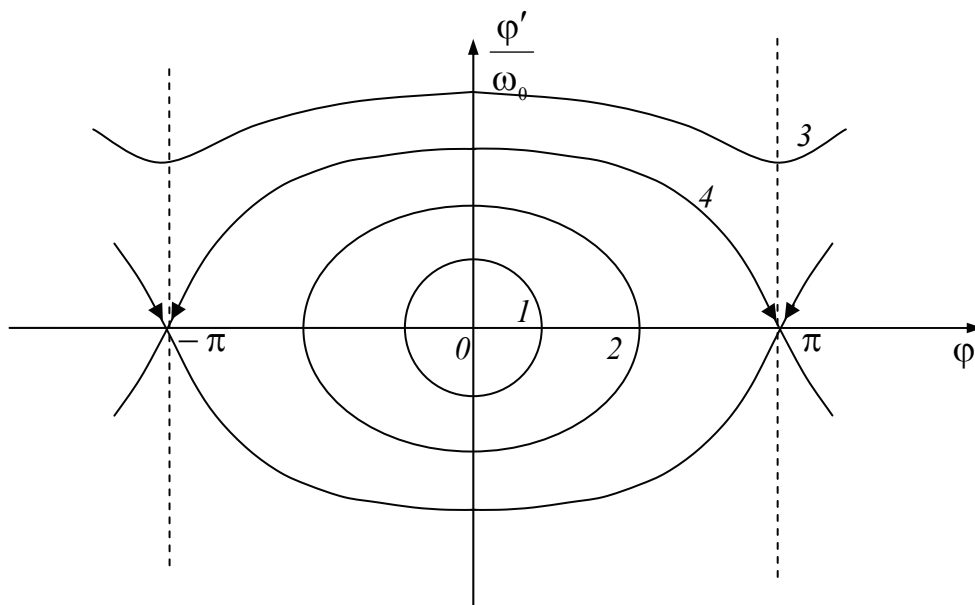


Рис. 4.2. Фазовий портрет маятника

Якщо  $(E/E_0) > 4$ , то навіть за максимальної потенціальної енергії (за  $\varphi = \pi$ )  $4 \sin^2(\varphi/2)$  та кінетичної енергії  $(\varphi'/\omega_0)^2 \neq 0$ , маятник проскакує верхню точку  $O'$ , переходячи в обертальний рух (крива 3, рис. 4.2).

Якщо  $(E/E_0) = 4$ , тоді

$$\left(\frac{\varphi'}{\omega_0}\right)^2 = 4\left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) = 4\cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Якщо  $\varphi = \pi$  або  $\varphi = -\pi$  (точка  $O'$ , рис. 4.1), швидкість дорівнює нулю, то маятник перебуває у нестійкій точці рівноваги. Крива 4 (рис. 4.2) – сепаратриса, що відокремлює фазові траєкторії коливальних рухів від фазових траєкторій обертових рухів.

За  $(E/E_0) = 4$  можливий також інший рух маятника. Нехай за  $t = 0$ ;  $\varphi' = 2\omega_0$ , тоді  $(E/E_0) = 4$  і маятник рухається у верхній точці так, що його швидкість у положенні  $\varphi$  становить  $\varphi' = 2\omega_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ .

Чим ближче  $\varphi$  до  $\pi$ , тим менша швидкість. Якщо кут відхилення близький до  $\pi$ , то малий кут  $\pi - \varphi \equiv 2\alpha$ , звідси

$$\alpha' \approx -\omega_0 \alpha.$$

Це рівняння має розв'язок  $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\omega_0 t}$ .

### 4.3. Солітонні розв'язки на сепаратрисі

*Метод гіперболічних функцій.* Знайдемо розв'язок рівняння геометричною побудовою

$$\varphi' = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Для цього використаємо властивості гіперболічних функцій. На площині  $(x,y)$  побудуємо графік гіперболи  $y=1/x$  (рис. 4.3).

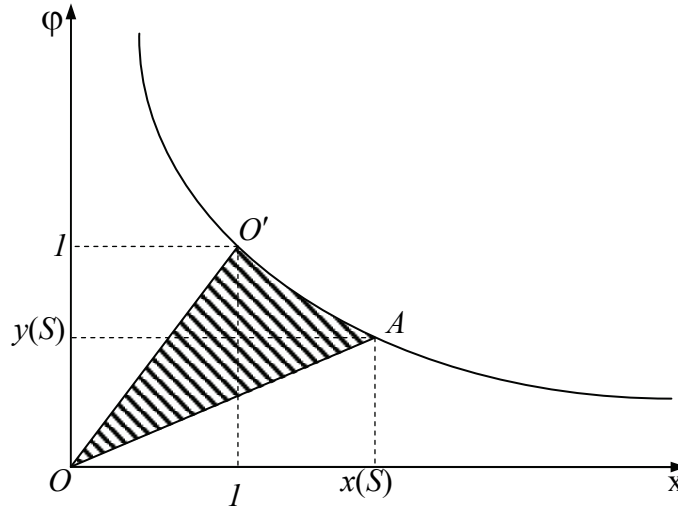


Рис. 4.3. Гіперболічна функція

Позначимо площу фігури  $OO'A \equiv S'$ .

Проекція точки  $A$  на вісь  $Ox$  становить  $x(S) = \exp(s) = e$ .

Площа  $OO'A$  дорівнює площі  $O'Ax(S)1$ , тому що ці дві фігури отримано вирахуванням рівновеликих трикутників  $OAx(S)$  та  $OO'1$  з однієї й тієї самої фігури  $OO'Ax(S)$ .

$$\text{Площа трикутника } OAx(S) \equiv \frac{1}{2} y(S)x(S) = \frac{1}{2} y(S) \frac{1}{y(S)} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Площа трикутника } OO'1 \equiv \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Площа фігури } O'Ax(S)1 = \int_1^{x(S)} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{x(S)} = \ln x(S),$$

звідси  $S' = \ln x(S)$ , тобто  $x(S) = \exp(S) = e^S$ .

За допомогою геометричної побудови знайдемо розв'язок рівняння (рис. 4.4)

$$\varphi' = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}.$$



Позначимо  $\angle O'OA = \frac{\varphi}{4}$ :

$$\angle AOx = \psi,$$

тоді очевидно, що

$$\psi \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{4} = \frac{\pi - \varphi}{4};$$

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi - \varphi}{4} \right) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{e^{-s}}{e^s} = e^{-2s} = \exp(-2S);$$

$$\operatorname{tg} \psi = \exp(-2S).$$

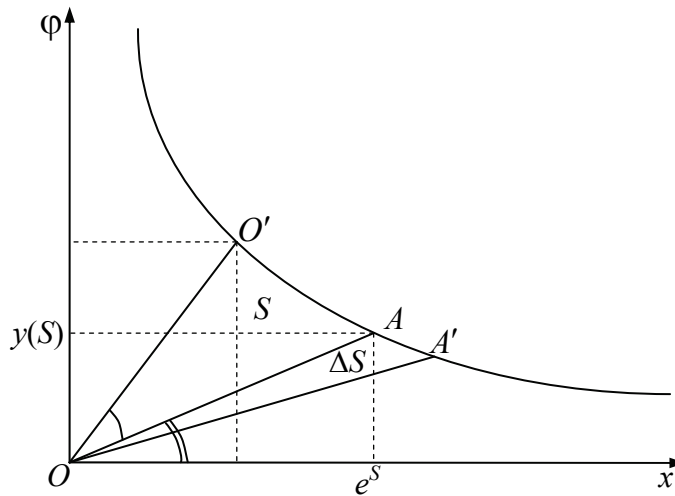


Рис. 4.4. Геометрична побудова розв'язку  $\Delta\varphi/\Delta S$

Збільшення площі  $\Delta S$  за малих зсувів точки  $A$  за гіперболою можна записати як площу малого сектора з радіусом  $OA \approx OA'$  і кутом  $-\Delta\psi = \angle AOA'$ ,

$$\Delta S = -\frac{1}{2} \Delta\psi (OA)^2.$$

$$(AO) = \exp(S) / \cos \psi \text{ з } \triangle O A e^S;$$

тоді 
$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi} = -\frac{2}{(OA)^2} = -2 \cos^2(\psi) e^{-2S} = -2 \cos^2(\psi) \operatorname{tg} \psi = -\sin 2\psi.$$

Повертаючись до кута  $\varphi$ :

$$4\psi = \pi - \varphi \rightarrow \varphi = \pi - 4\psi.$$

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = -4 \frac{\Delta\psi}{\Delta S} = 4 \sin 2\psi = 4 \sin \left( \frac{\pi - \varphi}{2} \right) = 4 \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right).$$

Візьмемо  $S = \frac{1}{2}\omega_0 t$ , тоді  $\Delta S = \frac{1}{2}\omega_0 \Delta t$ ;

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{2\Delta\varphi}{\omega_0 t} = 4\cos\frac{\varphi}{2} \rightarrow \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\omega_0 \cos\frac{\varphi}{2};$$

$$\varphi' = 2\omega_0 \cos\frac{\varphi}{2};$$

$$\operatorname{tg}\psi = \exp(-2S) = \exp(-\omega_0 t);$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right) = \exp(-\omega_0 t).$$

Отже, видно, що  $\varphi(t)$ , залежність якого від  $t$  визначена цим рівнянням, задовольняє рівняння  $\varphi' = 2\omega_0 \cos\frac{\varphi}{2}$ .

Рух маятника, що відповідає сепаратрисі фазової діаграми, можна записати за допомогою елементарних функцій

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right) = e^{-\omega_0 t}.$$

Якщо  $S(t) \rightarrow 0$ , то  $t \rightarrow 0$ , звідси  $\varphi = \pi - 4\operatorname{arctg}(e^{-\omega_0 t})$ . Побудуємо графік цієї функції (рис. 4.5).

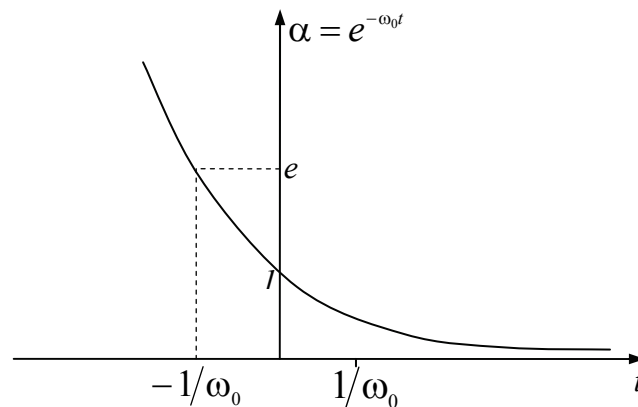


Рис. 4.5. Залежність  $\alpha$  від часу  $t$

Коли  $t$  зростає від  $-\infty$  до  $+\infty$ , то  $\alpha$ ,  $\alpha = e^{-\omega_0 t}$ , зменшується від  $+\infty$  до 0 (рис. 4.5), при цьому  $\operatorname{arctg}\alpha$  набуває значень від  $\pi/2$  до 0 (рис. 4.6), а  $\varphi$  змінюється від  $-\pi$  до  $+\pi$

Отже, описаний розв'язок належить сепаратрисі, що проходить із точки  $-\pi$  у точку  $+\pi$ .

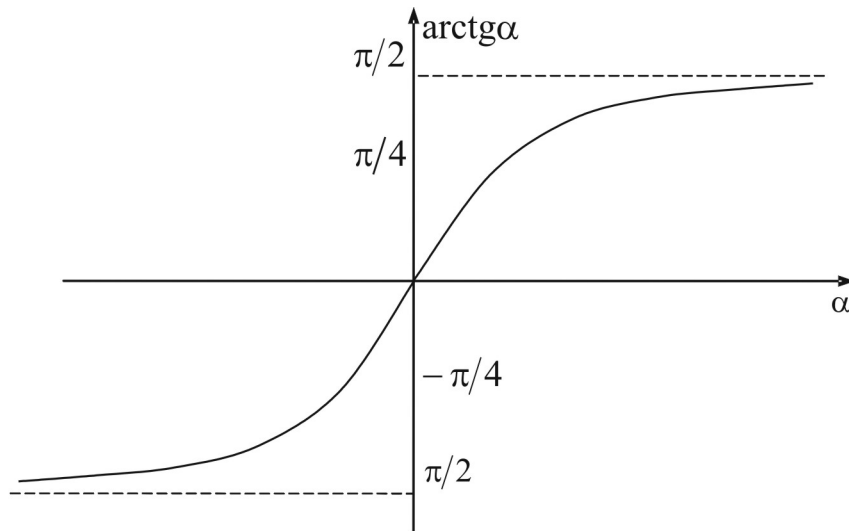


Рис. 4.6. Залежність  $\arctg \alpha$  від  $\alpha$

Співвідношення для кута  $\varphi$  можна записати через гіперболічну функцію

$$\varphi' = 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2} \rightarrow \varphi' = \frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}(\omega_0 t)} = \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}.$$

Залежність  $\operatorname{ch}(\omega_0 t) = f(t)$  показано на рис. 4.7.

З рисунка видно, що  $\operatorname{ch}(\omega_0 t) = \frac{1}{2}(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos \varphi/2} = \frac{1}{\cos \varphi/2}$ , тому що

$$\operatorname{tg} \psi = e^{-2S}; \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = e^{2S}; \quad e^{2S} + e^{-2S} = \operatorname{tg} \psi + \frac{1}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{\operatorname{tg} \psi} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\psi};$$

$$\sin 2\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

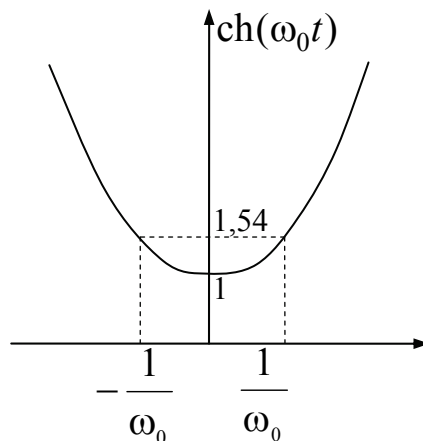


Рис. 4.7. Залежність  $\operatorname{ch}(\omega_0 t)$  від часу

«Солітонний» розв'язок рівняння маятника зображено на рис. 4.8.

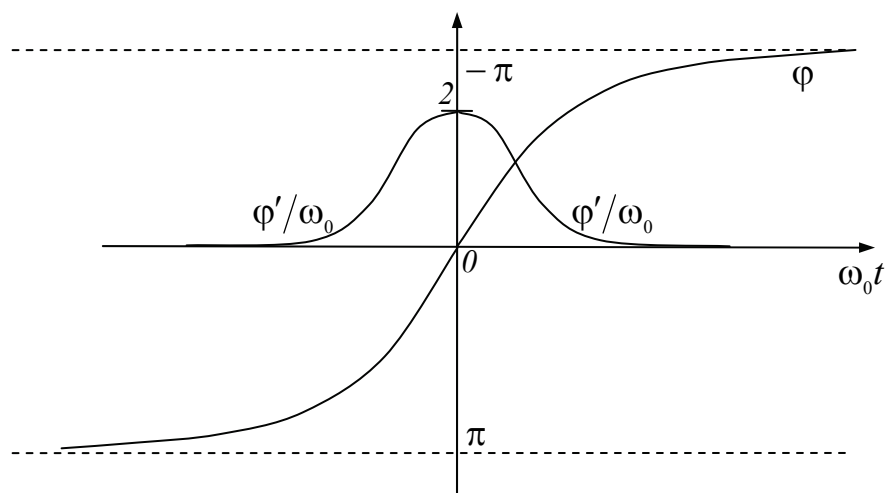


Рис. 4.8. «Солітонний» розв'язок рівняння маятника

Поблизу сепаратриси частота  $\omega \rightarrow 0$ , швидкість системи наближається до періодичної послідовності солітоноподібних імпульсів (рис. 4.9).

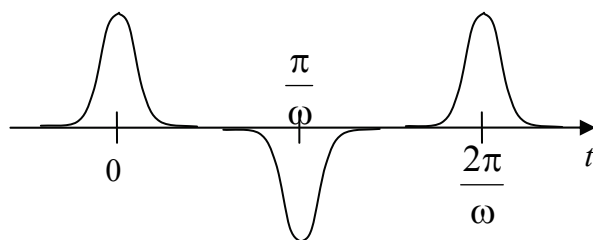


Рис. 4.9. Залежність швидкості системи від часу

Отже, за допомогою гіперболічної функції можна отримати «солітонний» розв'язок рівняння маятника.

#### 4.4. Метод послідовних наближень

Крім якісного розгляду систем за допомогою фазової площини, дуже розповсюджений метод послідовних наближень.

Рівняння руху маятника

$$\varphi'' + \omega_0^2 \sin \varphi = 0; \quad \left( \omega_0^2 = \frac{g}{l} \right),$$

виразимо  $\sin \varphi$  у вигляді ряду Маклорена:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{3!} \varphi^3 + \frac{1}{5!} \varphi^5 + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} \varphi^{2n} + \dots$$

Обмеживши розгляд значення  $\varphi \ll 1$ , зупинимося на члені з  $\varphi^3$ , тоді

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi - \frac{\omega_0^2}{6} \varphi^3 = 0.$$

Подаючи це рівняння в узагальненій формі, отримаємо

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi + \alpha \omega_0^2 \varphi^3 = 0.$$

Знайдемо розв'язок у вигляді ряду за степенем  $\alpha$ :

$$\varphi = \varphi_0 + \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \dots$$

Підставляючи цей ряд у рівняння руху в узагальненій формі, отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi_0'' + \alpha \varphi_1'' + \alpha^2 \varphi_2'' + \omega_0^2 \varphi_0 + \alpha \omega_0^2 \varphi_1 + \alpha^2 \omega_0^2 \varphi_2 + \alpha \omega_0^2 \varphi_0^3 + \\ + \alpha^4 \omega_0^2 \varphi_1^3 + \alpha^7 \omega_0^2 \varphi_2^3 + \dots = 0. \end{aligned}$$

За  $\alpha = 0$ :  $\varphi = \varphi_0$  – розв'язок у нульовому приближенні;

$$\varphi_0'' + \omega_0^2 \varphi_0 = 0 \text{ – рівняння нульового наближення.}$$

Рівняння першого наближення отримаємо із загального рівняння, враховуючи члени, що містять  $\alpha$  у степені, не вищому від першого.

$$\varphi_0'' + \alpha \varphi_1'' + \omega_0^2 \varphi_0 + \alpha \omega_0^2 \varphi_1 + \alpha \omega_0^2 \varphi_0^3 = 0.$$

Враховуючи рівняння нульового наближення для  $\varphi_0$ , отримаємо кінцеве рівняння першого наближення

$$\varphi_1'' + \omega_0^2 \varphi_1 = -\omega_0^2 \varphi_0^3.$$

Обираємо початкові умови у вигляді  $t = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $\varphi' = 0$ , знаходимо розв'язок рівняння нульового наближення

$$\varphi_0 = a \cos \omega_0 t.$$

Рівняння першого наближення матиме такий вигляд:

$$\varphi_1'' + \omega_0^2 \varphi_1 = -\omega_0^2 a^3 \cos^3 \omega_0 t.$$

Скориставшись тригонометричним перетворенням

$$\cos 3\beta = 4 \cos^3 \beta - 3 \cos \beta,$$

рівняння першого наближення можна записати як

$$\varphi_1' + \omega_0^2 \varphi_1 = -\frac{\omega_0^2 a^3}{4} \cos 3\omega_0 t - \frac{3}{4} \omega_0^2 a^3 \cos \omega_0 t.$$

Розв'язок цього лінійного диференціального рівняння має вигляд

$$\varphi_1 = \frac{a^3}{32} \cos 3\omega_0 t - \frac{3}{8} a^3 t \sin \omega_0 t,$$

що включає *секулярний* член (секулярний або віковий член диференціального рівняння, що описує нелінійні коливання з амплітудою, яка зростає за ступеневим законом). Подібний рух не відповідає реальному руху системи. Це пов'язано з тим, що отриманий розв'язок вказує на існування руху з постійним періодом  $2\pi/\omega_0$ , тобто з періодом коливання в нульовому наближенні. Насправді період руху з кінцевою амплітудою відрізняється від періоду з нескінченною малою амплітудою, тому отримуємо вказане протиріччя, яке можна ліквідувати тільки за допомогою пошуку розв'язку з періодом, який відрізняється від періоду коливання в нульовому наближенні.

Величина відхилення періоду від  $T = 2\pi/\omega_0$  має залежати від ступеня нелінійності системи.

Введемо до розгляду нову частоту

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha g + \alpha^2 g_1 + \dots$$

Якщо у розрахунках обмежитись першим наближенням, то матимемо  $\omega^2 = \omega_0^2 + \alpha g$ , де  $g$  – невідома величина.

Враховуючи це, можна записати з точністю до першої степені по  $\alpha$  рівняння в загальному вигляді

$$\varphi'' + \omega^2 \varphi + \alpha \omega_0^2 \varphi^3 - \alpha g \varphi = 0.$$

Рівняння нульового наближення

$$\varphi_0'' + \omega^2 \varphi_0 = 0$$

за тих самих початкових умов, коли  $t = 0$ ;  $\varphi = a$ ;  $\varphi' = 0$  – його розв'язком буде  $\varphi_0 = a \cos \omega t$ .

Рівняння у першому наближенні має вигляд

$$\varphi_1'' + \omega^2 \varphi_1 = g \varphi_0 - \omega_0^2 \varphi_0$$

або

$$\varphi_1'' + \omega^2 \varphi_1 = ag \cos \omega t - \frac{1}{4} \omega^2 a^3 \cos 3\omega t - \frac{3}{4} \omega^2 a^3 \cos \omega t.$$

У цьому рівнянні можна позбавитись секулярного члена, якщо обрати  $g$  так, щоб

$$ag - \frac{3}{4} \omega^2 a^3 = 0;$$

$$g = \frac{3}{4} \omega^2 a^2,$$

тоді рівняння першого наближення матиме вигляд

$$\varphi_1'' + \omega^2 \varphi_1 = -\frac{1}{4} \omega^2 a^3 \cos 3\omega t.$$

Нова частота виразиться як

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{3}{4}\alpha a^2}.$$

Розв'язок рівняння першого наближення матиме вигляд

$$\varphi_1 = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{a^3}{32} \cos 3\omega t,$$

де  $c_1$  та  $c_2$  – довільні сталі.

Повний розв'язок у першому наближенні

$$\varphi = a \cos \omega t + \alpha c_1 \cos \omega t + \alpha c_2 \sin \omega t + \alpha \frac{a^3}{32} \cos 3\omega t,$$

де  $c_1$  і  $c_2$  знаходять з початкових умов.

Остаточно маємо

$$\varphi = a \left( 1 - \alpha \frac{a^2}{32} \right) \cos \omega t + \alpha \frac{a^3}{32} \cos 3\omega t,$$

де  $\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{3}{4}\alpha a^2}.$

Для маятника, в наближенні, де використано  $\alpha = -\frac{1}{6},$

$$\varphi = a \left( 1 + \frac{a^2}{192} \right) \cos \omega t + \frac{a^3}{192} \cos 3\omega t.$$

Наведений розв'язок має такі особливості:

1. Коливання не ізохорні, тобто  $\omega$  – функція від  $a$ .
2. Коливання не суто синусоїдальні, в них наявні гармоніки (третя).

### Завдання

1. Розв'язати рівняння  $\varphi' = \pm 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}$ , використовуючи табличні інтеграли.

## Розділ 5. БІФУРКАЦІЇ

### 5.1. Біфуркація у простій дисипативній системі

Візьмемо спочатку просту абстрактну математичну модель, на якій простіше зобразити деякі механізми, відповідальні за якісні зміни поведінки розв'язків рівнянь.

Розглянемо єдину змінну  $x$ , яка змінюється відповідно до рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \lambda) = -x^3 + x\lambda. \quad (5.1)$$

Ця проста система має єдиний керуючий параметр  $\lambda$ , причому швидкість зміни  $x$ , позначена як функція  $f$ , залежить від цього параметра строго лінійно. Знаходимо стаціонарні стани за рівнянням

$$0 = -x_S^3 + \lambda x_S.$$

Це алгебраїчне рівняння завжди має один тривіальний розв'язок:

$$x_S = 0,$$

тобто  $x_{S_1} \equiv x_0 = 0$ .

Але можуть бути і нетривіальні розв'язки. Вони задовольняють рівняння, яке отримують з кубічного після скорочення на  $x_S$ :

$$-x_S^2 + \lambda = 0.$$

За від'ємного значення  $\lambda$  – це рівняння має уявний розв'язок, що не може відповідати будь-якій фізично можливій ситуації; за позитивного значення  $\lambda$  це рівняння має два розв'язки:

$$x_{\pm} = \pm\sqrt{\lambda};$$

$$x_{S_{2,3}} \equiv x_{\pm} = \pm\sqrt{\lambda}.$$

Ці розв'язки зливаються з  $x_0$  за  $\lambda = 0$ , та відхиляються від нього за  $\lambda > 0$ . Це і є явище біфуркації. Графік стосовно рівняння (5.1) зображено на рис. 5.1. Суцільною та штриховою лініями позначено асимптотично стійкі ( $S$ ) та нестійкий ( $U$ ) розв'язки.

Симетрична біфуркація (типу камертона), за якої стандартний стан  $x_0$  втрачає стійкість за  $\lambda > 0$  та призводить до утворення двох гілок стійких розв'язків  $x_+$  та  $x_-$ , що зливаються з  $x_0$ .

У розглянутій простій моделі проблема стійкості досить тривіальна, оскільки рівняння (5.1) потребує точного розв'язку за допомогою стандартних методів.



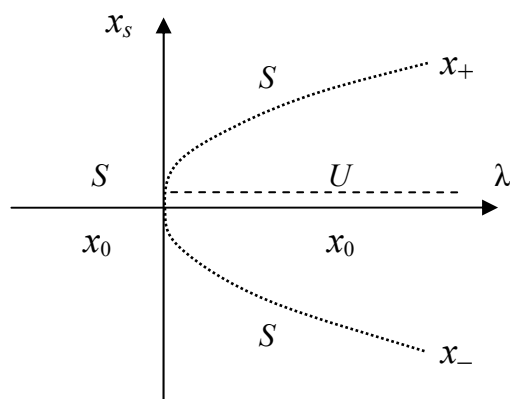


Рис. 5.1. Залежність  $x_s$  від  $\lambda$

Інакше кажучи, гілки  $x_{\pm}$  з'являються у результаті біфуркації у момент, коли стандартний стан  $x_0 = 0$  втрачає стійкість. Таку біфуркацію іноді називають *надкритичною*.

Отже, просте кубічне рівняння, яке плавно залежало від параметру  $\lambda$ , повільною динамікою призводить до особливості поведінки його розв'язання. Дійсно, в околі точки біфуркації  $\lambda = 0$  розв'язки  $x_{\pm}$  не можуть бути розкладені в ряд за степенями параметра  $\lambda$ , тому вони залежать від  $\lambda$  *неаналітично*. Це є математичним відображенням якісної зміни поведінки, яка зумовлена біфуркацією.

Розглянемо простий приклад дисипативної системи

$$\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu,$$

де  $\mu$  – керуючий параметр. Вирази для нерухомих точок  $x_s$  мають вигляд  $x_{\pm} = \pm\sqrt{\mu}$ . Цю залежність зображено на рис. 5.2.

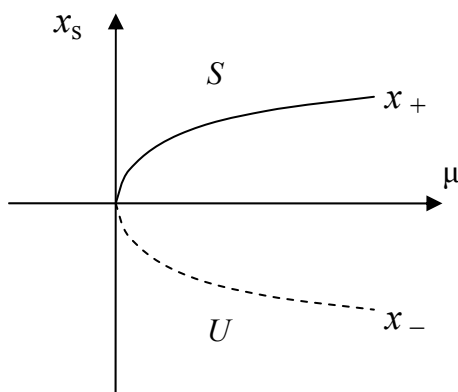


Рис. 5.2. Залежність  $x_s$  від  $\pm\sqrt{\mu}$

Можна також знайти точний розв'язок динамічного рівняння та показати, що гілка  $x_-$  не стійка, а  $x_+$  – асимптотично стійка.

Зазначимо, що у разі зменшення позитивних  $\mu$ , у точці  $\mu = 0$  виникає зіткнення та анігіляція стійкої та нестійкої гілок. З цієї причини точку  $\mu = 0$  називають *межовою точкою* чи *згорткою*.

Тепер об'єднаємо два попередніх приклади; розглянуту дисипативну систему можна описати рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 + \lambda x + \mu. \quad (5.2)$$

Рівнянню (5.2) не містить квадратичного члена, оскільки його завжди можна усунути відповідною заміною змінних. Отже, маємо завдання з двома параметрами ( $\lambda$  та  $\mu$ ). Тепер нерухомі точки визначаються канонічною формою кубічного рівняння загального вигляду

$$-x_s^3 + \lambda x_s + \mu = 0.$$

Це рівняння може мати три реальні розв'язки, крім того у разі зміни параметрів відбувається злиття трьох розв'язків, унаслідок чого залишається єдиний реальний розв'язок.

Область існування трьох реальних коренів закінчується у точці (початок координат), в якій залежність  $\lambda$  від  $\mu$  має особливість. Це відома *особливість типу вістря*.

Залежності розв'язків від параметрів  $\mu$  та  $\lambda$  зображено на рис. 5.3 і 5.4. Залежність  $x_s$  від  $\mu$  за фіксованого  $\lambda$  зображено на рис. 5.4. Форма S-подібної кривої зумовлена множиною розв'язків у відповідній області значень параметра  $\mu$ . Дві гілки є стійкими одночасно, а одна – нестійкою (рис. 5.3–5.5). Область бістабільності закінчується у двох межових точках  $\mu_1$  та  $\mu_2$ , при цьому спостерігається *цикл гістерезису*.

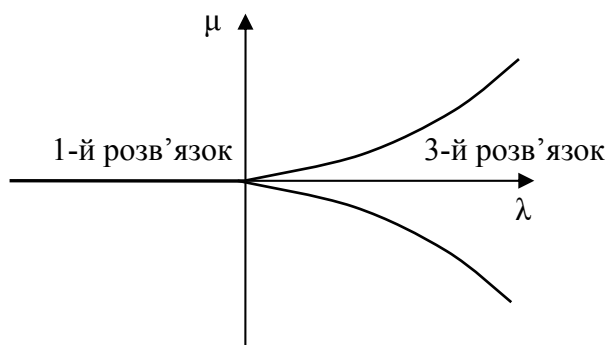


Рис. 5.3. Залежність  $\mu$  від  $\lambda$

Залежність розв'язку  $x_s$  від  $\lambda$  за фіксованого  $\mu$  показано на рис. 5.5. Тепер є дві окремі криві, одна з яких (крива *a*) визначена для всіх значень  $\lambda$ , а друга (крива *b*) визначена лише для  $\lambda \geq \bar{\lambda}$  та має особливість типу межової точки за  $\bar{\lambda}$ ;  $\lambda < \bar{\lambda}$  має лише стійкий розв'язок, а за  $\lambda > \bar{\lambda}$ , як і раніше, спостерігається бістабільність.

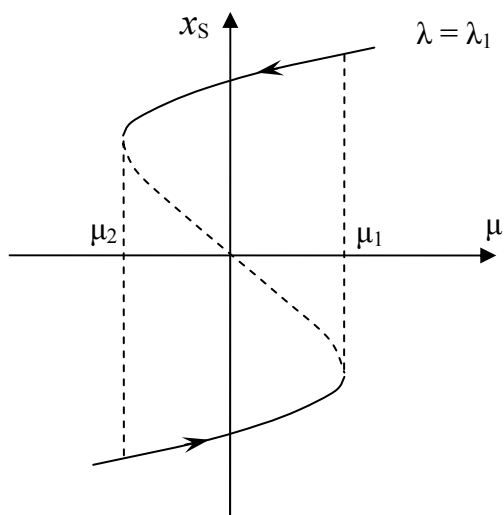


Рис. 5.4. Залежність  $x_s$  від  $\mu$

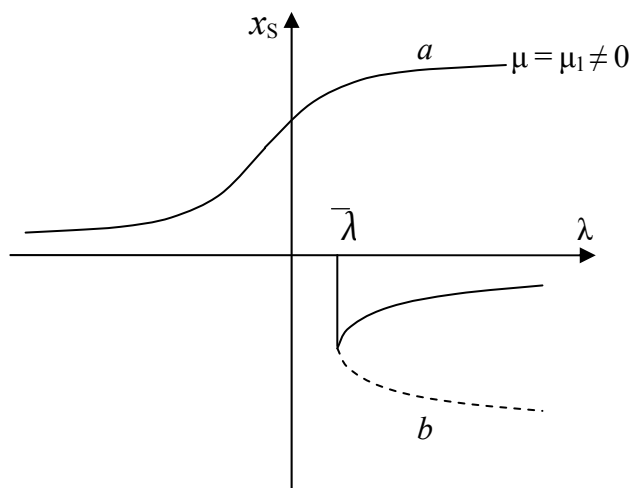


Рис. 5.5. Залежність  $x_s$  від  $\lambda$

Отже, з погляду фізичного поведіння встановлено деякі «максимальні» математичні моделі, які відтворюють одне з експериментально спостережуваних перехідних явищ, що супроводжують складну поведінку різних моделей систем, а саме виникнення множинних одночасно стійких розв'язків. Це явище залежить безпосередньо від здатності до переключень, що забезпечує виконання регуляторних задач.

## 5.2. Моделі пульсації серця і нервового імпульсу

Перемикання забезпечують розв'язок регуляторних задач і можуть бути описані за допомогою системи диференціальних рівнянь, які включають «швидкі» та «повільні» зміни стану системи. Як приклад розглянемо модель пульсації серця та первинного імпульсу. Ці моделі (Зіман, 1973) є прикладами геометричного підходу до моделювання за допомогою диференціальних рівнянь. Вони побудовані на основі якісного опису динаміки відповідних біологічних механізмів. Диференціальні рівняння, що обираються для моделі, є найбільш елементарними рівняннями, які описують вимоги їх поведінки. До них не ставиться ніяких особливих вимог, оскільки немає потреби уточнювати механізми виникнення тієї чи іншої динаміки, йдеться лише про деякі якісні ознаки фазових портретів, які можна прийняти за математичний опис пульсації серця та проходження імпульсу.

У більшості випадків серце може перебувати в одному з двох станів: розслабленому (діастола) та скороченому (систола). У відповідь на електрохімічну дію кожне м'язове волокно швидко скорочується, залишається деякий час у скороченому стані, а потім швидко повертається до попереднього, розслабленого стану.

На противагу цьому проходження нервових імпульсів має іншу динаміку. Частину нервової клітини, яка передає імпульс, називають аксоном. Стан аксона визначається електрохімічним рівнянням потенціалів між внутрішньою і зовнішньою частинами аксона. Коли немає збудження, потенціал аксона залишається у спокої – у деякому визначеному постійному стані. Якщо передається імпульс, то потенціал аксона різко змінюється, а згодом повільно повертається до потенціалу спокою.

Ці потенціали мають три спільні якісні риси, які служать основою для моделі:

- а) існування стійкого стану рівноваги, до якого система періодично повертається;
- б) наявність деякого механізму, що містить дію;
- в) повернення в стан рівноваги після закінчення дії.

У цьому контексті основна різниця між механізмами роботи серця і проходженням нервового імпульсу полягає в тому, як реалізується пункт «в». Для того щоб побудувати модель роботи серця зі вказаними вище властивостями, ми маємо зрозуміти, що означають ці властивості в термінах фазового портрету. Властивість «а» означає, що на фазовому портреті є стійка нерухома точка, а властивість «б», – що існує деякий механізм, який періодично переводить стан системи із нерухомої точки в точку, яка відповідає деякому іншому стану системи. Траєкторія фазового портрета, що проходить через цей новий «пороговий» стан, здійснює певну дію, за якою настає швидке повернення у стан рівноваги, як це вимагає властивість «в». Для того щоб показати як це можна реалізувати, розглянемо послідовну низку моделей, які будуть поступово ускладнюватись.

Розглянемо систему

$$\dot{x} = -\lambda x; \quad \dot{b} = -b, \quad (5.3)$$

де значення  $\lambda$  набагато більші за одиницю (рис. 5.6).

Усі траєкторії, крім розміщених на осі  $b$ , майже паралельні головному напрямку, що відповідає власному значенню  $(-\lambda)$ , тобто «швидкому» власному значенню, а потім стають майже паралельними головному напрямку для «повільного» власного значення  $-1$ . Рівняння (5.3) називають «швидким» та «повільним» відповідно.

Іншим прикладом поведінки такого самого типу може бути система

$$\varepsilon \dot{x} = x - b; \quad \dot{b} = -x, \quad (5.4)$$

де стала  $\varepsilon$  додатна і набагато менша за одиницю. Власні значення цієї системи дорівнюють приблизно  $1/\varepsilon$  та  $1$ , а їх головні напрямки

майже паралельні прямим  $b = 0$  і  $b = (1 - \varepsilon)x$ . Швидке рівняння матиме вигляд  $\varepsilon \dot{x} = x - b$ , оскільки містить малий параметр  $\varepsilon$ , що породжує швидке власне значення  $1/\varepsilon$ . Фазовий портрет системи зображено на рис. 5.7; як і в попередньому прикладі, швидкий та повільний рухи майже паралельні головному напрямку вузла.

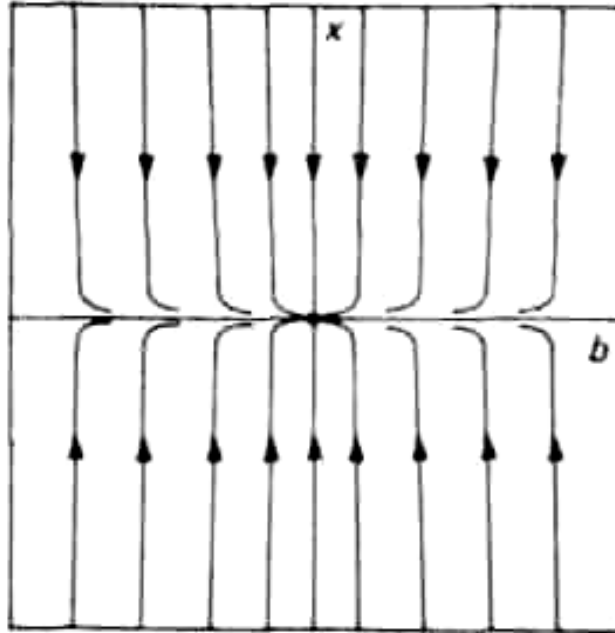


Рис. 5.6. Стійкий вузол системи (5.3) зі «швидким»  $(-\lambda)$  та «повільним»  $(-l)$  власними значеннями

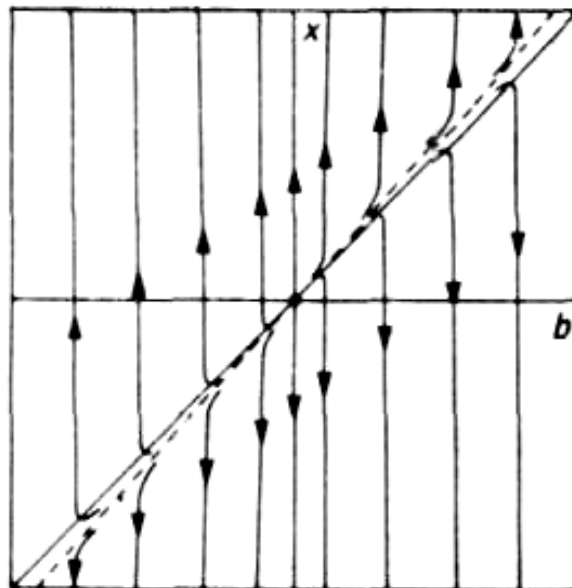


Рис. 5.7. Нестійкий вузол для системи (5.4) зі швидким рухом, паралельним осі  $x$ , та повільним рухом, близьким до напрямку  $b = (1 - \varepsilon)x$

Розглянемо систему для додатних і малих значень  $\varepsilon$  порівняно з одиницею:

$$\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - b; \quad \dot{b} = x. \quad (5.5)$$

Ці рівняння можна розглядати як певну модифікацію попередніх рівнянь, де лінійний член  $x$  замінено кубічною функцією  $x - x^3$ . Лінеаризацією системи (5.5) на початку координат є система (5.4). Ізокліна напрямку  $\dot{x} = 0$  для нелінійної системи (5.5) – кубічна парабола  $b = x - x^3$ , як це показано на рис. 5.8; швидкий рух майже паралельний напрямку осі  $x$ , а повільний рух відбувається поблизу характеристичної кривої  $b = x - x^3$ . Форму граничного циклу та деяких близьких до нього траєкторій показано на рис. 5.8.

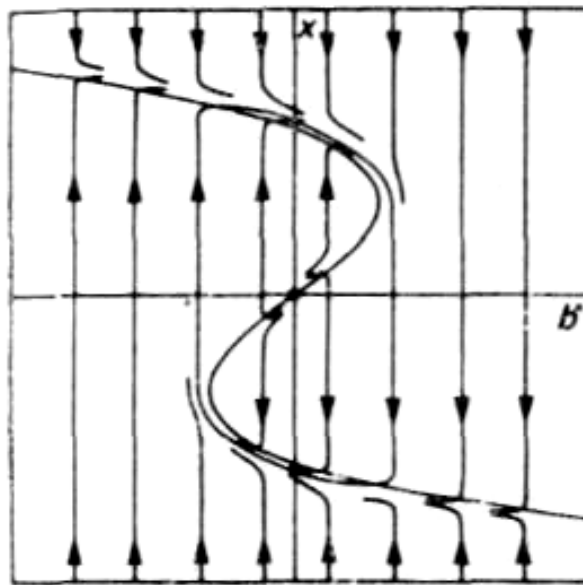


Рис. 5.8. Фазовий портрет системи Льенара (5.5) для  $0 < \varepsilon \ll 1$

Роботу серця описує модифікація системи (5.5):

$$\varepsilon \dot{x} = x - x^3 - b, \quad \dot{b} = x - x_0, \quad (5.6)$$

Величину  $x_0$  беруть більшою за  $1/\sqrt{3}$ , а значення  $x$  – вище значення  $A$  (рис. 5.9). Система (5.6) має єдину нерухому точку  $E = (x_0, b_0)$ , де  $b_0 = x_0 - x_0^3$ , ця точка на верхній частині характеристики  $b = x - x^3$ . Лінеаризація системи (5.6) у точці  $E$ :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3x_0^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix},$$

і отже, точка  $E$  стійка.

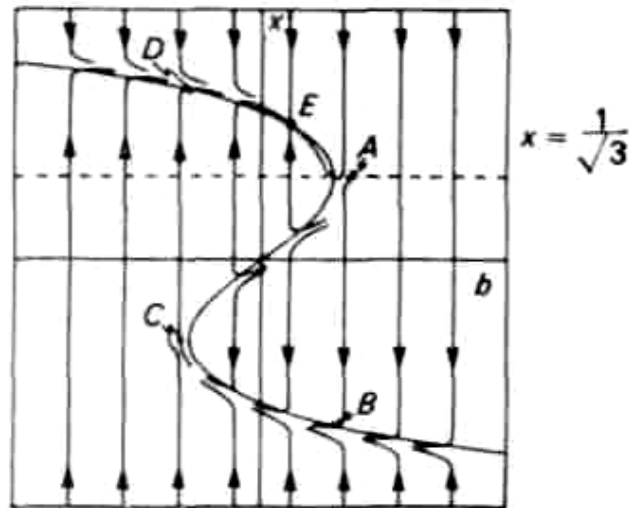


Рис. 5.9. Фазовий портрет системи (5.6) для  $0 < \varepsilon \ll 1$

Змінна  $x$  – це довжина м'язового волокна, а  $b$  – змінна, яка здійснює електрохімічне керування.

Механізм перемикавання переводить серцевий м'яз зі стану рівноваги  $E$  в близький стан  $A$  (рис. 5.9). М'язове волокно швидко скорочується, при цьому  $x$  спадає вздовж траєкторії від  $A$  до  $B$ . Швидка релаксація м'язового волокна відбувається на частині траєкторії  $CD$ , після чого відбувається повернення у положення рівноваги  $E$ . Це періодично повторюється під дією перемикального механізму, що імітує поведінку м'язових волокон під час роботи серця.

Для того щоб отримати повільне повернення в початковий стан, характерне для проходження нервового імпульсу, потрібно розглянути певну модель у просторі  $R^3$ . Необхідність розглядати систему диференціальних рівнянь більшої розмірності викликана тим, що швидка дія моделі, аналогічна (5.6), виникає через складки характеристичної кривої (тобто через її немонотонність). Це означає, що періодична траєкторія може існувати тільки тоді, коли наявна друга складка і, отже, можливе швидке повернення в початковий стан. Уведення додаткового виміру дозволяє оминати цю складність, тому що повернення не обов'язково має відбуватися в околі складки. Розглянемо моделі з характеристичною поверхнею в просторі  $R^3$  (рис. 5.10).

Поверхню зі складкою, яка визначає динаміку моделі, в просторі  $(x, a, b)$  записують рівнянням

$$x^3 + ax + b = 0. \quad (5.7)$$

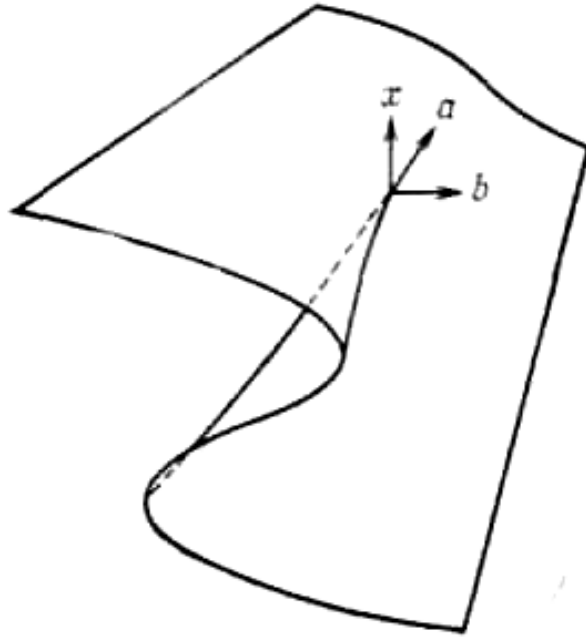


Рис. 5.10. Поверхня, яка має складку (5.7)

Для того щоб зрозуміти, чому рівняння (5.7) описує саме таку поверхню, розглянемо графіки перетину цієї поверхні з площинами  $a = \text{const}$  за різних значень  $a$ . Нехай  $a$  зростає, починаючи з від'ємних значень вона набуває нульового значення і потім стає додатною. Якщо  $a = \text{const}$ , рівняння (5.7) на площині  $x, b$  є кубічною параболою. Складка, що існує за  $a < 0$ , зникає коли  $a > 0$  (рис. 5.11) (порівняйте з рис. 5.4).

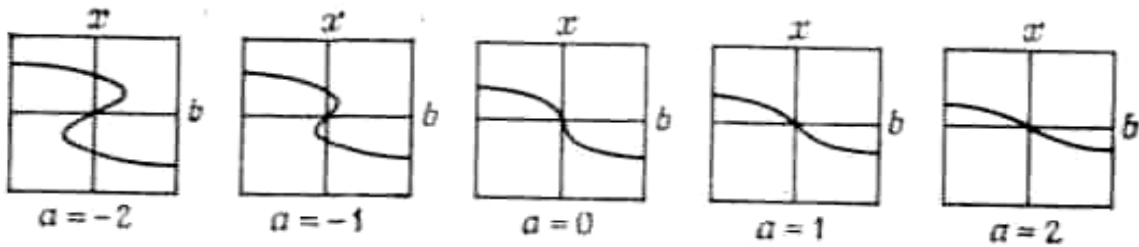


Рис. 5.11. Різні перерізи поверхні  $M$  площиною  $a = \text{const}$

Диференціальні рівняння, які моделюють швидку дію з повільним поворотом, мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= -(x^3 + ax + b); \\ \dot{a} &= -2x - 2a; \\ \dot{b} &= -a - 1, \end{aligned} \tag{5.8}$$

де  $\varepsilon$  – мала додатна стала. Зазвичай швидке рівняння дає більше значення для величин  $x$ , далеких від поверхні  $M$ . Це породжує швидкий рух у напрямку осі  $x$  (рис. 5.13). Для того щоб поворот



був повільним, порібно зробити перехід з нижньої на верхню ділянку поверхні  $M$  так, щоб розглянуті змінні не зазнавали стрибків.

Система (5.8) має єдину нерухому точку  $E$  за  $x = 1, a = 1, b = 0$ ; вона лежить на поверхні  $M$ . Лінеаризація системи у цій точці має вигляд

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\varepsilon & -1 & -1/\varepsilon \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ a \\ b \end{bmatrix}.$$

Власне значення цієї лінійної системи з точністю до величини першого порядку відносно  $\varepsilon$  становить  $1/2(-1 \pm i\sqrt{3})$  та  $-2/\varepsilon$ , тому  $E$  – це стійка нерухома точка. Швидке власне значення породжує швидкий рух у напрямку  $E$  всюди, крім околу поверхні  $M$ , а повільні власні значення породжують спіралеподібне закручування навколо  $E$  в околі  $M$ . Фазовий портрет (5.8) (як видно з певної точки, розміщеної вище  $M$ ) зображено на рис. 5.12: лінія  $OF$  – складка поверхні  $M$ , яку видно зверху. За допомогою рис. 5.13 можна описати динаміку системи (5.8): швидка дія – повільне повернення. Припустимо, що механізм вмикання змушує величину  $b$  збільшуватися від нульового значення, що відповідає положенню рівноваги  $E$ , до певного значення  $b_c \geq 2/(3\sqrt{3})$ , при чому величини  $x$  та  $a$  залишаються сталими. Обмеження величини  $b_c$  означає, що точка  $A(1, -1, b_c)$  розміщена правіше лінії складки  $OF$  (рис. 5.13). Відповідно до рівнянь (5.8) відбувається швидка зміна величини  $x$  від одиниці в точці  $A$  до значення, яке відповідає значенню в точці  $B$ , розміщеної майже вертикально під точкою  $A$  на нижній частині поверхні  $M$ . Далі траєкторія, що проходить через точку  $B$ , проходить поблизу поверхні  $M$ , що сприяє порівняно повільному поверненню до верхньої частини поверхні перед закручуванням навколо положення рівноваги  $E$ . Потім увесь цикл повторюється знову. Для того, щоб побудувати модель проходження нервового імпульсу, змінні  $x, a, b$  потрібно інтерпретувати відповідним чином. Під час проходження нервового імпульсу здатність іонів натрію проникати крізь кліткову мембрану істотно і швидко зростає. Натрієва проникність відповідає величині  $x$ , яка швидко спадає.

Збуджувальною дією для цього переходу служить мала зміна величини  $b$ . Якщо  $b$  надати змісту потенціалу на клітковій мембрані, то невелике збільшення цього потенціалу і є збуджуючим механізмом для проходження нервового імпульсу.

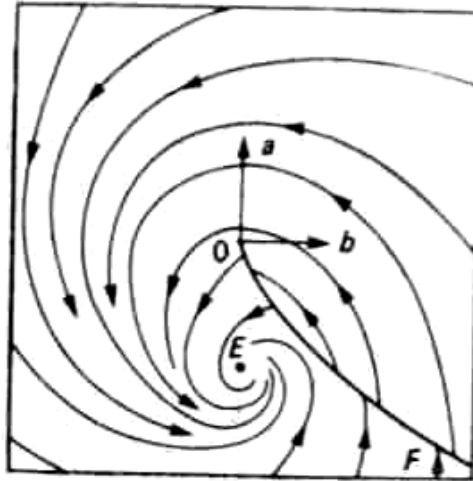


Рис. 5.12. Ескіз фазового портрета системи (5.8) поблизу поверхні  $M$  (вид із точки на додатній півосі  $x$ )

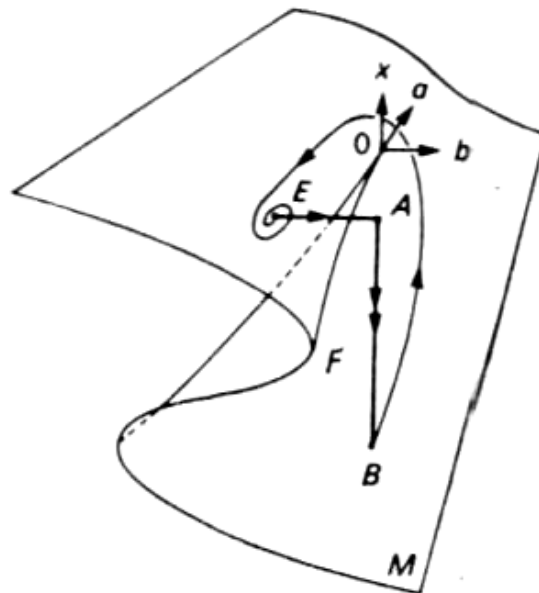


Рис. 5.13. Основні риси динаміки системи (5.8) у точці  $M$

Змінна  $a$  відповідає калієвій проникності. Після проходження імпульсу зміна калієвої проникності з часом, очевидно, узгоджується з поведінкою траєкторії, яка проходить через точку  $B$ . За повільним підвищенням величини  $a$  виникає повільне зменшення до величини  $a = -1$ , що відповідає відрізку траєкторії від точки  $A$  до точки  $E$  з обертотом навколо точки  $O$ .

### 5.3. Біфуркації динамічних систем другого порядку

Рівняння руху автономної динамічної системи з одним ступенем вільності описують двома диференціальними рівняннями першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (5.9)$$

Нехай праві частини системи (5.9) залежать від певного параметра  $\alpha$ , тобто мають вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \alpha); \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \alpha),$$

де  $P(x, y, \alpha)$  та  $Q(x, y, \alpha)$  – аналітичні функції своїх аргументів.

Якщо за певного значення  $\alpha$  система є грубою, то за невеликих значень  $\alpha$  якісна картина на фазовій площині не зміниться. Однак не для всіх значень  $\alpha$  цю умову можна виконати. У зв'язку з цим було введено поняття *біфуркаційного* значення параметра. За визначенням значення параметра  $\alpha = \alpha_0$  називають *біфуркаційним*, якщо за скільки завгодно близьких до  $\alpha_0$  значень  $\alpha < \alpha_0$  і  $\alpha > \alpha_0$  топологічна структура фазової площини різна. Із самого визначення біфуркаційного значення параметра випливає, що за  $\alpha > \alpha_0$  система не є грубою.

Для системи другого порядку потрібно знати поведінку не всіх, а тільки *особливих траєкторій* до яких належать стани рівноваги, граничні цикли і незамкнені траєкторії, у яких хоча б одна траєкторія (а саме крива, яка описується точкою, зображеною за  $t \rightarrow +\infty$  чи  $t \rightarrow -\infty$  із початкової точки за  $t = t_0$ ) є сепаратрисою будь-якого стану рівноваги. Якщо відомо взаємне розміщення цих особливих траєкторій і визначено стійкість станів рівноваги і граничних циклів, то можна отримати якісну картину поділу фазової площини  $(x, y)$  на траєкторії.

Особливі траєкторії поділяють фазову площину на скінченну кількість комірок, оскільки з аналітичності правих частин системи (5.9) випливає, що кількість особливих траєкторій скінченна. Межа кожної комірки складається з особливих траєкторій, причому точки однієї й тієї самої траєкторії можуть бути граничними для декількох комірок.

Основною топологічною характеристикою, яка відрізняє одну комірку від іншої є її зв'язаність.

Якщо межа осередку складається з одного граничного контуру, то комірку називають *однорозв'язною*, якщо з двох, трьох – *дворозв'язною* і *трирозв'язною* відповідно.

Найпростішим прикладом однозв'язної комірки є ділянка всередині кола, двозв'язної – ділянка між двома концентричними колами.

Приклад складної однозв'язної комірки зображено на рис. 5.14; двозв'язної, де комірка виділена штриховою лінією – на рис. 5.15. Очевидно, що комірки з неоднаковою кількістю зв'язності заздалегідь топологічно різні.

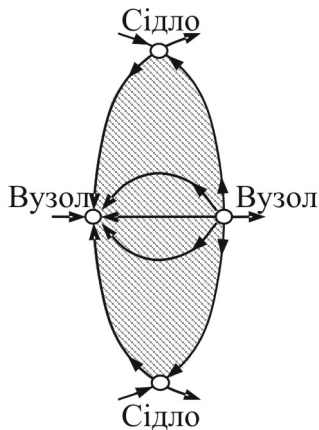


Рис. 5.14. Однозв'язна комірка

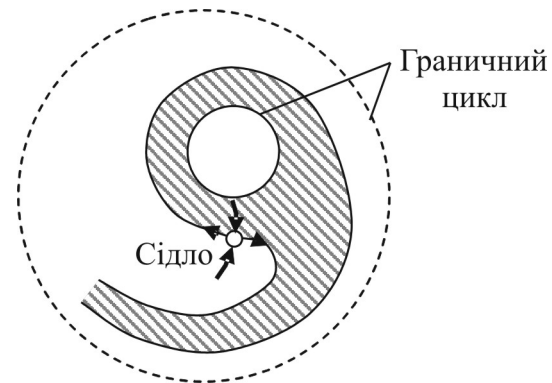


Рис. 5.15. Двозв'язна комірка

Через те, що якісна картина траєкторій на фазовій площині визначається особливими траєкторіями, тільки певні значення параметра  $\alpha$  є біфуркаційними, за яких з'являються особливі елементи, що мають негрубу природу. Якщо за біфуркаційних значень параметра  $\alpha$  на фазовій площині з'являється тільки один особливий елемент, вважають, що автономна система другого порядку має перший ступінь негрубості. У такій системі негрубі елементи можуть бути одним із таких типів:

1. *Складний стан рівноваги*, що утворюється під час злиття двох простих особливих точок (наприклад, типу вузла й сідла). Три послідовні фази зміни фазових траєкторій в околі двох особливих точок зображено на рис. 5.16 (вузол  $O_1$  і сідло  $O_2$ ). Коли параметр  $\alpha$  досягає біфуркаційного значення, точки  $O_1$  і  $O_2$  зливаються, утворюючи складну особливу точку типу «сідло-вузол» (рис. 5.16 б), а потім зникають (рис. 5.16 в).

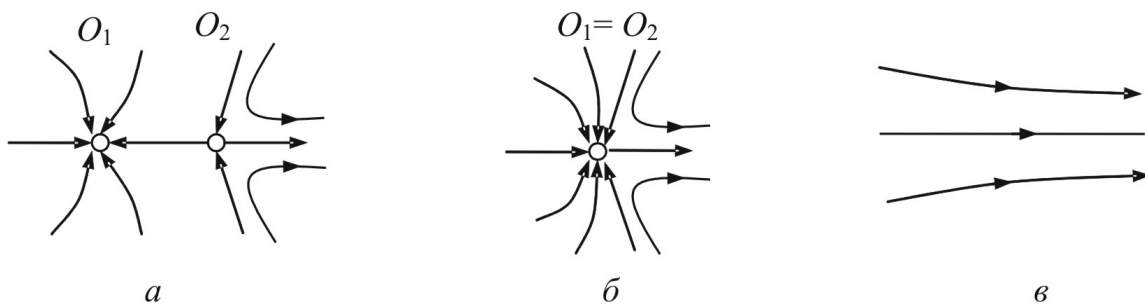


Рис. 5.16. Взаємодія вузла й сідла

2. *Вироджений фокус чи центр.* Біфуркацію, коли простий фокус перетворюється в складний фокус (момент біфуркації, що відповідає виродженню фокуса) із якого виникає граничний цикл, зображено на рис. 5.17.

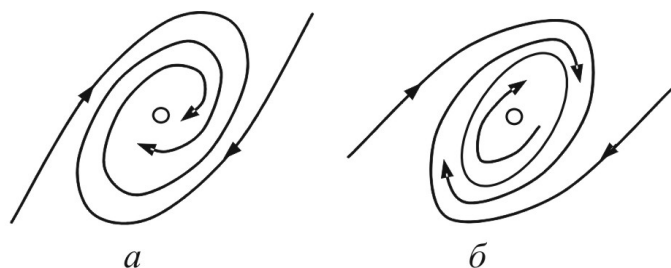


Рис. 5.17. Перетворення простого фокуса у складний

3. *Подвійний граничний цикл* утворюється, наприклад, під час злиття стійкого та нестійкого граничних циклів. Три послідовні фазові параметри, коли два граничних цикли (стійкий і нестійкий) (а), в момент біфуркації зливаються, утворюючи граничний цикл (б), потім зникають (в), зображено на рис. 5.18. Якщо розглянути ці зображення у зворотній послідовності, то матимемо приклад виникнення граничних циклів із ущільненням фазових траєкторій.

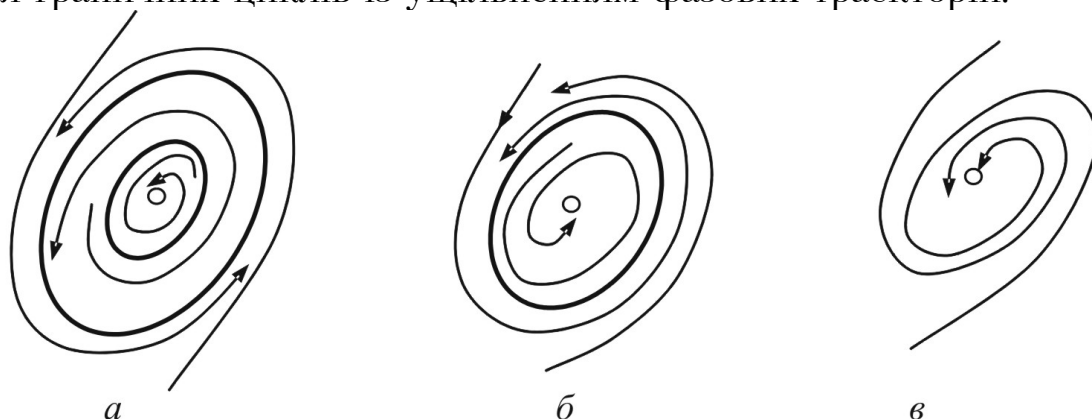


Рис. 5.18. Взаємодія стійкого та нестійкого циклів

4. *Сепаратриса*, яка проходить із одного сідла в друге чи в це саме сідло. Приклад виникнення стійкого граничного циклу з петлі сепаратриси сідла показано на рис. 5.19. Нехай сепаратриси сідла за певного значення  $\alpha$  мають таке розміщення, як показано на рис. 5.19 а. Припустимо, що у разі збільшення параметра  $\alpha$  гілки сепаратриси зближаються і за певного  $\alpha = \alpha_0$  зливаються, утворюючи петлю (рис. 5.19 б). Якщо за подальшого збільшення  $\alpha$  сепаратриси сідла знову розділяються так, як показано на рис. 5.19 в, то з петлі утворюється граничний цикл. Тоді значення  $\alpha = \alpha_0$  є біфуркаційним.

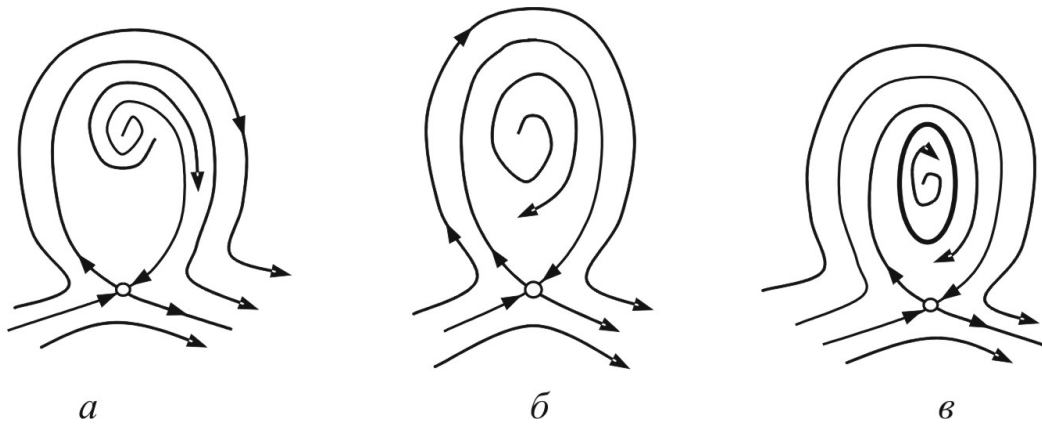


Рис. 5.19. Виникнення стійкого циклу з петлі сепаратриси сідла

Для системи, що має лише один параметр  $\alpha$ , простір параметрів є прямою, а біфуркаційне значення  $\alpha = \alpha_i$  – точки, що розбивають цю пряму на ділянки, у кожній із яких зміна параметра  $\alpha$  не приводить до зміни фазового портрета.

Якщо система має два параметри  $\alpha$  і  $\beta$ , тоді простором параметрів буде площина, яка поділена на зони однакової поведінки системи за допомогою біфуркаційних кривих. Знаючи структуру поділу фазового простору для будь-якої точки площини параметрів  $\alpha$  та  $\beta$ , можна, неперервно переміщуючись у цій площині, знайти структуру фазового простору для будь-якої іншої точки площини параметрів, при цьому потрібно знати лише характер біфуркації, яка відбувається в фазовому просторі тієї чи іншої біфуркаційної межі. У цьому виявляється евристична цінність теорії біфуркацій.

### Завдання

Визначити зміну стійкості стаціонарних розв'язків від параметра для виразів:

1.  $\frac{dx}{dt} = -x^3 + \lambda x$ ;
2.  $\frac{dx}{dt} = -x^2 + \mu$ .

## Розділ 6. ДИНАМІКА ХІМІЧНОГО РЕАКТОРА

### 6.1. Модель хімічного реактора

Як приклад побудови та дослідження фазових портретів конкретної системи другого порядку, які проводять за допомогою методів якісної теорії диференціальних рівнянь, розглянемо динаміку хімічного реактора.

Модель хімічного реактора – це відкрита гомогенна система повного перемішування, у якій відбувається неперервний масо-теплообмін із навколишнім середовищем (відкрита система), а хімічні реакції проходять у межах однієї фази (гомогенність). Умовою ідеального перемішування можна описати всі процеси за допомогою диференціальних рівнянь у повних похідних.

Припустимо, що хімічний реактор – це ємність, в яку безперервно надходить речовина  $A$  з концентрацією  $x_0$  та температурою  $y_{ст}$ . Нехай у результаті хімічної реакції  $A \rightarrow B + Q$  утворюється продукт  $B$  та виділяється тепло  $Q$ , а суміш продукту та реагенту виводиться з системи зі швидкістю, що характеризується величиною  $\lambda$ .

Тепло, яке утворюється внаслідок реакції, відводиться потоком речовини та завдяки теплопередачі, через стінку реактора. Умови теплопередачі характеризуються температурою стінки  $y_{ст}$  та коефіцієнтом  $\omega$ . Схему хімічного реактора зображено на рис. 6.1.

Для складання рівнянь динаміки хімічного реактора скористаємось законами хімічної кінетики, які виражають залежність швидкості хімічних перетворень від концентрації реагуючих речовин та їх температури, законом збереження маси (умови матеріального балансу), а також законом збереження енергії (умова температурного балансу реактора).

Усі величини записуємо в безрозмірному вигляді.

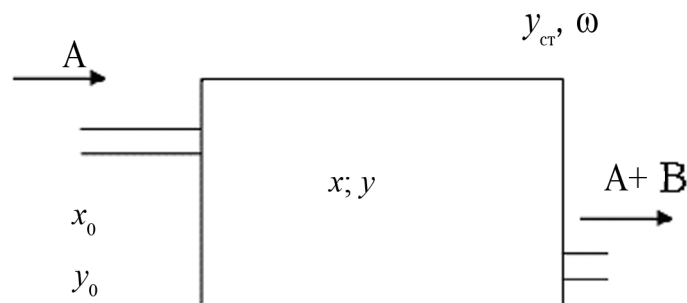


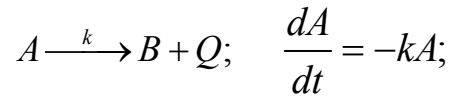
Рис. 6.1. Схема хімічного реактора

Константа швидкості хімічної реакції залежить від температури. Зі збільшенням температури швидкість реакції зростає. Цей процес

можна описати законом Арреніуса:

$$k(T) = k_0 \exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right),$$

де  $E_0$  – енергія активації;



$$k \approx e^{-\frac{1}{y}}; \quad \frac{dx}{dt} = -kx.$$

Цю залежність можна зрозуміти так, що у процесі хімічних перетворень відбувається розрив хімічних зв'язків, або, інакше кажучи, доводиться долати потенціальний бар'єр, який відповідає енергії цього зв'язку. Цей бар'єр можна подолати за рахунок кінетичної енергії рівноприскореного руху молекул. Під час нагрівання середовища середня кінетична енергія зростає, а отже зростає і кількість пар молекул, які зіштовхуються з кінетичною енергією, достатньою для подолання бар'єра. Інакше кажучи, реакція прискорюється, що видно з формули, що описує закон Арреніуса.

Зміна концентрації реагенту пов'язана з хімічним перетворенням, що залежить від температури і виходом суміші реагенту та продукту (розбавлення реагенту)

$$\frac{dx}{dt} = -xe^{-\frac{1}{y}} + \lambda(x_0 - x).$$

Зміна температури  $Y$  реагенту пов'язана з відведенням тепла через стінку реактора (закон Фур'є),

$$Q_1 = \omega(T - T_{\text{ст}}) = \omega(y - y_{\text{ст}}).$$

Тепло, що надходить з реагенту  $A$ :  $Q_2 = \lambda y_B$ ;

тепло, що відходить із суміші реагенту та продукту:  $Q_3 = \lambda y$ .

Утворення тепла за рахунок хімічної реакції  $Q \approx B$ , тобто

$Q \approx xe^{-\frac{1}{y}}$ , баланс температури запишемо як

$$\frac{dy}{dt} = xe^{-\frac{1}{y}} + \lambda y_B - \omega(y - y_{\text{ст}}) - y\lambda = xe^{-\frac{1}{y}} + \lambda y_B + \omega y_{\text{ст}} - y(\lambda + \omega).$$

Зазначимо, що за визначенням елементарна кількість тепла  $Q$ , яку додано до тіла для зміни його температури від  $T$  до  $T + \Delta T$ , становить

$$\delta Q = CdT,$$

де  $C$  – теплоємність.



Введемо позначення:

$$\lambda + \omega = \beta;$$

$$\frac{\lambda y_{\text{в}} + \omega y_{\text{ст}}}{\lambda + \omega} = y_0,$$

тоді  $\frac{dy}{dt} = x e^{-\frac{1}{y}} + \beta(y_0 - y)$ .

У результаті отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x e^{-\frac{1}{y}} + \lambda(x_0 - x) = P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= x e^{-\frac{1}{y}} + \beta(y_0 - y) = U(x, y). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Модель хімічного реактора має чотири важливих параметри:  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$ , які є додатними величинами. Відповідно до фізичного змісту змінних  $x$  та  $y$  фазовим простором системи є перший квадрат площини  $xu$ .

Для побудови фазового портрету потрібно визначити передусім кількість станів рівноваги, їх топологічний тип і стійкість.

Прирівнюючи праві частини системи (6.1) до нуля, отримаємо два алгебраїчні рівняння, розв'язки яких і визначають координати  $X_s$  та  $Y_s$  особливих точок рівноваги.

$$\begin{aligned} P(x, y) &= -x e^{-\frac{1}{y}} + \lambda(x_0 - x) = 0; \\ U(x, y) &= x e^{-\frac{1}{y}} + \beta(y_0 - y) = 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Із рівняння (6.2) випливає, що крива  $U(x, y) = 0$  є ізокліна  $\frac{dy}{dx} = 0$  інтегральних кривих і перетинає вісь  $Y$  в точці  $y = y_0$ , а кри-

ва  $P(x, y) = 0$  – ізокліна  $\frac{dy}{dx} = \infty$  інтегральних кривих, яка перети-

нає вісь  $X$  за  $x = x_0$  та має асимптоту  $x = \frac{\lambda x_0}{(1 + \lambda)} \Big|_{y \rightarrow \infty}$ .

Залежно від співвідношення параметрів  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\lambda$  та  $\beta$ , криві  $U(x, y) = P(x, y) = 0$  можуть перетинатись в одній або в трьох точках.

Для визначення кількості станів рівноваги залежно від значень параметрів системи скористаємось біфуркаційною діаграмою – кривою, що пов'язує значення будь-якого параметра з координатою стану рівноваги.

$$\begin{cases}
-xe^{-\frac{1}{y}} + \lambda(x_0 - x) = 0; \\
xe^{-\frac{1}{y}} + \beta(y_0 - y) = 0; \\
\lambda(x_0 - x_S) + \beta(y_0 - y_S) = 0; \\
x_S = x_0 + \frac{\beta}{\lambda}(y_0 - y_S).
\end{cases} \quad (6.3)$$

Рівняння біфуркаційної кривої можемо отримати після виключення з рівняння (6.2) величини  $x_S$ :

$$\begin{aligned}
& \left[ x_0 + \frac{\beta}{\lambda}(y_0 - y_S) \right] e^{-\frac{1}{y_S}} + \beta(y_0 - y_S) = 0; \\
& x_0 e^{-\frac{1}{y_S}} + \frac{\beta}{\lambda} e^{-\frac{1}{y_S}} (y_0 - y_S) + \beta(y_0 - y_S) = 0; \\
& x_0 e^{-\frac{1}{y_S}} + (y_0 - y_S) \beta \left[ 1 + \frac{e^{-\frac{1}{y_S}}}{\lambda} \right] = 0; \\
& (y_0 - y_S) = - \frac{x_0 e^{-\frac{1}{y_S}}}{\beta \left[ 1 + \frac{e^{-\frac{1}{y_S}}}{\lambda} \right]} = - \frac{\lambda x_0 e^{-\frac{1}{y_S}}}{\beta \left[ \lambda + e^{-\frac{1}{y_S}} \right]} = - \frac{\lambda x_0}{\beta \left[ 1 + \lambda e^{-\frac{1}{y_S}} \right]}; \\
& y_0 = y_S - \frac{\lambda x_0}{\beta \left[ 1 + \lambda e^{-\frac{1}{y_S}} \right]}. \quad (6.4)
\end{aligned}$$

Рівняння (6.4) показує залежність  $y_0 = f(y_S)$  (рис. 6.2), а величини  $x_0$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  вважають фіксованими. Можливі варіанти біфуркаційних діаграм за різних значень  $x_0$  та фіксованих  $\lambda$ ,  $\beta$  зображено на рис. 6.2.

Кількість станів рівноваги у системі дорівнює кількості точок перетину прямої  $y_0 = \text{const}$  з кривою (6.4) за заданого  $x_0$ . З вигляду кривих випливає, що біфуркаційні відношення між параметрами

$x_0, y_0$  знаходять з умови дотикання прямої  $y_0 = \text{const}$  з одним із екстремумів кривої (6.4). Диференціюючи функцію (6.4) та прирівнявши похідну  $\frac{dy_0}{dy_s} = 0$ , отримаємо співвідношення, які разом складають систему параметричних рівнянь граничної кривої на площині  $x_0, y_0$ , де  $y_s$  – змінний параметр.

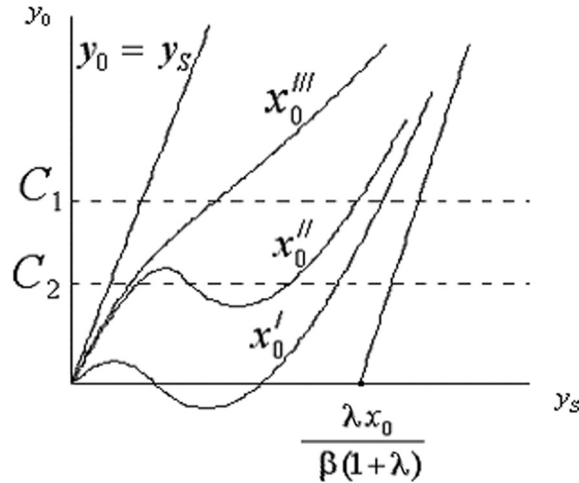


Рис. 6.2. Варіанти біфуркаційних діаграм

Якщо  $y_s \gg 1$ , то

$$\begin{cases} y_0 = y_s - y_s^2 \frac{1+\lambda}{\lambda} \\ x_0 = y_s^2 \frac{\beta(1+\lambda)^2}{\lambda^2} \end{cases};$$

$$y_0 = y_s - x_0 \frac{\lambda}{\beta(1+\lambda)};$$

$$0 = \frac{dy_0}{dy_s} = 1 - \frac{x_0}{\beta} \left( \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + e^{\frac{1}{y_s}}} \right)' = 1 - \frac{x_0}{\beta} \frac{\lambda^2 e^{\frac{1}{y_s}}}{\left(1 + \lambda e^{\frac{1}{y_s}}\right)^2} \frac{1}{y_s^2},$$

де враховано, що

$$\left( \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + e^{\frac{1}{y_s}}} \right)' = \frac{-e^{\frac{1}{y_s}} \ln e}{\left( \frac{1}{\lambda} + e^{\frac{1}{y_s}} \right)^2} \left( -\frac{1}{y_s^2} \right).$$

Тоді

$$1 = \frac{x_0}{\beta} \frac{\lambda^2 e^{\frac{1}{y_S}}}{\left(1 + \lambda e^{\frac{1}{y_S}}\right)^2} \frac{1}{y_S^2};$$

$$\begin{cases} x_0 = \beta \lambda^{-2} y_S^2 e^{-\frac{1}{y_S}} \left(1 + \lambda e^{\frac{1}{y_S}}\right)^2 \\ y_0 = y_S - y_S^2 e^{-\frac{1}{y_S}} \lambda^{-1} \left(1 + \lambda e^{\frac{1}{y_S}}\right) \end{cases} \quad (6.5)$$

Крива (6.5) на площині  $x_0, y_0$  має вигляд клину, на вершині якого є точка *повернення першого роду* (рис. 6.3) (точка повернення – це особлива точка кривої, в якій напрямок кривої змінюється на протилежний). Форма кривої зберігається для всіх значень параметрів  $\lambda, \beta$ , які мають фізичний зміст.

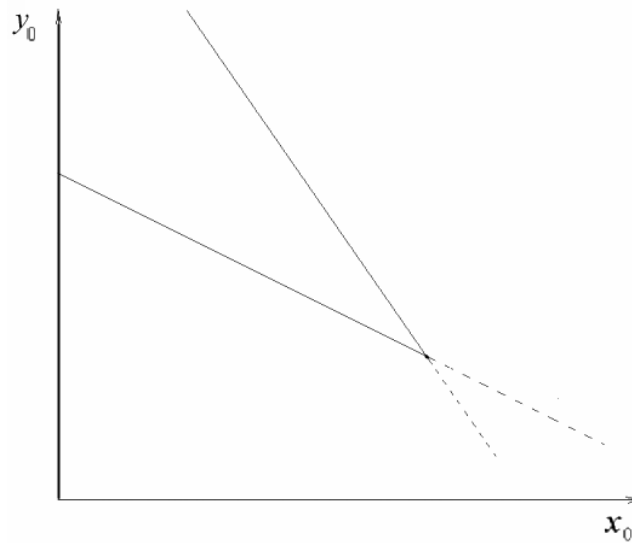


Рис. 6.3. Гранична крива станів рівноваги

З рівнянь (6.5) випливає, що

$$y_0 = y_S - x_0 \frac{\lambda}{\beta \left(1 + \lambda e^{\frac{1}{y_S}}\right)};$$

$$x_0 = (y_S - y_0) \frac{\beta}{\lambda} \left( 1 + \lambda e^{\frac{1}{y_S}} \right);$$

$$x_0 = (y_S - y_0) \frac{\beta}{\lambda} (1 + \lambda) \quad \text{за} \quad y_S \gg 1;$$

$$x_0 = (y_S - y_0) \frac{\beta}{\lambda} \left( 1 + \lambda e^{\frac{1}{y_S}} \right) \quad \text{за} \quad y_S \ll 1.$$

Для значень параметрів  $x_0$  та  $y_0$  всередині клину система має три стани рівноваги, а для значень  $x_0$  та  $y_0$  ззовні клину – одне значення рівноваги.

Топологічний тип та стійкість особливої точки на фазовій площині з координатами  $(x_S; y_S)$ , що відповідає стану рівноваги системи, визначають знаком виразу  $G = -(a + d)$  та  $\Delta = ad - bc$  у цій точці, тоді

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{df} &= \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{\bar{x}_S \bar{y}_S} \xi + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \eta = a_{11} \xi + a_{12} \eta = a\xi + b\eta; \\ \frac{d\eta}{df} &= \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{\bar{x}_S \bar{y}_S} \xi + \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} \eta = b_{21} \xi + b_{22} \eta = c\xi + d\eta. \end{aligned}$$

$$a = P'_x(x_S; y_S) = -e^{-\frac{1}{y_S}} - \lambda;$$

$$b = P'_y(x_S; y_S) = -x_S e^{-\frac{1}{y_S}} \frac{1}{y_S^2};$$

$$c = U'_x(x_S; y_S) = e^{\frac{1}{y_S}};$$

$$d = U'_y(x_S; y_S) = x_S e^{-\frac{1}{y_S}} \frac{1}{y_S^2} - \beta;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (a + d) \pm [(a + d)^2 + 4(bc - ad)]^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Відповідно до загальної теорії, рівняння  $\Delta = 0$  визначає межу сідел, а рівняння  $G = 0$  – межу стійкості вузлів та фокусів.

Підставляючи до рівняння  $\Delta = 0$  вирази (6.6) та враховуючи (6.3), отримаємо параметричне рівняння для межі сідел на площині  $x_0, y_0$ , що співпадає з рівнянням (6.5):

$$\begin{aligned}
\Delta = ad - bc &= - \left( e^{-\frac{1}{y_S}} + \lambda \right) \left( x_S e^{-\frac{1}{y_S}} y_S^{-2} - \beta \right) + \left( x_S e^{-\frac{1}{y_S}} y_S^{-2} \right) e^{-\frac{1}{y_S}} = \\
&= -x_S e^{-\frac{1}{y_S}} e^{-\frac{1}{y_S}} y_S^2 + \beta e^{-\frac{1}{y_S}} - \lambda x_S e^{-\frac{1}{y_S}} y_S^{-2} + \lambda \beta + x_S y_S^{-2} e^{-\frac{1}{y_S}} e^{-\frac{1}{y_S}}; \\
&\quad \beta \left( \lambda + e^{-\frac{1}{y_S}} \right) = \lambda x_S e^{-\frac{1}{y_S}} y_S^{-2}; \\
x_S &= y_S^2 \lambda^{-1} e^{\frac{1}{y_S}} \beta \left( \lambda + e^{-\frac{1}{y_S}} \right) \quad \text{за } x_S = x_0 + \frac{\beta}{\lambda} (y_0 - y_S); \\
x_0 + \frac{\beta}{\lambda} (y_0 - y_S) &= y_S^2 \lambda^{-1} e^{\frac{1}{y_S}} \beta \left( \lambda + e^{-\frac{1}{y_S}} \right); \\
x_0 &= y_S^2 \beta \lambda^{-2} e^{-\frac{1}{y_S}} \left( 1 + \lambda e^{-\frac{1}{y_S}} \right)^2 \quad \text{за } y_0 = y_S - x_0 \frac{\lambda}{\beta} \frac{1}{1 + \lambda e^{\frac{1}{y_S}}}.
\end{aligned}$$

Отже, гранична крива – область параметрів, за яких у системі є три стани рівноваги, співпадає з кривою утворення (або зникнення) сідлової особливої точки.

Визначимо область стійкості особливих точок. Умову стійкості вузлів та фокусів визначають за виразом  $a + d = 0$ .

Отримаємо:

$$\begin{aligned}
(-e^{-1/y_S} - \lambda) + (x_S e^{-1/y_S} y_S^{-2} - \beta) &= 0; \\
x_S e^{-1/y_S} y_S^{-2} &= e^{-1/y_S} (1 + \lambda e^{1/y_S}) + \beta; \\
x_S &= y_S^2 [(1 + \lambda e^{1/y_S}) + \beta e^{1/y_S}].
\end{aligned}$$

Враховуючи рівняння (6.3), отримаємо:

$$\begin{aligned}
x_S &= x_0 + \frac{\beta}{\lambda} (y_0 - y_S); \\
x_0 + \frac{\beta}{\alpha} (y_0 - y_S) &= y_S^2 [(1 + \lambda e^{1/y_S}) + \beta e^{1/y_S}]; \quad x_0 = (y_S - y_0) \frac{\beta}{\alpha} (1 + \lambda e^{1/y_S}); \\
\begin{cases} x_0 = y_S \lambda^{-1} [\beta + 2\lambda + \lambda(\beta + \lambda) e^{1/y_S} + e^{-1/y_S}]; \\ y_0 = y_S [1 - \beta^{-1} y_S (\beta + \lambda + e^{-1/y_S})]. \end{cases} & \quad (6.7)
\end{aligned}$$

Рівняння (6.7) визначають на площині  $x_0, y_0$  та іншу граничну криву –  $G$ . Ця крива є межею сталості особливих точок несідлового типу та розбиває фазову площину  $x_0, y_0$  на ділянки, що відрізняються кількістю та сталістю станів рівноваги системи (рис. 6.4).

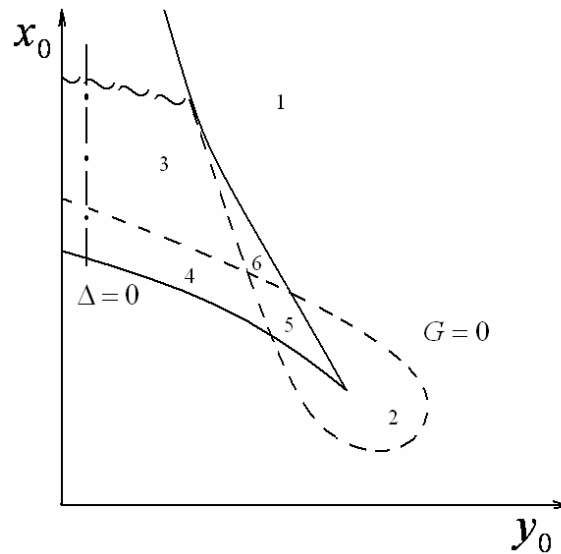


Рис. 6.4. Ділянки стійкості особливих точок

Криву системи рівнянь (6.7) показано пунктирною лінією. Ділянка 1 відповідає наявності стійкої особливої точки на фазовій площині. Ділянка 2 – одній нестійкій особливій точці типу вузла чи фокусу. Ділянки 3–6 – трьом особливим точкам, з яких у ділянці 3 дві стійкі, а третя – сідло. В ділянці 4 та 6 нестійкі дві особливі точки, а в ділянці 5 – нестійкі всі три особливі точки.

Кількість різних ділянок та взаємне розміщення кривих (6.7) та (6.6) на площині  $x_0, y_0$  залежить від значень параметрів  $\lambda$  та  $\beta$ .

Відомо, що розбиття площини параметрів  $y_0, x_0$ , зображених на рис. 6.4, здійснюється за таких значень  $\lambda$  та  $\beta$ , які задовольняють нерівність  $\beta \gg \lambda^2$ . Розглянемо це докладніше та з'ясуємо, які з особливих траєкторій, окрім станів рівноваги, можуть бути на фазовій площині  $x, y$  за різних значень параметрів  $x_0$  та  $y_0$ .

Для цього спочатку побудуємо цикл без контакту, що охоплює всі стани рівноваги. В якості циклу без контакту використаємо

прямокутник  $KLMN$ , утворений відрізками прямих  $x = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda}$ ;  $x = x_0$ ;  $y = y_0$  й  $y = y_M$ , де  $y_M$  – ордината верхньої точки перетину ізолінії  $dy/dx = 0$  з прямою (рис. 6.5).

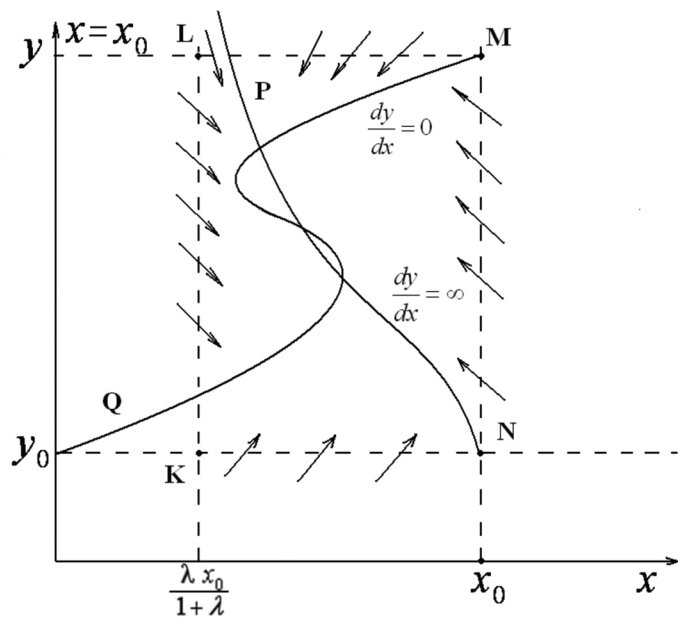


Рис. 6.5. Три стани рівноваги

Згідно з рівняннями (6.3) у точках прямої  $x = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda}$  похідна

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=\frac{\lambda x_0}{1+\lambda}} = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda} (1 - e^{-1/y_S}) > 0, \text{ у точках прямої } x = x_0, \text{ навпаки,}$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=x_0} = -x_0 e^{-1/y} < 0.$$

Підставляючи  $y = y_0$  у праву частину другого рівняння системи, знаходимо  $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=y_0} = x e^{-1/y} > 0$ , а на відрізку прямої  $y = y_M$ ,

$$0 < x < x_0 \text{ похідна } \left(\frac{dy}{dt}\right)_{y=y_M} < 0.$$

Це означає, що всі фазові траєкторії входять всередину прямокутника  $KLMN$ : якщо зображена точка потрапить всередину прямокутника  $KLMN$ , то вона потім залишиться у ньому.

Не існує граничних циклів, які охоплюють контур  $KLMN$ , тому що на всій напівпрямій  $x = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda}$ , частина якого  $KL$  становить

межу контуру, похідна  $\frac{dx}{dt} > 0$ .

Отже, подальше дослідження фазового портрета системи достатньо провести лише всередині прямокутника  $KLMN$  (рис. 6.6).



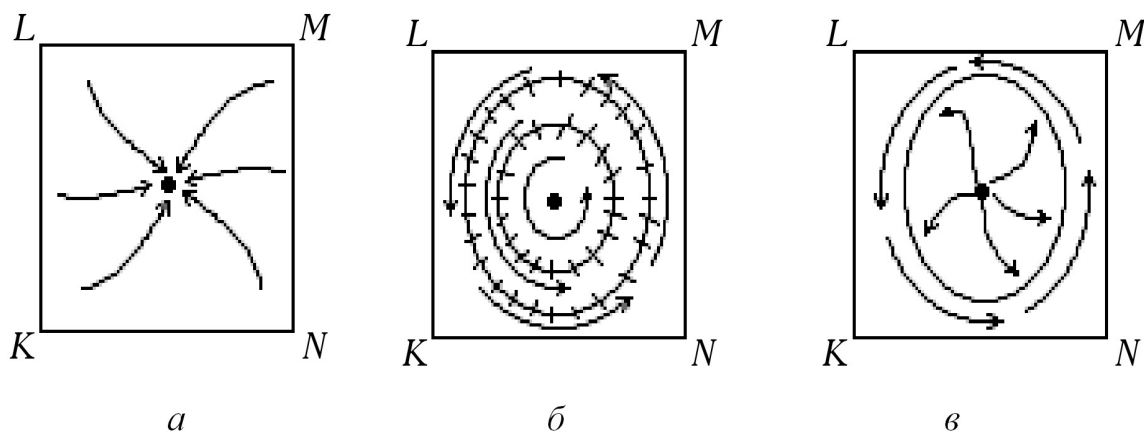


Рис. 6.6. Фазові портрети системи

За значень  $x_0, y_0$  в області 1, коли є одна стійка особлива точка (див. рис. 6.4), можливі два випадки:

- 1) граничні цикли відсутні;
- 2) існує два граничних цикли, які охоплюють особливу точку (або їх парну кількість), – у зовнішньому – стійка, а внутрішньому – нестійка. Фазові портрети, які відповідають цим випадкам, зображено на рис. 6.6 а, б.

Для значень  $x_0, y_0$  в області 2, коли єдина особлива точка є нестійкою, на фазовій площині існує стійкий граничний цикл, і фазовий портрет виглядає так, як зображено на рис. 6.6 в. Отже, для значень параметрів  $x_0, y_0$  в області 2 у хімічному реакторі за будь-яких початкових умов утворюються автоколивання – незатухаючі коливання речовини й температури. Зміна параметрів  $x_0, y_0$ , пов'язана з переходом з області 2 в область 1, що викликає зміну стійкості єдиного стану рівноваги. Характер біфуркації на цій площині параметрів  $x_0, y_0$  визначається знаком деякого виразу  $\alpha_3$ , який називають Ляпуновською величиною. Для стану рівноваги, що розглядається,  $\alpha_3 > 0$ , коли особлива точка з нестійкої перетворюється в стійку, з неї народжується нестійкий граничний цикл. У разі віддалення від межі в область 1 – нестійкий та стійкий цикли зливаються і потім зникають. Умова зникнення граничних циклів визначає в області 1 межу між описаними вище випадками, які зображено на рис. 6.6 а та б.

Під час переходу з області 2 в область 5 через межу  $\Delta = 0$  поблизу вістря клина чи через саме вістря, нестійка особлива точка – вузол розпадається на три особливі точки: одне сідло та два нестійких вузла. Всі вони опиняються всередині граничного циклу (рис. 6.7).

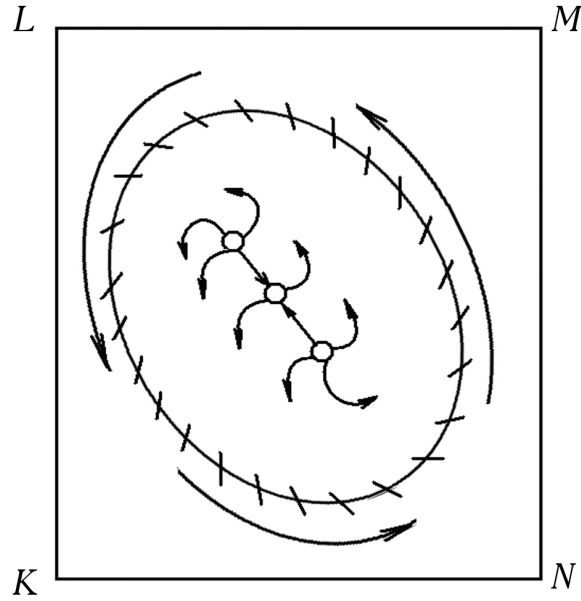


Рис. 6.7. Одне сідло та два нестійких вузла

Можна показати, що граничний цикл не зберігається для всіх значень параметрів  $x_0, y_0$  всередині кривої  $\Delta = 0$ . Справді, граничного циклу немає тоді, коли точка ізоліни  $dy/dx = 0$ , в якій дотична до ізокліни вертикальна і перебуває за межами прямокутника  $KLMN$ . З умови зіткнення ізокліни  $dy/dx = 0$  з прямою  $x = \frac{\lambda x_0}{1 + \lambda}$  та з прямою  $x = x_0$  отримуємо відповідну криву

$$x_0 = \frac{\beta(1 + \lambda)}{2\lambda} (1 - 2y_0 + \sqrt{1 - 4y_0}) e^{\frac{2}{1 + \sqrt{1 - 1/y_0}}} \quad (6.8)$$

та криву

$$x_0 = \frac{\beta}{2} (1 - 2y_0 - \sqrt{1 - 4y_0}) e^{\frac{2}{1 - \sqrt{1 - 1/y_0}}}, \quad (6.9)$$

які обмежують область  $x_0, y_0$ , де немає циклу, що охоплює всі три особливі точки. Дуги цих кривих розміщені всередині  $\Delta = 0$  (рис. 6.4).

Граничного циклу немає для значень  $x_0, y_0$  в області над кривою (6.9) (хвиляста штрихова лінія) і зліва від кривої (6.9) (штрихпунктирна лінія).

Розглянемо механізм зникнення стійкого граничного циклу, що охоплює три особливі точки. Під час віддалення від вістря клину у напрямку до кривих (6.8) і (6.9) настає момент, коли на фазовій площині виникає петля сепаратриси, що переходить з сідла в сідло та охоплює особливі точки. За подальших змін парамет-

рів  $x_0, y_0$  відбувається або збіжність циклу в цю петлю, або народження з петлі нестійкого граничного циклу, що згодом об'єднується зі стійким. В обох випадках результатом буде зникнення стійкого граничного циклу.

Виділимо область параметрів  $x_0, y_0$ , за яких у системі не можуть виникнути автоколивання. Для цього скористаємося *критерієм Бендиксона*, згідно з яким граничних циклів, які повністю лежать у розглянутій області, немає в тій області фазової площини, де вираз  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}$  не змінює знак. Межа цієї області визначається рівністю

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

Підставляючи у ліву частину цієї рівності вирази (6.2), отримуємо рівняння кривої

$$x = y^2 \left[ 1 + (\lambda + \beta)e^{1/y} \right]. \quad (6.10)$$

Поставивши вимогу, щоб крива (6.10) не перетиналась із циклом без контакту з прямокутником  $KLMN$ , отримуємо такі умови: циклів немає у заштрихованій області площини (рис. 6.8), обмеженої прямою  $x = \bar{x}_0$ , де  $\bar{x}_0$  – корінь рівняння,

$$(\lambda + \beta) \exp(\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{x_0}) x_0^{-1/2} = 2\sqrt{x_0} (\sqrt{x_0 + 1} + \sqrt{x_0}),$$

а також частиною кривої отриманої з такої умови:

$$x_0 = y_0^2 \left[ 1 + (\lambda + \beta)e^{1/y_0} \right],$$

яка є дотичною до прямої  $x = \bar{x}_0$ .

Отже, наведене співвідношення показує залежність характеристик системи від співвідношення параметрів  $x_0 = x_0(y_0)$ .

### Завдання

1. Отримати залежності  $y_0 = f(y_S)$  (6.5) числовими методами, вважаючи величини  $x_0$  та  $\lambda$  параметрами.

2. Вивести співвідношення системи рівнянь (6.7).

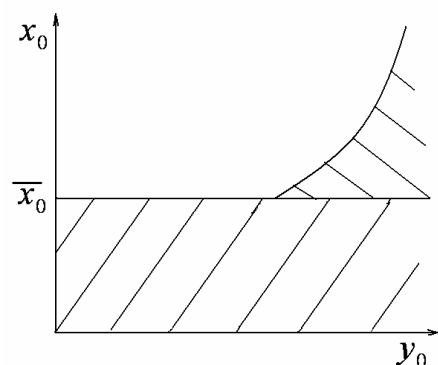


Рис. 6.8. Цикли відсутні в заштрихованій області

## Розділ 7. МОДЕЛІ РОСТУ КЛІТИННИХ ПОПУЛЯЦІЙ

### 7.1. Побудова моделей

Моделі росту клітинних популяцій мають низку істотних відмінностей від моделей біохімічної кінетики. Рівноправні динамічні змінні використовуватимемо разом із концентраціями різних розчинних органічних і неорганічних речовин (субстратів, ферментів, продуктів), також середні «концентрації» клітинної маси. Це можливо лише тоді, коли кількість клітин у популяції досить висока. Якщо популяція налічує декілька клітин (або, скажімо, десятки), її не можна описувати динамічними змінними, тобто середніми значеннями чисельності або щільності біомаси, – для цього потрібний статистичний підхід.

Інша особливість мікробіологічних завдань полягає в емпіричному підході до складання моделі. З незліченної кількості чинників, що впливають на ріст клітини, у кожному конкретному випадку обирають визначальну ланку й за допомогою експерименту знаходять залежність швидкості росту від концентрації обмеженого чинника. Математичне формулювання завдання при цьому може бути різним.

Зростання біомаси клітин  $X(t)$  можна описати простим рівнянням автокаталізу

$$\frac{dX}{dt} = \mu X. \quad (7.1)$$

Величину  $\mu$  називають питомою швидкістю росту біомаси, яка є постійною для необмежених ресурсів живильних речовин; у цьому разі рівняння (7.1) описує експоненціальний ріст культури клітин. Якщо який-небудь компонент живильного субстрату починає обмежувати їх ріст, то величина  $\mu$  зменшуватиметься. Для прикладу на рис. 7.1 наведено результати вимірювання швидкості росту бактерій за різних концентрацій субстрату  $S$  у навколишньому середовищі, тобто питома швидкість росту  $\mu$  культури *Azotobacter vinelandii* залежить від концентрації цукру  $S$ .

Подібну залежність можна математично розглядати порівню, наприклад апроксимувати такою формулою:

$$\mu = \mu_m \left[ 1 - \exp\left(-\frac{S}{K}\right) \right].$$

Проте загального визнання набула інша форма запису залежності  $\mu(S)$  – гіперболічна, запропонована Моно у 1942 р.:

$$\mu = \frac{\mu_m S}{K_S + S}. \quad (7.2)$$

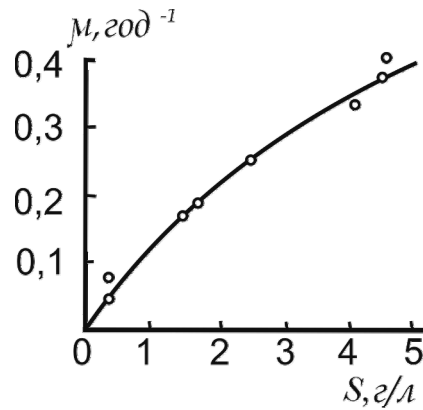


Рис. 7.1. Швидкість росту бактерій за різних концентрацій субстрату  $S$

Криву за формулою (7.2), що відповідає значенням  $K_S = 6,5$  г/л,  $\mu_m = 0,9$  год<sup>-1</sup>, зображено на рис. 7.1.

Перевага закону Моно полягає в тому, що кінетичні рівняння за виглядом аналогічні формулам Міхаеліса–Ментен у ферментативній кінетиці. І це, природно, – не тільки формальна схожість, оскільки в основі життєдіяльності клітини лежать ферментативні реакції. Швидкість росту біомаси визначається швидкістю переробки субстрату ферментом вузького місця у ланцюзі катаболічних реакцій.

Проте є істотні відмінності. Формула Міхаеліса належить до окремої ферментативної реакції, і всі константи, що до неї входять, виражаються через швидкості відповідних хімічних реакцій. У формулі Моно (7.2) заздалегідь передбачається, що не потрібно знати швидкість окремих реакцій. Константи  $K_S$  та  $\mu_m$  визначають за емпіричною залежністю  $\mu(S)$ . Це нагадує завдання про «чорний ящик»: ми фіксуємо лише вхідні дані (у цьому разі концентрацію субстрату) і вихідні – швидкість росту біомаси, вважаючи клітину й її життєдіяльність «чорним ящиком».

За допомогою емпіричного способу були побудовані й інші відомі моделі. Для апроксимації залежності  $\mu(S)$  з максимумом за деякого  $S_m$  можна використовувати формулу, також запозичену з ферментативної кінетики (врахування субстратного пригноблення)

$$\mu = \frac{\mu_m S}{K_S + S + gS^2}.$$

Питому швидкість росту *Propionibacterium schermanii*  $\mu$ , залежно від концентрації лактату  $S$ , зображено на рис. 7.2. В іншому разі питому швидкість росту біомаси визначають продукти життєдіяльності культури.

Іноді швидкість росту залежить від концентрації продукту  $P$  подібно до рівняння неконкурентного гальмування ферментативних

реакцій (рис. 7.3) – залежність між концентрацією пропіонату та питомою швидкістю росту безперервної культури *Propionibacterium schermanii*,

$$\mu = \mu_0 K_P / (K_P + P). \quad (7.3)$$

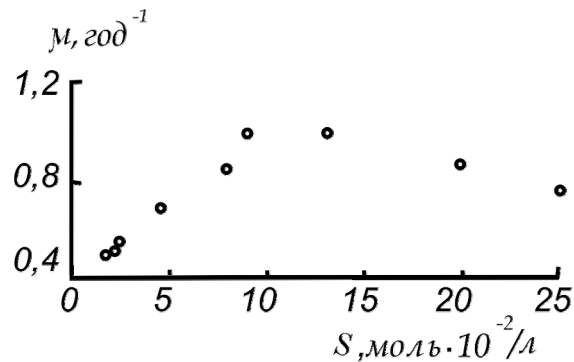


Рис. 7.2. Питома швидкість росту *Propionibacterium schermanii* μ залежно від концентрації лактату S

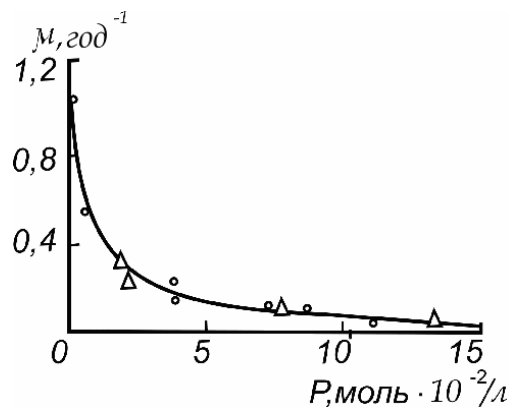


Рис. 7.3. Залежність між концентрацією пропіонату та питомою швидкістю росту безперервної культури *Propionibacterium schermanii*

Об'єднавши вирази (7.3) і (7.5) отримаємо відому формулу Моно–Ієрусалимського:

$$\mu = \frac{\mu_m S}{(K_S + S)(1 + P / K_P)}$$

У всіх наведених формулах швидкість росту біомаси залежить від зовнішніх умов – концентрації живильного субстрату або продукту, що інгібує в навколишньому середовищі клітини.

Паралельно з цим значну кількість моделей будують на основі припущення про безпосередній вплив клітин одна на одну. Найпростіша модель у цьому напрямі була запропонована ще в середині ХІХ ст. Ферхюльстом. Ріст біомаси (або кількості клітин N) виражається рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = \mu N - \beta N^2,$$

де перший член відображає розмноження, а другий – загибель особин. У моделі Ферхюльста передбачається, що ймовірність загинути для однієї особини тим більша, чим більший розмір популяції. Тому за  $t \rightarrow \infty$  чисельність популяції прямує до постійного значення  $N_\infty = \mu / \beta$ .

## 7.2. Проточні культури мікроорганізмів

Проточне, або безперервне культивування має широке застосування у промисловому виробництві, оскільки забезпечує безперервний вивід із установки однорідної маси клітин.

Проточний культиватор, побудований на основі хемостата, має стійкий стан рівноваги, коли маса клітин, що вимиваються, компенсується такими, що народжуються. Зміна швидкості потоку або концентрації живильного субстрату приводить до нового стану рівноваги. Тому для дослідження хемостат є незамінним приладом з відтворюваними, легкозмінними і контрольованими умовами росту.

Непроточні культури можна розглядати як окремих випадок проточних за нульової швидкості потоку.

**Модель Моно.** Проста замкнена система кінетичних рівнянь, що описує зростання біомаси на обмеженому субстраті  $S$ , – це модель Моно:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \mu(S)X - D'X; \\ \frac{dS}{dt} &= -\alpha\mu(S)X + D'(S_0 - S); \\ \mu(S) &= \frac{\mu_m S}{K_S + S}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

де  $D'$  – швидкість потоку, або швидкість розбавлення;  $S_0$  – концентрація субстрату, що надходить у культиватор;  $\alpha^{-1}$  – економічний коефіцієнт, що показує, яка частина поглиненого субстрату використовується для побудови біомаси (зазвичай у мікробіологічній літературі він позначається через  $Y$ ).

Для дослідження системи (7.4) приведемо її до безрозмірного вигляду. Введемо безрозмірні змінні і параметри за формулами:

$$x = \frac{\alpha X}{K_S}, \quad y = \frac{S}{K_S}, \quad t' = \mu_m t, \quad y_0 = \frac{S_0}{K_S}, \quad D = \frac{D'}{\mu_m}.$$

Тоді, після відкидання штриха у новому безрозмірному часі маємо:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{xy}{1+y} - Dx; \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{xy}{1+y} + D(y_0 - y).\end{aligned}\tag{7.5}$$

На фазовій площині  $xy$  система (7.5) має дві особливі точки:

$$\bar{x}_1 = 0; \quad \bar{y}_1 = y_0;\tag{7.6}$$

$$\bar{x}_2 = y_0 - D/(1-D); \quad \bar{y}_2 = D/(1-D).\tag{7.7}$$

Особливі точки визначають зі співвідношень:

$$0 = \frac{x_s y_s}{1 + y_s} - D x_s;$$

$$0 = -\frac{x_s y_s}{1 + y_s} + D(y_0 - y_s).$$

З першого рівняння (7.5) для особливої точки маємо

$$x_s \left( \frac{y_s}{1 + y_s} - D \right) = 0.$$

Підсумувавши перше і друге рівняння, маємо

$$0 = D[-x_s + (y_0 - y_s)].$$

Отже, отримуємо вирази для першої особливої точки:

$$\bar{x}_1 \equiv x_{s1} = 0; \quad \bar{y}_1 \equiv y_{s1} = y_0.$$

Другу особливу точку знаходимо зі співвідношень:

$$x_{s2} = y_0 - y_{s2}; \quad \frac{y_{s2}}{1 + y_{s2}} = D \rightarrow y_{s2} = \frac{D}{1 - D},$$

тобто  $\bar{x}_2 \equiv x_{s2} = y_0 - \frac{D}{1 - D}; \quad \bar{y}_2 \equiv y_{s2} = \frac{D}{1 - D}.$

Розв'язок має сенс тільки за  $0 \leq \bar{x} \leq y_0$  та  $0 \leq \bar{y} \leq y_0$ , тобто в обмеженій області зміни параметра  $D$ :

$$0 \leq D \leq D_B = \frac{y_0}{1 + y_0}.\tag{7.8}$$

Граничне значення швидкості потоку

$$D'_B = \mu_m D_B = \frac{\mu_m S_0}{K_S + S_0}$$

називають швидкістю вимивання. Дійсно, за  $D' > D'_B$  приріст біомаси не може компенсувати її зменшення, і культура повністю «вимивається» з судини.



Зазначимо, що у разі виконання рівняння (7.8) автоматично виконується умова  $D \leq 1$ , тобто  $\bar{y}_2$  – додатне.

Визначимо характер стійкості особливих точок (7.6) і (7.7). Лінеарізована система для малих відхилень  $\xi$  та  $\eta$  від положення рівноваги  $\bar{x}, \bar{y}$  така:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{xy}{1+y} - Dx \equiv P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{xy}{1-y} + D(y_0 - y) \equiv Q(x, y); \\ \frac{d\xi}{dt} &= \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x_s, y_s} \xi + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{x_s, y_s} \eta = a_1 \xi + a_2 \eta; \\ \frac{d\eta}{dt} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{x_s, y_s} \xi + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{x_s, y_s} \eta = b_1 \xi + b_2 \eta; \\ \frac{d\xi}{dt} &= \left( \frac{y_s}{1+y_s} - D \right) \xi + \left( \frac{x_s}{(1+y_s)^2} \right) \eta; \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{y_s}{1+y_s} \xi + \left( -\frac{x_s}{(1+y_s)^2} - D \right) \eta.\end{aligned}$$

Для першої особливої точки ( $x_{s1} = 0$ ;  $y_{s1} = y_0$ ) визначаємо корені характеристичного рівняння

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= \left( \frac{y_0}{1+y_0} - D \right) \xi + 0\eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{y_0}{1+y_0} \xi - D\eta\end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned}a_1 &= \frac{y_0}{1+y_0} - D = D_B - D, \quad a_2 = 0; \\ b_1 &= -D_B, \quad b_2 = -D;\end{aligned}\right.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 + 4(a_2 b_1 - a_1 b_2)} \right];$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (D_B - D) - D \pm \sqrt{(D_B - 2D)^2 + 4(D_B - D)D} \right] = \frac{1}{2} [D_B - 2D \pm D_B];$$

$$\lambda_1 = -D,$$

$$\lambda_2 = D_B - D.$$

Отже, в умовах вимивання, коли  $D > D_B$ , обидва корені негативні й особлива точка з нульовою концентрацією біомаси – стійкий вузол. Якщо  $D < D_B$ , – особлива точка стає сідлом.

Для другої точки (7.7) корені характеристичного рівняння становлять

$$\lambda_1 = -D, \quad \lambda_2 = -(D_B - D)(1 - D)(1 + y_0).$$

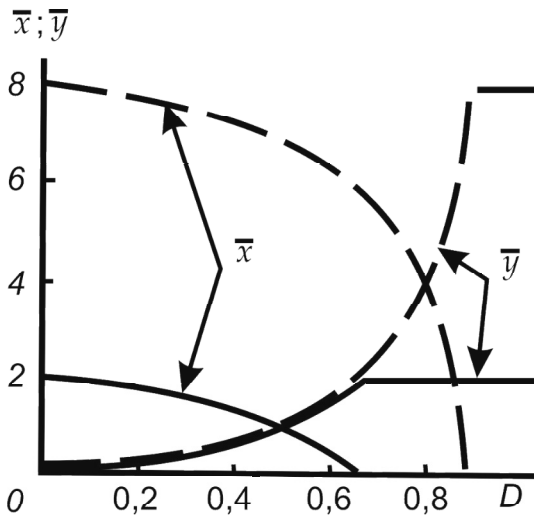


Рис. 7.4. Залежності стаціонарних концентрацій  $\bar{x}$  та  $\bar{y}$  від безрозмірної швидкості розбавлення  $D$  для двох значень параметра  $y_0$

Оскільки цей стан рівноваги існує в позитивному квадранті тільки за  $D \leq D_b \leq 1$ , то обидва корені завжди негативні і особлива точка – стійкий вузол.

Залежності стаціонарних концентрацій  $\bar{x}$  та  $\bar{y}$  від безрозмірної швидкості розбавлення  $D$  для двох значень параметра  $y_0 = 2$  (суцільна лінія),  $y_0 = 8$  (пунктир) зображено на рис. 7.4.

Поведінку системи у разі відхилення від положення рівноваги розглянемо за допомогою фазової площини. Фазовий портрет системи (7.5) зображено на рис. 7.5. Головні ізокліни позначені відповідними штрихами: пряма I – ізокліна вертикальних дотичних  $y = D/(1+D)$ , крива II – горизонтальних дотичних  $x = (y_0 - y)(1 + y)D/y$ ; рис. 7.5 а належить до випадку  $D < D_b$ , рис. 7.5 б –  $D > D_b$ . Приблизний хід фазових траєкторій показано тонкими лініями. У першому випадку всі траєкторії сходяться до стаціонарної точки 2, у другому – до точки 1 (відбувається вимивання біомаси).

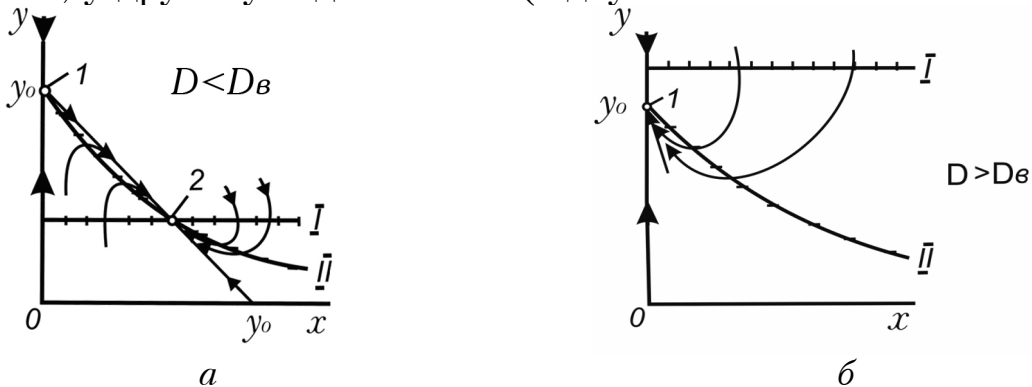


Рис. 7.5. Фазовий портрет системи:  $D < D_b$  (а);  $D > D_b$  (б).

### Завдання

1. Знайти корені характеристичного рівняння для другої особливої точки  $\left(x_{s2} = y_0 - \frac{D}{1-D}; \quad y_{s2} = \frac{D}{1-D}\right)$ .
2. Написати рівняння головних ізоклін рівняння (7.5).
3. Знайти аналітичний розв'язок системи рівнянь моделі Моно для непроточної культури ( $D = 0$ ).

## Розділ 8. ЕКОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ

### 8.1. Експоненціальний та логістичний ріст популяції

Розглянемо математичні моделі росту популяції та взаємодії хижак–жертва за такими спрощеними припущеннями:

1. Щільність виду, тобто кількість особин на одиницю площі, можна повністю описати за допомогою однієї змінної; це означає, що ми нехтуємо віковими, статевими та генетичними відмінностями;

2. Зміна щільності може бути адекватно описана детерміністичними рівняннями;

3. Результати взаємодії в межах виду та між видами вважаються миттєвими. Необхідно враховувати такі умови: якщо детерміністичні рівняння передбачають, що густина популяції досягне стійкого значення, то густина реальної кінцевої системи, ймовірно, буде коливатись; якщо детерміністичні рівняння передбачають коливання кількості популяції, то цілком можливо, що у разі реальної кінцевої популяції це призведе до вимирання.

Найпростіше диференціальне рівняння, що описує зростання популяції, має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = ax,$$

де  $x$  – щільність популяції у момент  $t$ ;  $a$  – стала. Розв'язком цього рівняння є функція  $x = x_0 e^{rt}$ , де  $x_0$  – щільність у момент часу  $t = 0$ . Ця функція описує зростання колонії бактерій до виснаження культурного середовища. З рівняння випливає, що якщо у будь-який момент часу розпочати спостереження за великою вибіркою особин і продовжувати його протягом короткого періоду  $\Delta t$ , то частка особин, що розмножувались протягом цього періоду, буде дорівнювати  $a\Delta t$ . Це означає, що *розподіл за віком* (стосовно бактерій – частка особин, що знаходяться на різних стадіях циклу ділення) не змінюється з часом. Подібне твердження справедливе не для всіх випадків, наприклад, наведене рівняння не може бути адекватним описом для синхронізованої культури. Однак, як показав А. Лотка, вікова структура популяції, що розмножується, буде наближатися до стійкої за умови, що специфічна для кожної вікової групи народжуваність та смертність залишатиметься постійною. Це передусім вимагає сталості умов середовища, наявності надлишку необхідних ресурсів і відсутності еволюційних змін.

Найпростіше диференціальне рівняння справедливе лише для обмеженого періоду часу; наприкінці популяція, що зростає, вичерпує наявні ресурси. Кількість популяції стабілізується на деякому стійкому значенні; вона може відчувати регулярні або нерегулярні флуктуації або скорочуватись. Поведінку популяції, кількість якої стабілізується на певному сталому рівні, часто описують за допомогою логістичного рівняння (аналогічного рівнянню Ферхюльста)

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2,$$

або

$$\frac{dx}{dt} = ax \left( 1 - \frac{x}{a/b} \right) = ax \left( 1 - \frac{x}{k} \right).$$

Застосування цього рівняння можна пояснити тим, що воно є найпростішим диференціальним рівнянням, яке має дві необхідні властивості:

1. За малих значень  $x$  рівняння зводиться до найпростішого, і зростання популяції має експоненціальний характер;
2. Зі зростанням  $t$  величина  $x$  монотонно наближається до сталого значення.

Криву зростання дріжджових клітин, що передбачено логістичним рівнянням, зображено на рис. 8.1.

У рівняннях  $a$  означає істинну швидкість зростання, а  $k$  – місткість середовища. «Місткість середовища» – рівноважна щільність, якої досягає вид «жертви» за відсутності «хижака».

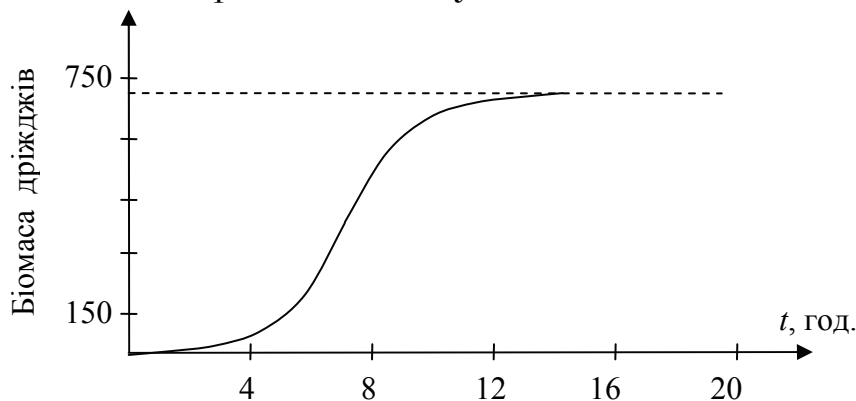


Рис. 8.1. Логістичне зростання дріжджових клітин

Логістичне рівняння було виведено на основі деяких свідчень або припущень відносно того, як саме впливає щільність популяції на розміщення окремих особин – це лише найпростіший математичний опис певного типу зростання.

## 8.2. Рівняння Вольтерра. Система хижак–жертва

Вольтерр розглядав рівняння, що описують взаємодію між видами «жертви» з щільністю  $x$  та «хижаком», який її знищує з щільністю  $y$ :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bx^2 - cxy; \\ \dot{y} &= -ey + c'xy.\end{aligned}$$

В основі цих рівнянь покладено, крім розглянутих раніше, такі припущення:

1. Коли немає хижацтва зростання кількості «жертви» буде відбуватись відповідно до логістичного рівняння, з істинною швидкістю росту  $a$  і місткістю середовища  $a/b$ ;

2. Швидкість виїдання «жертви» пропорційна добутку щільність «хижака» та «жертви».

Ці припущення справедливі, якщо особини одного чи обох видів пересуваються хаотично, тобто якщо є певна постійна ймовірність, що під час зустрічі «хижак» вб'є «жертву», а часом, який витрачає «хижак» на поїдання «жертви», можна знехтувати. Ці припущення подібні до тих, які відомі в хімічній кінетиці для швидкості реакції, під час перебігу якої дві молекули утворюють одну.

У будь-який момент часу  $t$  стан системи повністю описується значеннями  $x$  та  $y$ : кожному стану системи відповідає деяка точка на площині  $(x, y)$ , яку називають *фазовою площиною*. Якщо кожній точці фазової площини можна протиставити стрілку, яка вказує напрямок руху системи у цій точці, то з'єднавши ці стрілки, отримаємо траєкторії, які вкажуть, як буде відбуватись рух системи.

Побудуємо у фазовій площині лінії, для яких  $\dot{x} = 0$  (стрілки паралельні осі ординат) і  $\dot{y} = 0$  (стрілки паралельні осі абсцис):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0, \text{ коли } a - bx - cy = 0; \\ \dot{y} &= 0, \text{ коли } -e + c'x = 0.\end{aligned}$$

Знаходимо точку спокою (рівноваги), коли  $\dot{x} = \dot{y} = 0$  одночасне. Для цього потрібно, щоб

$$x = \frac{e}{c'}; \quad y = \frac{a}{c} - \frac{be}{cc'},$$

при цьому  $x$  обов'язково додатній, але  $y$  має додатне значення тільки за умови, якщо  $\frac{a}{c} > \frac{be}{cc'}$ , або  $\frac{a}{b} > \frac{e}{c'}$ ; ці нерівності показують, що стану спокою, який відповідає співіснуванню «хижака»

і «жертви», можна досягти лише тоді, коли місткість середовища для «жертви»  $a/b$  достатньо велика, щоб популяція «жертви» могла прогодувати «хижака».

Для визначення динаміки системи методом ізоклін знаходимо траєкторію руху. Для цього зазначимо, що за  $x > \frac{e}{c'}$  значення  $\dot{y}$  додатне, а для  $x < \frac{e}{c'}$  – від’ємне. Крім того, для точок розміщених на площині вище лінії  $a - bx - cy = 0$  значення  $\dot{x} < 0$ , а для точок розміщених нижче цієї лінії – додатне. Це дає змогу знайти розташування стрілок, (рис. 8.2 а); на рис. 8.2 б ці стрілки з’єднані між собою й утворюють траєкторію, що має вигляд спіралі, яка намотується на точку спокою. Швидкість наближення спіралі до точки спокою визначається величиною кута, утвореного лініями  $\dot{x} = 0$  та  $\dot{y} = 0$  (рис. 8.3).

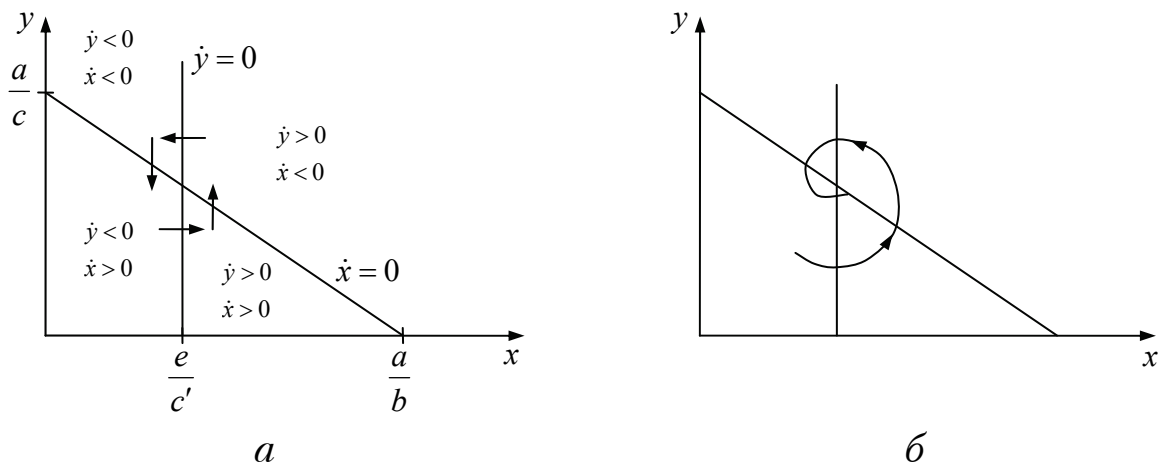


Рис. 8.2. Побудова траєкторій

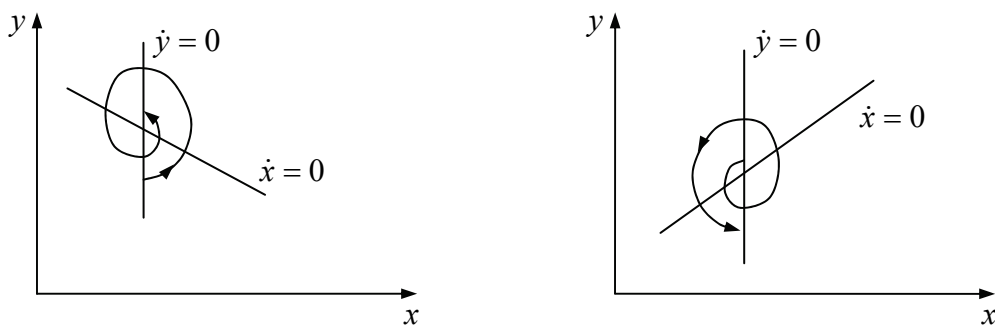


Рис. 8.3. Напрямок руху траєкторій

Ці доволі не суворі переконання, що ґрунтуються на геометричній ситуації для цих рівнянь, можна підтвердити аналітично. Сенс спіралі, закрученої проти годинникової стрілки полягає у тому, що

кількість і «жертви», і «хижака» коливається з меншою амплітудою, причому коливання кількості «хижака» відрізняються за фазою від коливань кількості «жертви».

Припустимо, що єдиним чинником, що обмежує кількість «жертви» є «хижак», при цьому  $b = 0$ , й коли немає «хижака» кількість «жертви» збільшується експоненціально. Поведінку такої системи показано на рис. 8.4. Коливання кількості відбувається з деякою постійною амплітудою, що залежить від початкових умов: у системі, що у початковий момент близька до стану рівноваги, амплітуда коливань невелика, а у системі, яка є з самого початку далекою від точки спокою, коливання матимуть велику амплітуду.

Подібну систему називають *консервативною*, оскільки для неї існує величина, яка не змінюється під час еволюції системи подібно тому, як залишається постійною енергія під час простого гармонічного коливання (рис. 8.5).

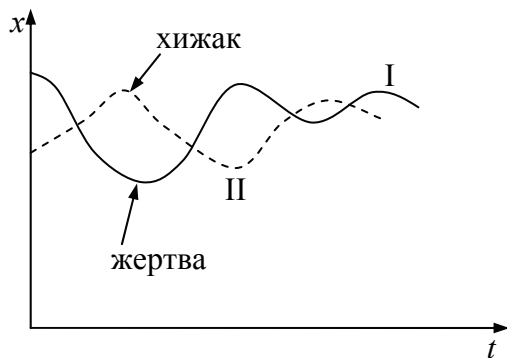


Рис. 8.4. Коливання кількості популяції

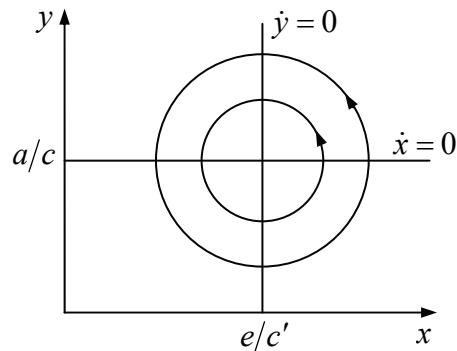


Рис. 8.5 Гармонічне коливання популяції

Член  $-bx^2$  у рівнянні Вольтерра, виражає пригнічену дію, яку певний вид спрямовує на своє власне зростання (наприклад, у результаті конкуренції), таке зростання називають *демпфіруючим*. В екології головний чинник, що зменшує амплітуду коливань – це наявність подібних самопригнічуючих впливів. У рівняння для «жертви» включений демпфіруючий член, але в рівнянні для «хижака» такого члена немає, оскільки припускається, що кількість «хижака» обмежується тільки кількістю його «жертви».

### Завдання

1. Графічним методом дослідити рівняння Вольтерра за наявності сховища у «жертви».

2. Методом фазових траєкторій дослідити рівняння Вольтерра, що описують боротьбу між двома видами травоядних тварин (без демпфірування), що проживають в одному ареалі.

## Розділ 9. ПОРОГОВІ ЯВИЩА

Для того щоб зрозуміти події, що відбуваються у довкіллі, потрібно будувати різні моделі цих подій і зіставляти їх зі спостереженнями.

Складне розглядають як здатність до перемикання між різними типами поведіння зі зміною різних умов, а зумовлені цим гнучкість і пристосовність приводять до поняття вибору між різними наявними можливостями. Вибір опосередковується динамікою флуктуацій, для чого потрібне втручання двох їх антагоністичних проявів – випадковості на малих масштабах й упорядкованості на великих масштабах. При цьому випадковість виступає як деякий інноваційний елемент, потрібний для простору постійно, а впорядкованість дозволяє системі підтримувати колективний режим, що охоплює макроскопічні області й тимчасові інтервали.

Необхідною передумовою всіх цих явищ є нелінійна динаміка, що за певних умов приводить до *нестійкості руху* й *біфуркацій*.

Розглянемо приклад нелінійної системи в умовах далеких від рівноважних, а саме: граничні явища в клітинній динаміці; конкуренцію в біологічних явищах, наприклад ріст пухлин. Початково мала популяція «скоювачів безладдя», наприклад певні клітини деякої тканини, з тих чи інших причин, втратили свої фізіологічні функції й стали злоякісними. Надалі такі клітини намагаються захопити весь організм за рахунок швидкої проліферації, однак організм намагається чинити опір, посилаючи на «поле бою» спеціалізовані клітини-вбивці. Доля організму вирішується у результаті конкуренції між злоякісними клітками й клітинами-вбивцями. Аналіз цієї конкуренції дозволяє отримати найважливіший висновок, а саме знищення «збудників» або їх перемогу можна розглянути як порогове явище.

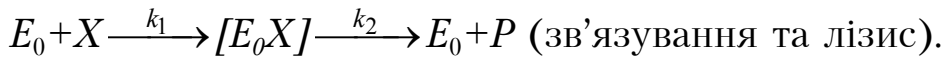
*Основні властивості клітин-убивць.* Імунна система хребетних, що надає організму засоби протидії чужорідним патогенним речовинам, виробляє у кістковому мозку недиференційовані вихідні зародкові клітини. У результаті такої диференціації ці клітини перетворюються в *B*- або *T*-лімфоцити, що надходять в організм. Під впливом чужорідної речовини (*антигени*) *B*-клітини зазнають диференціації у більші клітини (*антитілами*), які проліферують і декретують, та здатні нейтралізувати антигени й хімічні речовини. Між тим, *T*-клітини після подальшої диференціації, що відбувається в тимусі, регулюють дію *B*-клітин, підсилюючи або придушуючи їх діяльність. Крім того, вони беруть участь в імунних



процесах, викликаних безпосередньо клітинами, особливо раковими або чужорідними, як це буває під час пересадження тканин або органів.

### 9.1. Рівняння, які описують стан імунної системи

Нехай  $X$  – щільність популяції проліферувальних клітин-мішеней (наприклад злоякісної пухлини), а  $E_0$  – щільність вільних цитотоксичних клітин. Згідно з експериментальними даними клітини  $E_0$  розпізнають клітини  $X$ , фіксують їх у вигляді комплексу  $E \equiv E_0X$  та надалі здійснюють їх лізис у разі дисоціації комплексу  $E$ . Цю послідовність стадій можна записати у такому вигляді:



Припустимо, що під час розгляду процесу конкуренції між  $E_0$  та  $X$  стан імунної системи можна вважати стаціонарним майже у всіх відносинах. Це означає, що повна щільність популяції вільних і зв'язаних імунних клітин  $E_\Sigma = E_0 + E$  залишається постійною з часом. За цих умов можна записати такі рівняння балансу:

$$\frac{dX}{dt} = \lambda X \left(1 - \frac{X}{N}\right) - k_1 E_0 X;$$

$$\frac{dE_0}{dt} = -k_1 E_0 X + k_2 E.$$

Множник  $1 - \frac{X}{N}$  виражає існування верхньої межі  $N$  для  $X$  усередині елемента об'єму, у якому відбувається конкурентна боротьба. Оскільки лізис має відбуватися набагато швидше інших стадій, для другого рівняння можна скористатися квазістаціонарними наближеннями. Тому вважаємо, що  $\frac{dE_0}{dt} \sim 0$ , та використовуючи умову збереження для клітин  $E$ -типу, можна виразити  $E_0$  через  $X$  та отримати перше рівняння у вигляді

$$\frac{dX}{dt} = \lambda X \left(1 - \frac{X}{N}\right) - \frac{k_1 E_\Sigma X}{1 + \frac{k_1}{k_2} X}$$

у разі заміни

$$\tau = \lambda t; \quad \beta = k_1 E_\Sigma / \lambda; \quad x = k_1 / k_2 X; \quad \theta = k_2 / k_1 N.$$

Безрозмірне рівняння записують у вигляді

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1 - x\theta) - \frac{\beta x}{1 + x}. \quad (9.1)$$

Очевидно, що рівняння (9.1) завжди допускає стаціонарний розв'язок  $x = 0$ .

Лінійний аналіз стійкості показує, що незалежно від значення цей розв'язок нестійкий якщо  $\beta < 1$ , і стійкий якщо  $\beta > 1$ .

Існування ненульового стаціонарного розв'язку для  $X$  відповідає пухлинному стану тканини. Залежно від значення  $\theta$  можуть виникати дві якісно різні ситуації, які зображено на рис. 9.1 та 9.2.

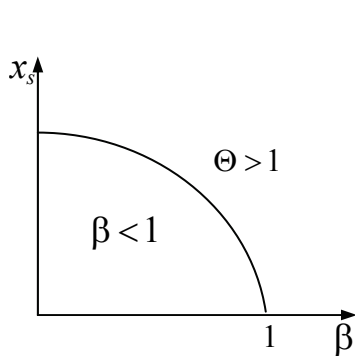


Рис. 9.1. Якщо  $\theta > 1$ , пухлина може існувати лише за умови  $\beta < 1$

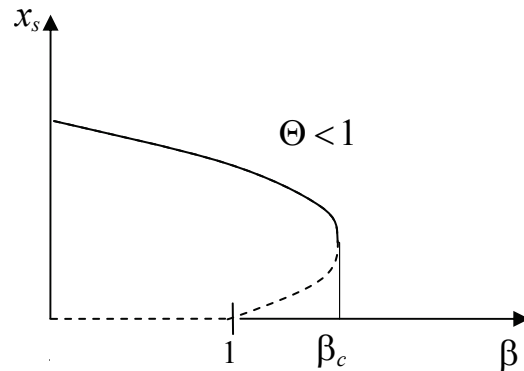


Рис. 9.2. Явище бістабільності, властивості якого нагадують нерівноважні переходи

Якщо  $\theta > 1$  пухлина може існувати лише за умови  $\beta < 1$ , тому умови повного придушення пухлини зводяться до того, що в процесі імунного процесу  $\theta$  має перевищувати одиницю. За  $\theta < 1$  перехід між пухлинним і безпухлинним станом пов'язаний із явищем бістабільності, властивості якого нагадують нерівноважні переходи. В області  $1 < \beta < \beta_c = (1 + \theta) 2/4\theta$  нульовий (нормальний) і одиничний (пухлинний) стани стійкі одночасно. Можна сподіватися, що перехід між цими станами пов'язаний із процесами нуклеації. Якщо нормальний стан відповідає пухлині, то її придушення у разі зростання  $\beta$  можливе за умови  $\beta > \beta_c$ . Параметр  $\beta$  описує ефективність імунної системи, тому цей стан імунної системи в області  $\beta < \beta < \beta_c$  за  $\theta < 1$ , залежно від передісторії тканини, може бути як нормальним, так і патологічним.

### Завдання

1. Показати стійкість здорового організму ( $X_\xi = 0$ ) від параметра  $\beta$  – ефективності імунної системи.
2. Вивести залежність пухлинного стану від значень  $\theta$ .
3. Знайти значення  $\beta_c$ .

## Частина друга

### Розділ 10. СИСТЕМИ З ХІМІЧНИМИ РЕАКЦІЯМИ ТА ДИФУЗІЄЮ

#### 10.1. Відкриті системи в умовах механічної рівноваги

Перш ніж детально розглянути термодинаміку систем, які здатні проявляти властивість впорядкованості, потрібно визначити коло задач, які є основним предметом обговорення.

Розглянемо суміш елементів  $X_1, \dots, X_n$ . Ця система відкрита для надходження із навколишнього середовища речовин, які здатні перетворюватися в  $X_1, \dots, X_n$  всередині реакційного об'єму  $V$ . Використовують такі припущення:

1. Система ізотермічна ( $T = \text{const}$ ).
2. Система перебуває в стані механічної рівноваги (немає потоку маси) та не піддається впливам зовнішніх полів.
3. Концентраційні градієнти не занадто великі в тому сенсі, що змінні  $\rho_1, \dots, \rho_n$ , які відображають хімічний склад системи, значно не змінюються на довжині вільного пробігу частки. Це обмеження, зокрема, означає, що міжфазових границь немає всередині об'єму  $V$ .
4. Система має задовольняти граничні умови, які не залежать від часу.

Мотивування цих умов цілком обґрунтоване. Поведінка живих клітин значною мірою визнається хімічними перетвореннями та дифузиею макромолекул або невеликих часток – метаболітів типу АТФ чи цАМФ. У живих організмах часто є складні гомеостатичні механізми, які підтримують температуру на одному рівні. Природно, що деякі явища типу циркуляції крові у вищих тварин чи локомоції мікроорганізмів є суто механічними та виходять за межі викладених вище припущень. Більш загальні ситуації, в яких, наприклад, здійснюється взаємозв'язок між механічним рухом, тепловими ефектами та хімічними явищами, за потреби розглянемо окремо.

Змінні, що описують миттєвий стан системи, задовольняють перераховані вище умови, їх можна обчислити, перш за все, за припущеннями 1 та 2, які дозволяють розглядати температуру та конвекційну швидкість окремо від парціальної густини компонентів  $X_1, \dots, X_n$ , які характеризують стан суміші. Для знаходження густини потрібно знайти рівняння, що описує еволюцію потрібних нам величин у багатокомпонентній суміші реагентів.

## 10.2. Рівняння балансу маси

Принцип збереження повної маси довільної (нерелятивістської) системи можна виразити так:

$$\frac{dm}{dt} = \text{потік маси через поверхню } \Sigma \equiv \frac{d_e m}{dt}.$$

Відкрита система, яка обмінюється речовинами  $1, \dots, n$  з навколишнім середовищем через обмежуючу поверхню  $\Sigma$ ;  $J_1^\Sigma, \dots, J_n^\Sigma$  та  $\rho_1^\Sigma, \dots, \rho_n^\Sigma$  – дифузійні потоки та концентрації цих речовин на поверхні відповідно (рис. 10.1).

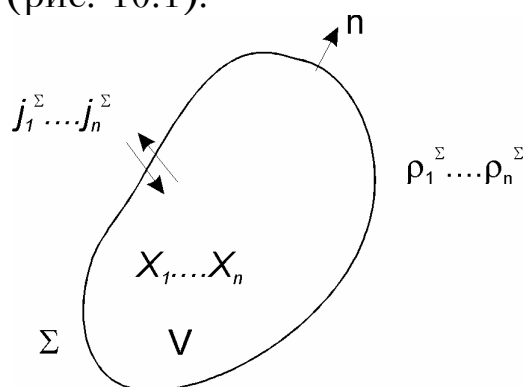


Рис. 10.1. Відкрита система

Інакше кажучи, всередині об'єму  $V$  маса не створюється, які б процеси там не відбувалися. Положення змінюється під час розгляду маси кожного хімічного елемента окремо, тоді маємо

$$\frac{dm_j}{dt} = \frac{d_e m_j}{dt} + \frac{d_i m_j}{dt}; \quad (j=1, \dots, n), \quad (10.1)$$

де  $\frac{dm_j}{dt}$  – зміна маси компоненту  $X_j$  в об'ємі  $V$ ;  $\frac{d_e m_j}{dt}$  – потік маси (дифузія) компонента  $X_j$  через поверхню  $\Sigma$ ;  $\frac{d_i m_j}{dt}$  – продукування  $X_j$  у результаті хімічних реакцій.

Позначимо через  $\gamma$  кількість хімічних реакцій в яких приймає участь  $r$  компонентів  $X_j$ , і нехай  $W_\rho$  ( $\rho=1, \dots, r$ ) – швидкість окремих реакцій. Якщо припустити, що міжмолекулярні взаємодії не входять явно у вираз для частоти ефективних зіткнень, то швидкості реакцій можна виразити через парціальні густини  $\{\rho_j\}$ . Таке припущення дозволяє розширити відоме з рівноважної термодинаміки уявлення про ідеальну суміш, згідно яким кожний компонент суміші підкоряється законам ідеальних розчинів.

Як приклад розглянемо гомогенну реакцію, яка проходить у малому об'ємі  $\Delta V$ ,



Швидкість такої реакції

$$|W_1| = k_1 \Delta V \rho_A \rho_j. \quad (10.2 \text{ б})$$

Аналогічно для реакції



маємо

$$|W_2| = k_2 \Delta V \rho_A \rho_j^2. \quad (10.3 \text{ б})$$

У першій реакції (10.2 а) витрачається одна молекула  $X_j$ , а в другій (10.2 б) – дві (10.3 а, б). Можна вважати, що стехіометричні коефіцієнти  $\nu$  компонента  $X_j$  у цих реакціях дорівнюють відповідно  $-1$  та  $-2$ . Повне використання маси  $X_j$  в обох реакціях визначається виразом

$$\frac{d_i m_j}{dt} = -k_1 \Delta V \rho_A \rho_j - 2k_2 \Delta V \rho_A \rho_j^2,$$

у загальному випадку

$$\frac{d_i m_j}{dt} = \sum_{\rho=1}^r \nu_{j\rho} W_\rho.$$

Тепер рівняння (10.1) набуде вигляду

$$\frac{dm_j}{dt} = \frac{d_e m_j}{dt} + \sum_{\rho=1}^r \nu_{j\rho} W_\rho. \quad (10.4)$$

Перейдемо до густини  $\rho_j$ , відносно рівності (10.4) до одиниці об'єму  $V$ . Крім того, за допомогою співвідношення

$$W_\rho = \int dV \omega_\rho$$

введемо швидкість реакції в одиниці об'єму  $\omega_\rho$ , тоді маємо

$$\frac{d}{dt} \int dV \rho_i = \frac{d_e m_j}{dt} + \sum_{\rho=1}^r \nu_{i\rho} \int dV \omega_\rho. \quad (10.5)$$

Зазначимо, що рівність (10.5) можна також переписати в термінах молярних концентрацій, парціальних густин, а також мольних чи масових часток, тобто виразити через відношення  $\rho_j / \sum_i \rho_i$ .

У загальному випадку хімічні системи є просторово-неоднорідними. Нехай величина  $(d_e m_j)/dt$  описує швидкість зміни маси

в об'ємі  $V$  за рахунок речовини, яка проникає через обмежувальний об'єм поверхні  $\Sigma$ . Позначимо через  $J_j^\Sigma$  відповідні дифузійні потоки, тоді можна записати

$$\frac{d_e m_j}{dt} = - \int_{\Sigma} d\Sigma n J_j^\Sigma.$$

Знак мінус перед інтегралом відповідає орієнтації нормального одиничного вектора  $\mathbf{n}$  назовні від об'єму  $V$  (рис. 10.1). За допомогою теореми Гауса про дивергенцію, поверхневий інтеграл можна перетворити в об'ємний (дод. 1).

$$\int_{\Sigma} d\Sigma n J_j^\Sigma = \int_V dV \operatorname{div} J_j.$$

Враховуючи дві останні рівності з рівняння (10.5) можна отримати локальне рівняння для величини  $\rho_j$ , прирівнявши підінтегральні вирази в кожній точці об'єму  $V$ . З урахуванням положення про механічну рівновагу похідна  $d/dt$  комутує зі знаком інтеграла, отримуємо

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} = -\operatorname{div} J_j + \sum_{\rho} \mathbf{v}_{j\rho} \omega_{\rho}. \quad (10.6)$$

Отже, навіть у простих прикладах величини  $\omega_{\rho}$  є нелінійними (поліноміальними) функціями змінних  $\{\rho_j\}$ , а це означає, в загальному випадку рівняння (10.6) утворює систему лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Для того, щоб розв'язати ці рівняння, слід доповнити їх задовільними граничними умовами, які можуть бути різними і відображають зовнішні обмежувальні умови, що накладаються на систему.

Розглянемо граничні умови, в яких задаються потоки  $\{J_j\}$  чи концентрації  $\{\rho_j\}$  на обмежувальній поверхні  $\Sigma$ . Такі умови наявні в крайових задачах гідродинаміки та в теорії електромагнітного поля; називатимемо їх *умовами Неймана та Діріхле* відповідно.

Розв'язок нелінійних рівнянь, зазвичай, важко знайти навіть у простих прикладах. Загальний математичний апарат аналізу таких рівнянь нині не розроблений, тому важливо вивчати їх якісне поведіння, зокрема ті властивості, які майже не залежать від деталей хімічного механізму та дифузійного процесу.

### 10.3. Постановка завдання

Термодинамічний аналіз нелінійних систем дозволяє виявити роль віддаленості від рівноваги як джерело впорядкованості. Розглянемо кінетичний аспект цієї проблеми – різноманітні типи процесів самоорганізації та проаналізуємо механізми виникнення просторових та часових структур. Для отримання інформації про розв'язки, які описують впорядковані стани, використаємо методи нелінійної математики. Розглянемо систему, яка перебуває в стані термодинамічної рівноваги та має  $n$  хімічно реагуючі компоненти  $X_1, \dots, X_n$ . Миттєвий макроскопічний стан системи описується змінними  $\{\rho_j\}$ , які задовольняють рівняння балансу маси

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} = -\operatorname{div} J_j + \sum_p \nu_{jp} \omega_p, \quad (j=1, \dots, n) \quad (10.7)$$

В області нелінійності незворотних процесів величини  $J_j$  та  $\omega_p$  стають складними нелінійними функціями  $\rho_j$ , однак у фізичній хімії та біології в багатьох випадках розглядається поведінка в часі проміжних продуктів, які наявні в досить малих концентраціях. У такій системі дифузійний потік визначають за виразом (перший закон Фіка)

$$J_j = -D_j \nabla \rho_j,$$

де матрицю коефіцієнтів дифузії вважають сталою. У наступному розгляді коефіцієнти  $D_j$  вважають сталими. Рівняння (10.7) набуває вигляду

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} = f_j(\{\rho_j\}) + D_j \nabla^2 \rho_j, \quad (10.8)$$

де нелінійна функція  $f_j$  описує повну швидкість продукування компонента  $X_j$  у всіх хімічних реакціях. У випадку фізико-хімічних систем, які в стані рівноваги підкоряються закону діючих мас, функція  $f_j$  буде поліноміальним чином залежати від змінних  $\rho_j$ . Через це рівняння (10.8) утворює систему нелінійних рівнянь у частинних похідних.

З теорії таких рівнянь відомо, що в результаті наявності похідної першого порядку за часом та похідної другого порядку за просторовою координатою рівняння (10.8) є параболічним. Найпростіше рівняння параболічного типу  $U_{xx} - U_y = 0$ . Параболічні

рівняння характерні для часової еволюції дисипативних систем. Зокрема в таких системах справедливий другий закон Фіка у разі дифузії, або закон Фур'є у разі теплопровідності.

Для повної побудови завдання потрібно врахувати відповідні граничні умови, які виражають характер взаємодії з навколишнім середовищем. Найчастіше розглядаються або умови Діріхле

$$\{\rho_1^\Sigma \dots \rho_n^\Sigma\} = \{\text{const}\}, \quad (10.9 \text{ а})$$

або умови Неймана

$$\{n\nabla \rho_j^\Sigma, \dots, n\nabla \rho_n^\Sigma\} = \{\text{const}\}, \quad (10.9 \text{ б})$$

або лінійна комбінація цих умов. Інколи одна із констант у рівнянні (10.9 б) тотожно перетворюється в нуль, тоді система є замкнутою щодо обміну відповідною хімічною речовиною. Ця умова справедлива для більшості експериментів за реакцією Білоусова–Жаботинського, яка служить найбільш відомим прикладом виникнення дисипативних структур у хімічній системі. Умови сталості концентрацій чи браку потоків необхідні під час виведення критерію еволюції у вигляді  $\frac{dP}{dt} \leq 0$  для процесу наближення системи до стаціонарного стану, де  $P$  – продукування ентропії.

У модифікованій формі ці рівняння можуть описувати теплові ефекти. Достатньо до виразу (10.8) додати рівняння збереження внутрішньої енергії

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div} \lambda \nabla T + \sum_{\rho} (-\Delta H_{\rho}) \omega_{\rho}(T, \{\rho_j\}), \quad (10.10)$$

де  $c$  – питома теплоємність суміші,  $\Delta H_{\rho}$  – теплота реакції  $\rho$ , а  $\omega_{\rho}$  нелінійно (зазвичай експоненціально) залежить від температури через константи швидкостей. Більш того, проста зміна інтерпретації змінних дозволяє описати такі різні явища, як конкуренція популяцій в екосистемі чи електрична активність мозку.

Отже, моделювання конкретної системи зводиться до розумного вибору змінних, типу «хімічних» законів, які визначають величини  $f_j$ ,  $\Delta H_{\rho}$  та  $\omega_{\rho}$  у рівняннях (10.8–10.10), та інших параметрів. Серед останніх на поведінку системи найбільше впливають коефіцієнти дифузії  $\{D_j\}$ , константи швидкостей  $\{k_{j\rho}\}$ , розмір системи та природа зовнішніх умов.



#### 10.4. Стійкість за Ляпуновим

Відповідно до термодинамічної теорії втрата стійкості термодинамічної гілки є важливим явищем, яке супроводжує процес самоорганізації.

Насамперед визначимо поняття стійкості за Ляпуновим. Нехай функції  $X_j(\mathbf{r}, t)$  – розв’язок системи диференціальних рівнянь (10.8), тобто сукупність функцій  $\{X_j(\mathbf{r}, t)\}$ , залежних від просторової та часової змінних  $\mathbf{r}$  та  $t$ , задовольняються тотожно рівнянням (10.8) з урахуванням початкових та граничних умов. Передбачається, що рух відбувається в обмеженій просторово-часовій області  $\{0 \leq r_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2, 3; 0 \leq t \leq \infty\}$ , і що в цій області функції  $X_j(\mathbf{r}, t)$  мають фізичний зміст, тобто обмежені та додатні.

*Визначення 1.* Вважатимемо, що  $X_j(\mathbf{r}, t)$  *стійка за Ляпуновим*, якщо за  $\varepsilon > 0$  та  $t = t_0$  існує таке  $\eta = \eta(\varepsilon, t_0)$ , то будь-який розв’язок  $Y_j(\mathbf{r}, t)$ , для якого  $|X_j(\mathbf{r}, t_0) - Y_j(\mathbf{r}, t_0)| < \eta$ , задовольняє також нерівність  $|X_j(\mathbf{r}, t_0) - Y_j(\mathbf{r}, t_0)| < \varepsilon$  за  $t > t_0$ . Якщо такого  $\eta$  не існує, – розв’язок нестійкий. Отже, стійкість за Ляпуновим еквівалентна відомій з диференціального обчислення властивості рівномірної неперервності  $X(\mathbf{r}, t)$  за початковими умовами.

*Визначення 2.* Якщо  $X_j(\mathbf{r}, t)$  стійка, і якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |X_j(\mathbf{r}, t) - Y_j(\mathbf{r}, t)| = 0,$$

то вважатимемо, що  $X_j(\mathbf{r}, t)$  *асимптотично стійка*.

Інакше кажучи, розв’язок (чи рух) стійкий, якщо всі близькі розв’язки асимптотично наближаються до нього.

Як приклад розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2. \quad (10.11)$$

Рівняння має два стаціонарні розв’язки:

$$x_{01} = -1; \quad x_{02} = 1,$$

а також сімейство розв’язків (рис. 10.2):

$$x = \operatorname{th}(t - t_0 + k); \quad k = \operatorname{arctg}(x(0)); \quad (-1 < x(0) < 1).$$

Із визначень 1 та 2 випливає, що  $x_{01}$  – нестійкий розв’язок, а  $x_{02}$  – асимптотично стійкий.

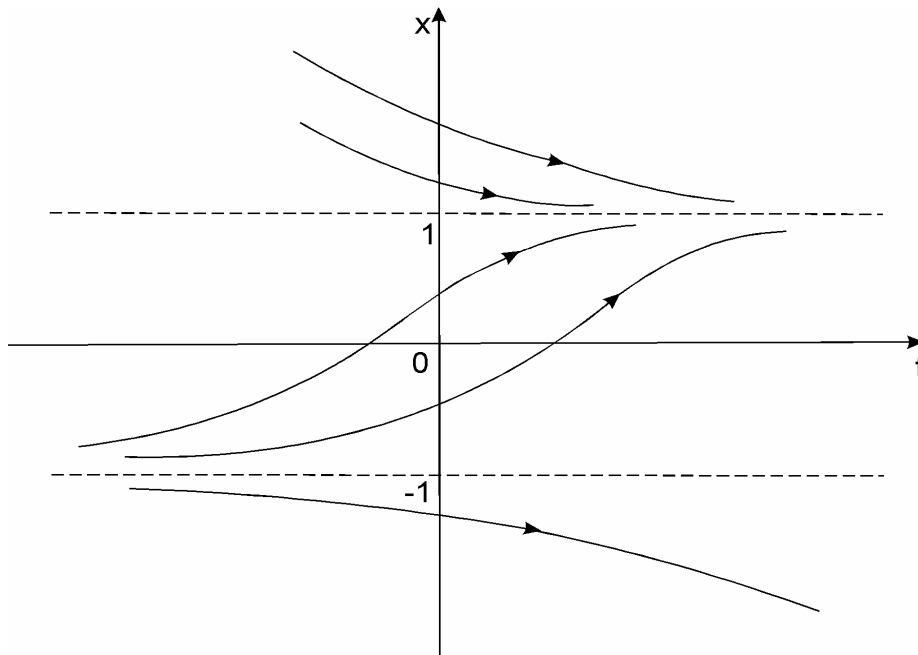


Рис. 10.2. Сімейство розв'язків рівняння (10.11)

### 10.5. Орбітальна стійкість

У багатьох випадках, цікавих з погляду фізичної хімії та біології, розглядаються системи, які піддаються впливу незалежних від часу зовнішніх впливів. У рівнянні (10.8) це відповідає тому, що його права частина – насправді функція  $f_j$  – не залежить від часу. Такі системи називають *автономними*. Нехай  $X_j(\mathbf{r}, t)$  – розв'язок рівняння (10.8). Тоді будь-яка функція вигляду  $X_j(\mathbf{r}, t + \tau)$  має  $\tau$  – довільну константу, і теж є розв'язком цього рівняння. Інакше кажучи, автономні системи мають властивість трансляційної інваріантності. Ця нескінченна множина розв'язків, що відрізняються один від одного фазою, визначає *траєкторію* (або орбіту) системи у відповідному просторі. У загальному випадку це  $n$ -вимірний евклідовий простір, утворений  $n$  змінними  $\rho_1, \dots, \rho_n$  і траєкторіями в цьому просторі є криві. У найбільш загальному випадку розглядаються нескінченновимірні простори, відомі як *функціональні простори*.

Припустимо, що вибрана певна «метрика», яка задає відстані в фазовому просторі, і нехай  $C$  означає деяку траєкторію. Вважати-мемо, що  $C$  орбітально стійка, коли за заданого  $\varepsilon > 0$  існує таке  $\eta > 0$  (за умови, що деяка точка  $X_0$ , яка належить іншій траєкторії, перебуває в момент  $t_0$  на відстані  $\eta$  від  $C$ ), то за  $t \geq t_0$  відстань від  $X$  до  $C$  не перевищує  $\varepsilon$ , інакше  $C$  орбітально нестійка.

Якщо  $C$  орбітально стійка і  $t \rightarrow \infty$  відстань між  $X$  та  $C$  прямує до нуля, то  $C$  асимптотично орбітально стійка.

Не варто плутати стійкість за Ляпуновим та орбітальну стійкість (рис. 10.3).

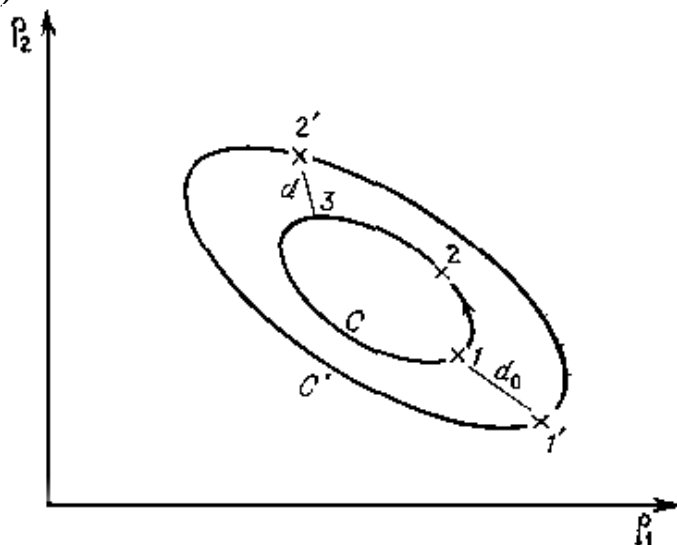


Рис. 10.3. Порівняння стійкості за Ляпуновим та орбітальної стійкості:  $C$  і  $C'$  – дві траєкторії з різними періодами

Відстань між  $C$  і  $C'$  завжди обмежена, однак відстань між точками 1 та 1' може збільшуватись у часі внаслідок фазового зсуву, обумовленого різницею періодів. Отже, стан 1 не обов'язково стійкий за Ляпуновим, навіть якщо траєкторія  $C$  орбітально стійка.

Як просту ілюстрацію поняття орбітальної стійкості можна навести таку систему рівнянь, розглянуту Пуанкаре

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y + X(1 - X^2 - Y^2) \\ \frac{dY}{dt} = -X + Y(1 - X^2 - Y^2) \end{cases}$$

Ці рівняння допускають стаціонарний розв'язок

$$X_0 = Y_0 = 0.$$

Виражаючи  $X$  та  $Y$  через полярні координати з полюсом у точці  $X_0 = Y_0 = 0$ , маємо

$$\begin{cases} X = r \cos \theta, \\ Y = r \sin \theta \end{cases}$$

тоді систему рівнянь можна перетворити до вигляду

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(1 - r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = -1 \end{cases}$$

Ці рівняння допускають рішення, яке відповідає круговій траєкторії кінцевого радіусу:

$$r = 1;$$
$$\theta = \theta_0 - t.$$

За допомогою таких визначень орбітальної стійкості можна встановити, що ця траєкторія асимптотично стійка та «притягує» фазові траєкторії за  $t \rightarrow \infty$ .

## 10.6. Структурна стійкість

У визначеннях стійкості за Ляпуновим та структурної стійкості неявно припускається, що структура правої частини основного рівняння (10.8) залишається незмінною. У цьому разі різноманітні збурення, які неперервно діють на систему, пересувають миттєве значення системи з стандартного стану в новий збурений стан, відображений у деякій другій точці того самого фазового простору, який служить для опису незбуреної системи.

Оскільки система постійно піддається впливу збурювальної дії з боку зовнішнього середовища, деякі з параметрів можуть змінюватися неперервно чи навіть стрибкоподібно. Крім того, можуть «включатись» нові параметри, що підвищує кількість взаємодіючих степенів вільності, тому деякі параметри можуть послаблювати свій вплив на систему. В кожному випадку зміна параметрів приводить до зміни структури самих рівнянь, оскільки при цьому змінюються праві частини рівнянь (10.8). Нехай величина  $\varepsilon$  служить мірою зміни одного з таких параметрів. Якщо всі розв'язки, які описують змінену систему, залишаються в околі  $O(\varepsilon)$  (порядку  $\varepsilon$ ) розв'язку, важатимемо, що останній розв'язок *структурно стійкий*. Якщо такого околу немає, то система *структурно нестійка*. Інакше кажучи, у структурно стійкій системі топологічна структура фазових траєкторій (якщо вдається побудувати фазовий простір) залишається незмінною.

Найпростішою ілюстрацією уявлення про структурну стійкість служить рух маятника. Звичайною математичною моделлю цієї системи є гармонічний осцилятор, який характеризується нескінченним набором траєкторій, неперервно залежних від початкових умов. У природі, однак, маятник ніколи не є гармонічним осцилятором, оскільки має тертя. В результаті система поступово переходить в єдиний рівноважний стан, якого досягає раніше чи пізніше залежно від величини тертя. Звідси можна зробити висновок, що рівняння, які відповідають гармонічному осцилятору є структурно

нестійкими відносно тертя, а тому для роботи годинника потрібна зовнішня рушійна сила, яка буде компенсувати тертя.

### **Завдання**

1. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{dx}{dt} = 1 - x^2$$

аналітично та методом ізоклін.

2. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x^2) \\ \frac{dy}{dt} = -1 \end{cases} .$$

## Розділ 11. АВТОКАТАЛІТИЧНІ МОДЕЛІ

### 11.1. Автоколивальні системи

У 1929 р. Андроновим було введено поняття автоколивальних систем, коливальні процеси в яких не потребують для їх підтримки періодичного зовнішнього впливу. Вид автоколивань залежить від властивостей системи, але не залежить від початкових умов. Такі системи до того часу були відомі та досліджені лордом Релеєм, який вивчав звучання струн музичних інструментів під впливом рівномірного руху смичка. Неперервне звучання підтримувалось за допомогою нелінійних процесів пов'язаних із розсіюванням і підтримкою енергії коливань.

*Автоколивальна система* – це не тільки фізична система, відома переважно в радіотехніці й радіофізиці, але й біофізичні та хімічні системи, наприклад реакція Білоусова–Жаботинського, гліколізні коливання, коливання в нейродинаміці.

Найпростішим класичним прикладом існування автоколивань в хімічних реакціях є «брюсселятор», запропонований у 1967 р. Пригожином та Лефевром, які вважали його моделлю, що описує абстрактну тримолекулярну хімічну реакцію і дозволяє найбільш просто та наочно встановити якісні типи поведінки.

«Брюсселятор» нині продовжує відігравати роль базової моделі, яку залучають для розгляду все більш складних ситуацій, включаючи стохастичні та синхронізаційні ефекти, а також тестової моделі для побудови математичних методів аналізу систем із сильною нелінійністю, але не пов'язаної з конкретними хімічними процесами.

Одночасно з «брюсселятором» було створено моделі, які описують реальні експериментально спостережувані взаємодії. Однією з перших була модель коливань субстратів і продуктів гліколізу – модель Селькова (1967). Під час більш точного розгляду виявляється, що обидві базові моделі хімічної та біохімічної кінетики – «брюсселятор» і модель Селькова – можуть бути зведені до одного і того самого узагальненого рівняння Релея.

**Модель Релея.** У системі з тертям наявне внутрішнє джерело енергії, причому силу, з якою він діє на коливальний об'єкт, розраховують лінійно за вхідними змінними – зміщенням  $\xi$  і швидкістю  $\dot{\xi}$ .

Рівняння руху набуває вигляду

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -k_0 \frac{d\xi}{dt} - k_1 \xi + k_2 \frac{d\xi}{dt},$$

де  $k_0$  – коефіцієнт лінійного тертя;  $k_1$  – коефіцієнт пружності;  $k_2$  – коефіцієнт для складової сили, яка залежить від швидкості.

Фізично останній член відповідає силі, яка передається системі ударом, тобто швидким повідомленням їй додаткового імпульсу. Ця складова природно виникає у техніці звуковидобування з музичних інструментів.

Якщо  $k_2 > k_0$ , то розв'язок такого лінійного рівняння буде зростати за експонентою протягом часу, і в певний момент швидкість перестане бути малою, тому до першого доданка в правій частині потрібно додати наступний за степенем швидкості член, який направлений протилежно їй і пропорційний  $\dot{\xi}^3$ .

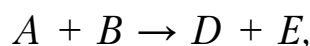
Рівняння Релея набуває вигляду

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \lambda \frac{d\xi}{dt} + \lambda' \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^3 + \Omega^2 \xi = 0,$$

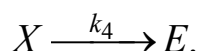
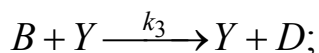
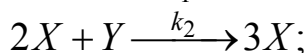
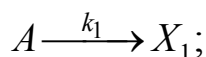
де введені позначення  $\lambda = (k_2 - k_0)/m$ ;  $\Omega^2 = k_1/m$ .

Релей показав, що в цій системі можливі стаціонарні коливання, якщо  $\lambda$  і  $\lambda'$  мають протилежні знаки, причому якщо  $\lambda < 0$ , а  $\lambda' > 0$ , то такі коливання стійкі.

**Брюсселятор.** Опишемо просту хімічну реакцію перетворення вихідних продуктів (субстратів)  $A$  та  $B$  у продукти  $D$  та  $E$  як реакцію



що складається з таких стадій:



Найбільш нетривіальним кроком у цій системі було використання проміжних речовин  $X$  та  $Y$ , пов'язаних тримолекулярною реакцією, що забезпечує коливальний режим.

За умови, що продукти необоротно видаляються зі сфери реакції, субстрати знаходяться в надлишку і значення констант швидкостей реакцій дорівнюють одиниці, динаміка концентрацій проміжних реагентів описується такою системою рівнянь:

$$\frac{dx}{dy} = A + x^2 y - (B + 1)x;$$

$$\frac{dy}{dx} = Bx - x^2 y,$$

де  $x, y$  – безрозмірні концентрації метаболітів реакції;  $A, B$  – безрозмірні параметри реакції.

Схема реакції фізично нереалістична через тримолекулярну стадію, однак її структура вельми зручна для обговорення важливих проблем нерівноважних процесів у разі дотримання простішої умови – включення в реакцію всього двох компонентів.

Однак іноді у ферментативній кінетиці реакція може бути зведена до кубічного вигляду, якщо фермент має три каталітичні центри, які здатні одночасно фіксувати дві молекули одного виду і одну молекулу другого виду.

**Зведення рівняння брюсселятора до узагальненого рівняння Релея.** Введемо повну концентрацію проміжних речовин  $x + y = z$  і змінну  $u = A - x$ . Підстановка рівняння брюсселятора приводить до системи рівнянь.

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= u; \\ \frac{du}{dt} &= A(B + A^2) - (1 + B + 3A^2)u + 3Au^2 - u^3 - (A - u)^2 z. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Стаціонарні точки цього рівняння  $z_0 = (B + A^2)/A$  і  $u_0 = 0$ . Під час введення змінної  $\xi = z - z_0$ , зміщуємо стаціонарну точку на початок координат. Підставивши  $\xi$  в рівняння (11.1), отримаємо

$$\frac{d\xi}{dt} = u; \quad \frac{du}{dt} = (B - A^2 - 1)u + \left(2A - \frac{B}{A}\right)u^2 - u^3 - (A - u)^2 \xi.$$

Це рівняння можна записати у вигляді одного диференціального рівняння другого порядку, яке відповідає узагальненому рівнянню Релея

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + (1 + A^2 - B)\frac{d\xi}{dt} + \left(\frac{B}{A} - 2A\right) \times \\ \times \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^3 + \left(A - \frac{d\xi}{dt}\right)^2 \xi = 0, \end{aligned}$$

коефіцієнти якого мають вигляд

$$\lambda = (1 + A^2 - B);$$

$$\lambda' = 1;$$

$$\lambda'' = \frac{(B - 2A^2)}{A};$$

$$\Omega = A; k = A^{-1};$$



$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \lambda \frac{d\xi}{dt} + \lambda'' \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \lambda' \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^3 + \Omega^2 \left( 1 - k \frac{d\xi}{dt} \right)^2 \xi = 0. \quad (11.2)$$

Рівняння (11.2) називають узагальненим рівнянням Релея порівняно з рівнянням (11.1). Нелінійність в ньому, так як і в класичному рівнянні Релея, зумовлена тільки швидкостями, а не зміщеннями. В цьому разі у «дисипативній» частині рівняння (11.2) (другий, третій і четвертий доданок лівої частини рівняння) з'являється розклад за всіма степенями аж до третього, а також проявляється вплив швидкості на частоту вільних коливань  $\Omega$  з точністю до першого степеня. При цьому параметр  $\lambda'' > 0$  визначає асиметрію позиції центру граничного циклу.

**Аналіз узагальненого рівняння Релея.** Форма запису у вигляді узагальненого рівняння Релея має перевагу під час вивчення автоколивань у класичних біохімічних системах. Вона є природним способом лінеаризації в околі нерухомої точки ( $\xi = 0$ ;  $\xi' = 0$ ) – достатньо знехтувати всіма доданками зі степенями вище першого

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \lambda \frac{d\xi}{dt} + \Omega^2 \xi = 0.$$

Розв'язок цього рівняння (див. додаток).

$$\xi(t) = \xi_0 \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right) \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де  $\omega = \left(\Omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\xi_0$  та  $\varphi_0$  – початкова амплітуда і фаза відповідно.

Якщо  $\lambda < 0$ , то коливання зростатимуть за експонентою.

Якщо  $\lambda > 0$  – стійка точка.

Якщо  $\Omega^2 \leq \frac{\lambda^2}{4}$  – змінюється тип нестійкості нерухомої точки з фокусу (осциляційний ріст) на вузол (ангармонійний ріст). Для демонстрації принципу існування автоколивань у нелінійному режимі перепишемо узагальнене рівняння Релея в типовій «автоколивальній» формі

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \left[ \lambda + \lambda'' \frac{d\xi}{dt} + \lambda' \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 \right] \frac{d\xi}{dt} + \Omega^2 \left( 1 - k \frac{d\xi}{dt} \right)^2 \xi = 0.$$

Нелінійний множник за  $\Omega^2$  завжди додатний через квадратичність, тому на умову існування граничного циклу він не впливає.

Ця умова буде визначатися поведінкою дужки за  $\dot{\xi} - [F(\xi)]$ .

Якщо  $\lambda < 0$ , то зростання величини швидкості може призвести до зміни знака цього члена, і збудження коливань зміниться демпфіруванням. Граничний цикл брюсселятора зображено на рис. 11.1.

Спостерігаються релаксаційні коливання, повільні за ізокліною зі швидким зривом. Графіки множника перед  $\dot{\xi}$ , що забезпечує існування автоколивань, зображено на рис. 11.2, з якого видно, що за достатньо великих  $u = \dot{\xi}$  знак коефіцієнта перед швидкістю збігається з її знаком, тобто можливе існування стійких періодичних рухів, що впливає з фазових портретів.

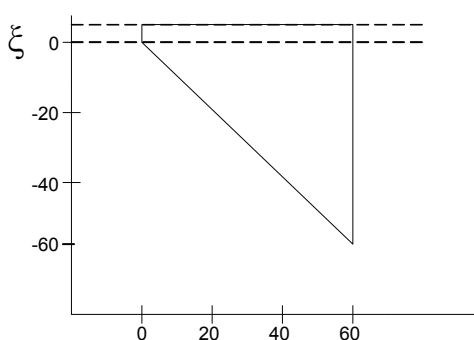


Рис. 11.1. Граничний цикл брюсселятора

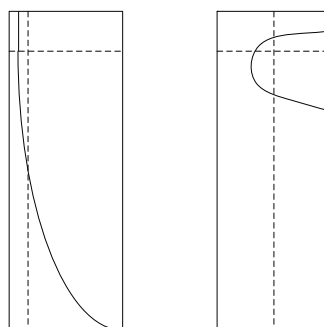


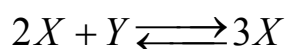
Рис. 11.2. Графіки множника  $\xi$

Наявність квадратного за швидкістю доданка, який не змінює знак, призводить до зміщення центра циклу.

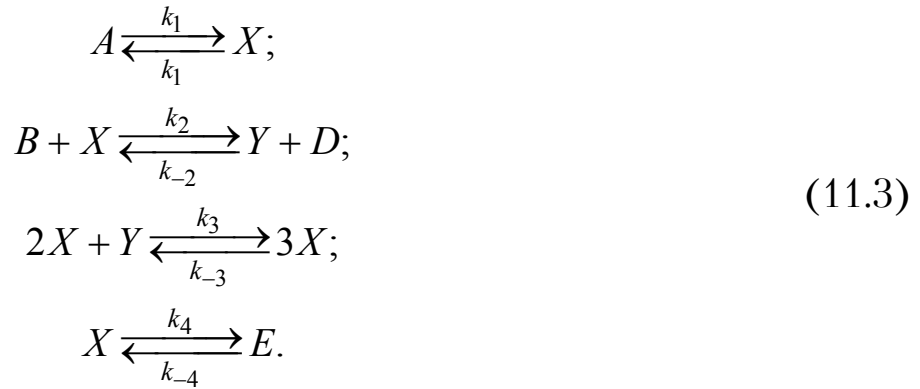
## 11.2. Тримолекулярна модель (брюсселятор)

У 1973 р. Тісон та Лайт, а також незалежно від них Ганусе довели теорему про те, що якщо окремі стадії двостадійної реакції з двома проміжними продуктами є моно- або бімолекулярними, то в такій системі не може реалізуватися граничний цикл, тобто для виникнення узгодженої в часі поведінки необхідні тримолекулярні реакції або процеси більш високого порядку.

Для дестабілізації термодинамічної гілки в рівнянні для швидкості хімічної реакції має бути як мінімум кубічна нелінійність. Найпростіша реалізація такої нелінійності здійснюється за допомогою такої стадії:



або за допомогою аналогічної стадії, в якій  $X$  та  $Y$  міняються ролями, тому розглянемо сукупність реакцій в умовах відкритої системи:



Нерівноважні умови створюються за рахунок негайного вида-лення «кінцевих продуктів»  $D$  і  $E$  з реакційного простору. В термі-нах констант швидкостей це припущення еквівалентне рівностям  $k_{-4} = k_{-2} = 0$ . Для наступного спрощення можна ввести додаткову умову  $k_{-1} \approx 0$  (яка абсолютно виправдана за наявності надлишку  $A$ ), а також умову  $k_{-3} \approx 0$ , тоді схему (11.3) можна описати системою рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{t}} &= k_1 \tilde{A} - (k_2 \tilde{B} + k_4) \tilde{X} + k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} + \tilde{D}_1 \nabla_r^2 \tilde{X} \\
\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{t}} &= k_2 \tilde{B} \tilde{X} - k_3 \tilde{X}^2 \tilde{Y} + \tilde{D}_2 \nabla_r^2 \tilde{Y}
\end{aligned}
\tag{11.4}$$

Ця система може проявляти різні типи узгодженої поведінки.

Зміст кубічної нелінійності в цій моделі, яка була вперше за-пропонована в 1968 р. Пригожиним і Лефевевером, називають *три-молекулярною моделлю*, або *брюсселятором*. По-перше, важливо розуміти, що основною метою під час вивчення моделі є встанов-лення якісних типів поведінки, сумісних із деякими фундамен-тальними законами, такими як закони термодинаміки або хімічної кінетики. Незалежно від того, доречна тримолекулярная стадія чи ні, брюсселятор є ідеальною системою для вивчення кооператив-них процесів у хімічній кінетиці. До певної міри він відіграє таку саму роль, як моделі типу гармонічного осцилятора, які широко використовували для зображення основних властивостей систем, описуваних законами класичної або квантової механіки. По-друге, в більшості галузей фізики кооперативних явищ, таких як фізика плазми або лазерна фізика, кубічні нелінійності, які реалізують різного роду зв'язки між визначеними «модами», насправді реалі-зують першу нетривіальну нелінійність, що призводить до узго-дженої поведінки. По-третє, хоча тримолекулярная стадія і не така поширена як бімолекулярні процеси, вона не так вже й невідома в

хімічній кінетиці, навіть у разі реакцій у газовій фазі. Наприклад, в одній із стадій реакції Чепмена, що проходить у верхніх шарах атмосфери, відбувається утворення озону за потрійного зіткнення атомів кисню



де  $M$  – деяка третя частинка, роль якої полягає у відведенні надлишку енергії, що виділяється у цій реакції.

### 11.3. Безрозмірні змінні, стаціонарні стани і граничні умови

У рівняннях (11.3) міститься шість констант швидкостей, коефіцієнти дифузії обох речовин і розміри реактора. Для спрощення якісного аналізу системи введемо такі безрозмірні змінні:

$$t = k_4 \hat{t}; \quad A = \left( \frac{k_1^2 k_3}{k_4^3} \right)^{1/3} \hat{A}; \quad X = \left( \frac{k_3}{k_4} \right)^{1/2} \hat{X};$$

$$Y = \left( \frac{k_3}{k_4} \right)^{1/2} \hat{Y}; \quad B = \left( \frac{k_2}{k_4} \right)^{1/2} \hat{B}; \quad D_i = \frac{\hat{D}_i}{k_4}.$$

Підставляючи ці співвідношення в систему рівнянь (11.4), можна знайти рівняння для безрозмірних змінних  $X$ ,  $Y$ :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B+1)X + X^2 Y + D_1 \nabla^2 X;$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y + D_2 \nabla^2 Y,$$
(11.5)

де оператор Лапласа визначений у тому самому просторі координат. Достатньо реалістичні значення констант швидкостей і коефіцієнтів дифузії можуть призвести до коефіцієнтів порядку одиниці в рівняннях (11.4). Слід зауважити, що у зв'язку з відповідними модельними розрахунками на ЕОМ, в яких значення коефіцієнтів  $A$ ,  $B$ ,  $D_1$ ,  $D_2$  на перший погляд можуть здаватися нереальними.

Розглянемо розв'язок рівнянь (11.4) за граничних умов двох таких типів:

$$X^{\Sigma} = A;$$

$$Y^{\Sigma} = \frac{B}{A} \quad (\text{умова Діріхле});$$
(11.6)

$$n \left( \frac{\partial X}{\partial r} \right)^\Sigma = n \left( \frac{\partial Y}{\partial r} \right)^\Sigma \quad (\text{умова браку потоку}).$$

З будь-якою з цих двох умов рівняння (11.5) припускають єдиний стаціонарний розв'язок:

$$\begin{aligned} X_0 &= A; \\ Y_0 &= \frac{B}{A}, \end{aligned} \quad (11.7)$$

який належить термодинамічній гілці. Це можна точно довести, приймаючи оборотну схему (11.3) і поступово збільшуючи повну спорідненість реакції, тобто тим самим відхиляючи систему від рівноваги. Зазначимо, що якби граничні умови (11.6) були вибрані не у вигляді  $A$  і  $B/A$ , то термодинамічна гілка була б неоднорідною внаслідок ефектів граничного шару. Проте з погляду кооперативних процесів ці явища є побічними.

Аналіз стійкості термодинамічної гілки (11.7) за допомогою лінеаризації кінетичних рівнянь має надати інформацію про можливість процесів самоорганізації в цій системі.

#### 11.4. Лінійний аналіз стійкості

Нехай

$$\begin{cases} X = X_0 + x \\ Y = Y_0 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = A + x \\ Y = \frac{B}{A} + y \end{cases},$$

тоді отримаємо з рівняння (11.5) лінеаризовану систему відносно  $(x, y)$ . Зазначимо, що сукупність змінних  $(x, y)$  можна інтерпретувати або як систематичне зовнішнє збурення, або як внутрішні флуктуації поблизу стандартного стану. В останньому випадку ми не будемо обчислювати апріорну ймовірність такої флуктуації, а знаходитимемо її тимчасову еволюцію, що визначається властивостями системи.

Систему, лінеаризовану відносно змінних  $x, y$ , запишемо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

за умови

$$x = y = 0 \quad \text{на } \Sigma$$

або

$$n\nabla x = n\nabla y = 0 \text{ на } \Sigma,$$

де сукупність чисел  $x, y$  розглядається як вектор  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  у відповідному просторі. Після деяких перетворень можна знайти таку форму лінеаризованого оператора  $L$ :

$$L = \begin{pmatrix} B - 1 + D_1 \nabla^2 & A^2 \\ -B & -A^2 + D_2 \nabla^2 \end{pmatrix}. \quad (11.8)$$

Цей оператор є параболічним. Для того, щоб проаналізувати асимптотичну поведінку розв'язків системи (11.8) за  $t \rightarrow \infty$ , достатньо знайти власні значення  $\omega_m$  і власні вектори  $\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix}$  оператора  $L$

(завдання 1):

$$\begin{pmatrix} B - 1 + D_1 \nabla^2 & A^2 \\ -B & -A^2 + D_2 \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix} = \omega_m \begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix} \quad (11.9)$$

за умови

$$U_m^\Sigma = V_m^\Sigma = 0 \quad (11.10 \text{ а})$$

або

$$\bar{n}\nabla U_m^\Sigma = \bar{n}\nabla V_m^\Sigma = 0. \quad (11.10 \text{ б})$$

Шуканий розв'язок  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  виражається через  $\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix}$  так:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_m a_m e^{\omega_m t} \begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix}.$$

Отже, стандартний стан  $(A, B/A)$  асимптотично стійкий, якщо за всіх  $m$  власні значення  $\omega_m$  задовольняють умову

$$Re\omega_m < 0.$$

Якщо за деякого  $m$  виконується зворотнє співвідношення ( $Re\omega_m > 0$ ), то розв'язок, який належить термодинамічній гілці, є нестійким. Біфуркація відбувається за  $Re\omega_m = 0$ , якщо відповідне власне значення має непарну кратність. Розглядатимемо, переважно, *проті* власні значення.

Для того, щоб чіткіше уявити подробиці відповідних розрахунків, обговоримо випадок одновимірних систем. Зазначимо, що аналіз проводитиметься для обмежених середовищ. Однією з причин цього

є те, що в хімії та здебільшого в біології, межі, наприклад, мембрани, відіграють дуже важливу роль. Інша причина пов'язана зі спрощенням математичного аналізу, оскільки у просторі кінцевих розмірів спектр оператора  $L$  є дискретним, що дозволяє побудувати аналітичні вирази для розв'язання нелінійних рівнянь вище точки появи нестійкості.

Нехай  $l$  – розмір системи, тоді оператор Лапласа набуває вигляду

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2}; \quad 0 \leq r \leq l,$$

причому його власними функціями є певні тригонометричні вирази. Оскільки  $\nabla^2$  – єдиний диференціальний оператор, що фігурує в  $L$ , його власні вектори  $\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix}$  повинні мати такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \sin \frac{m\pi r}{l}; \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (11.11)$$

за граничних умов (11.10 а):

$$\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \cos \frac{m\pi r}{l}; \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (11.12)$$

якщо немає потоку на межах. Розглянемо послідовно власні значення, власні вектори і структуру оператора  $L$  у просторі квадратично-інтегрованих функцій, для яких сукупність нормальних мод у рівняннях (11.11) або (11.12) утворює повний базис.

**Власні значення.** Підставляючи рівняння (11.11) і (11.12) у рівняння (11.9), можна отримати *характеристичне рівняння*, в якому  $\omega_m$  виражаються через  $m$  і параметри системи. Після низки алгебраїчних перетворень отримуємо

$$\omega_m^2 + (\beta_m - \alpha_m)\omega_m + A^2 B - \alpha_m \beta_m = 0; \quad (11.13)$$

$$\begin{aligned} \alpha_m &= B - 1 - \frac{m^2 \pi^2}{l^2} D_1; \\ \beta_m &= A^2 + \frac{m^2 \pi^2}{l^2} D_2. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Розв'язок рівняння (11.13) має вигляд

$$\omega_m^\pm = \frac{1}{2} \{ \alpha_m - \beta_m \pm \sqrt{(\alpha_m - \beta_m)^2 - 4A^2 B} \}.$$

Із цього виразу можна отримати такі результати:

1. Якщо  $m \rightarrow \infty$ , маємо  $(\alpha_m + \beta_m)^2 \rightarrow (m^4 \pi^4 / l^4)(D_2 - D_1)^2 \rightarrow \infty$ .

Отже, за скінченних  $A$  і  $B$  значення  $\omega_m$  завжди дійсні, і оскільки  $D_2 + D_1 > |D_2 - D_1|$ , то значення  $\omega_m$  завжди від'ємні. Видно, що не всі нормальні моди відіграють однакову роль, оскільки моди, відповідні  $m \rightarrow \infty$ , прагнуть стабілізувати систему.

2. Значення  $\omega_m$  є комплексними, якщо

$$(\alpha_m + \beta_m)^2 - 4A^2B < 0$$

або

$$B^2 - 2(A^2 + \delta_m)B + (A^2 - \delta_m)^2 < 0, \quad (11.15)$$

де

$$\delta_m = 1 + \frac{m^2 \pi^2}{l^2}(D_1 - D_2). \quad (11.16)$$

Корені квадратного тричлена (11.15) визначають за виразом

$$B_{\pm} = A^2 + \delta_m \pm 2A\sqrt{\delta_m}.$$

Отже, мають виконуватись нерівності

$$\delta_m > 0 \quad (11.17 \text{ а})$$

та

$$(A - \sqrt{\delta_m})^2 < B < (A + \sqrt{\delta_m})^2. \quad (11.17 \text{ б})$$

Із виразів (11.16) та (11.17 а) отримуємо

$$D_2 - D_1 \leq \frac{l^2}{m^2 \pi^2}. \quad (11.18)$$

Зокрема, якщо можна виключити значення  $m = 0$ , наприклад, у разі умов Діріхле, то за  $D_2 - D_1 > \frac{l^2}{\pi^2}$  комплексно-спряжених коренів немає.

3. Дійсна частина комплексних власних значень додатна, якщо в рівнянні (11.13) коефіцієнт для  $\omega_m$  від'ємний, або якщо (рівняння (11.14))

$$B > A^2 + 1 + \frac{m^2 \pi^2}{l^2}(D_1 + D_2).$$

Залежність  $B$  від  $m$  на критичній кривій показано на рис. 11.3.

$$B_m = A^2 + 1 + \frac{m^2 \pi^2}{l^2}(D_1 + D_2).$$



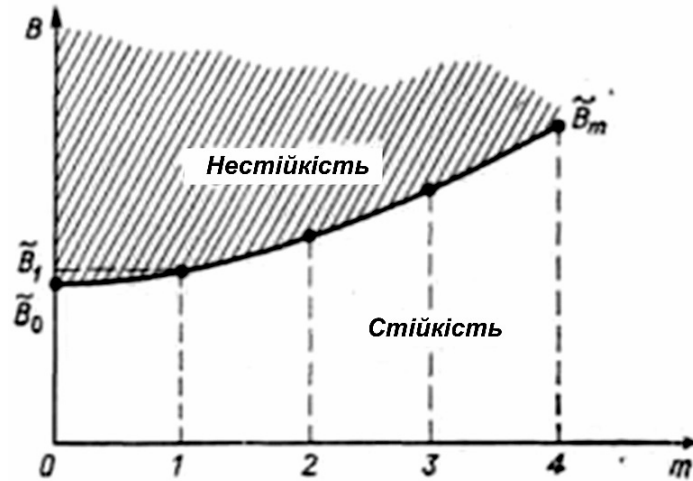


Рис. 11.3. Діаграма лінійної стійкості, яка належить біфуркації періодичних у часі розв'язків:  $m$  – хвильове число;  $\tilde{B}_m$  – параметр біфуркації ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )

У першій точці біфуркації  $\tilde{B}_0$  завжди виникає просторово-однорідний граничний цикл. Очевидно, що в цьому разі (суто уявні) власні значення  $\omega_m$  є простими, тому точки кривої  $B_m$ , які відповідають цілим значенням  $m$ , обов'язково є точками біфуркації періодичних у часі розв'язків. Зі зростанням  $B$  перша біфуркація, яка сумісна з граничними умовами, відбувається або за  $m = 0$ , якщо немає потоків (рівняння (11.14)), або за  $m = 1$ , у разі виконання умов Діріхле.

4. Якщо  $\omega_m$  є дійсними числами, то може виникнути один додатний корінь за

$$\alpha_m \beta_m - A^2 B > 0$$

або

$$B > 1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + \frac{A^2}{D_2 m^2 \pi^2} l^2 + \frac{D_1 m^2 \pi^2}{l^2}.$$

Залежність  $B$  від  $m$  на критичній кривій показано на рис. 11.4.

$$B_m = 1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + \frac{A^2}{D_2 m^2 \pi^2} l^2 + \frac{D_1 m^2 \pi^2}{l^2}. \quad (11.19)$$

Перша точка біфуркації  $B_c$  розташована в околі мінімуму  $B_\mu$  кривої нейтральної стійкості, але в загальному випадку  $B_c \neq B_\mu$ . У цьому разі  $B$  має нульове власне значення ( $\omega_m = 0$ ), зазвичай просте, за винятком деяких значень параметрів. Отже, точки на кривій  $B_m$ , що відповідають цілим значенням  $m$ , обов'язково є точками біфуркації стаціонарних розв'язків. Зі зростанням  $B$  перша

нестійкість виникає за  $B = B_c$  відповідно до цілого числа  $m_c$ , найближчого до мінімуму  $(\mu, B_\mu)$  критичної кривої, тому

$$\mu^2 = \frac{Al^2}{\pi^2 \sqrt{(D_1 D_2)}};$$

$$B_\mu = \left[ 1 + \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} A \right]^2. \quad (11.20)$$

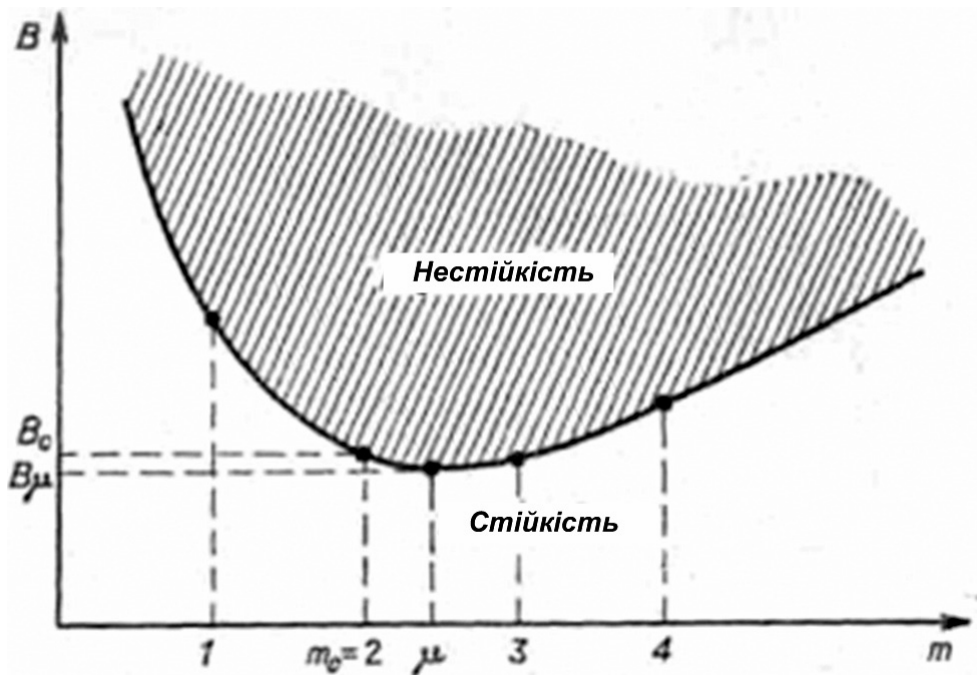


Рис. 11.4. Діаграма лінійної стійкості, що належить біфуркаціям стаціонарних розв'язків.

5. Об'єднуючи результати 3 і 4, можна отримати умови виникнення першої нестійкості в досліджуваній системі під час зростання  $B$ . Очевидно це відбувається у разі досягнення значення  $B = \min(B_c, \tilde{B}_0)$ , якщо немає потоків, та значень  $B = \min(B_c, \tilde{B}_1)$  у разі виконання умов Діріхле.

Зіставляючи співвідношення (11.18), (11.19) і (11.17 а, б), можна зробити висновок, що у разі виконання умов Діріхле перша біфуркація призводить до періодичних у часі розв'язків, якщо

$$D_2 - D_1 < \frac{l^2}{\pi^2};$$

$$\tilde{B}_1 < B_\mu,$$

або

$$\left(\frac{D_1}{D_2}\right)^{1/2} > \sqrt{1 + \frac{1 + \pi^2(D_1 + D_2)/l^2}{A^2}} - \frac{1}{A}. \quad (11.21)$$

Зокрема, якщо  $D_1 = D_2 = D$ , можна отримати

$$D < \frac{Al^2}{\pi^2}. \quad (11.22)$$

Проте якщо  $D_1/D_2 \rightarrow 0$  або  $D_1/D_2 \rightarrow \infty$ , нерівність (11.21) не виконується, тому близькі значення коефіцієнтів дифузії сприяють біфуркації періодичних у часі розв'язків. Зазначимо, що у разі виконання умов Діріхле біфуркація стаціонарних розв'язків можлива за однакових коефіцієнтів дифузії тільки тоді, коли ці коефіцієнти задовольняють нерівності, протилежні нерівності (11.22). Різні можливі варіанти, які виникають під час першої біфуркації показано на рис. 11.3.

6. Для повноти розгляду отримуємо умови, за яких власні значення  $\omega_m$  у випадку 4 стають дворазово виродженими. Для цього потрібно, щоб рівняння (11.19), яке розглядаємо як рівняння відносно  $m$ , мало вигляд

$$(m^2 - m_1^2)(m^2 - m_2^2) = 0,$$

де  $m_1$  і  $m_2$  – додатні цілі числа. Зокрема, якщо припустити, що  $m_1 = m_c < \mu$ , то отримаємо  $m_1 = m_c + 1$ , тоді умовою двократного виродження буде рівність добутку коренів рівняння (11.19) величині  $m_c(m_c + 1)$ . Записуючи цю умову, отримуємо

$$\frac{Al^2}{\pi^2(D_1D_2)^{1/2}} = m_c(m_c + 1). \quad (11.23)$$

Залежності параметра біфуркації  $B$  від хвильового числа  $n$  зображено на рис. 11.5. Вертикальними лініями показано допустимі дискретні значення  $n$  для системи, на межах якої або задані концентрації, або потоки дорівнюють нулю. Значення параметрів: (I)  $A = 2$ ,  $l = 1$ ,  $D_1 = 8,0 \cdot 10^{-3}$ ,  $D_2 = 1,6 \cdot 10^{-3}$ ; (II)  $A = 2$ ,  $l = 1$ ,  $D_1 = 1,6 \cdot 10^{-3}$ ,  $D_2 = 8,0 \cdot 10^{-3}$ . На рис. (II) лінію, що обмежує області  $a$  та  $b$  показано неповністю.

Якщо умова (11.23) не задовольняється, то розглянемо лише *першу* біфуркацію з термодинамічної гілки. Як буде показано далі, це пов'язано з тим, що тільки в цьому випадку теорія біфуркації може надати інформацію про стійкість відгалужених розв'язків.

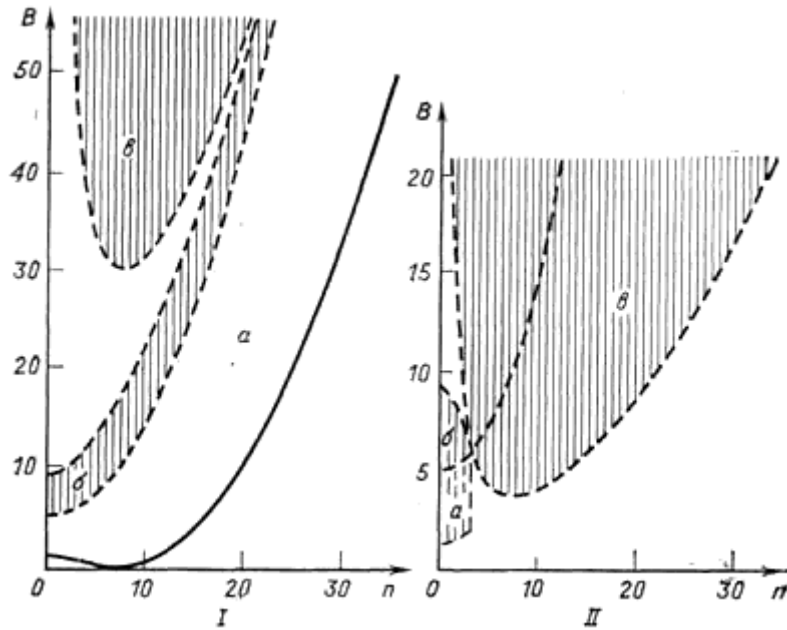


Рис. 11.5. Діаграми лінійної стійкості, які впливають зі співвідношень (11.15)–(11.20): *a*, *б* – області комплексних власних значень (*б* – область нестійкого фокуса); *в* – область нестійкості, що характеризується наявністю сідлової точки.

**Власні вектори оператора  $L$ .** Вважаючи, що умова (11.23) не виконується, можна зробити висновок, що у разі біфуркації стаціонарного розв'язку в околі  $B = B_c$  оператор  $L$  має одновимірний нуль-простір, утворений такими функціями (залежно від граничних умов):

$$\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \sin \frac{m\pi r}{l}; \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \cos \frac{m\pi r}{l}. \end{cases} \quad (11.24)$$

Підставляючи ці вирази в лінеаризовану систему (11.5), можна отримати відношення  $c_2 / c_1$ :

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{(D_1 m^2 \pi^2 / l^2) + 1 - B_m}{A^2}$$

або якщо  $m = m_c \approx \mu$ ,

$$\frac{c_2}{c_1} \cong -\frac{1}{A} \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} \left[ 1 + A \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} \right] < 0.$$

Дотепер  $c_1$  залишалось невизначеним. Цю величину можна зафіксувати вибравши певне нормування для  $\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix}$ . Однак це зовсім

не обов'язково; нелінійний аналіз в області після точки біфуркації дозволяє усунути цю невизначеність.

Якщо є біфуркація періодичного в часі стану, то наприклад, в околі точки  $B_1$  розв'язки  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  мають як просторову залежність, так і часову періодичність:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{ilm\omega_c t} \sin \frac{\pi r}{l}.$$

Якщо немає потоків для першої біфуркації маємо ( $m_c = 0$ )

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{ilm\omega_c t}.$$

Стаціонарний стан ( $A, B/A$ ) поводить себе подібно центру. Можна сподіватися, що ця ситуація за  $B > B_0$  призведе до граничного циклу.

Важливою особливістю просторової частини власних функцій, що відповідають випадку браку потоків на межах системи, є можливість врахування макроскопічних градієнтів у системі, як це зображено на рис. 11.6.

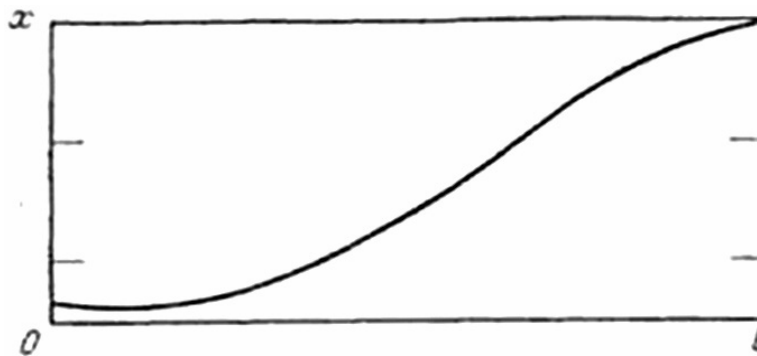


Рис. 11.6. Полярна власна функція лінеаризованого оператора за нульових потоків на межах системи.

Отже, маємо загальний механізм спонтанного виникнення полярності у просторі, який спочатку немає виділеного напрямку.

**Спряжений оператор.** Надалі будемо використовувати властивості оператора  $L^*$ , спряженого до оператора  $L$ , що діє у функціональному просторі, маємо

$$L^* = \begin{pmatrix} D_1 \frac{d^2}{dr^2} + B - 1 & -B \\ A^2 & D_2 \frac{d^2}{dr^2} - A^2 \end{pmatrix} \quad (11.25)$$

Цей оператор має ті самі власні значення, що й оператор  $L$ , а їх власні функції характеризуються однаковою просторовою залежністю.

Наприклад, у разі виконання умов Діріхле в околі точки біфуркації стаціонарного розв'язку маємо

$$\begin{pmatrix} U_m^* \\ V_m^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \sin \frac{m\pi r}{l}; \quad (m = 1, 2, \dots),$$

де відношення  $d_2/d_1$  виражається так:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{B_m - 1 - (D_1 \frac{m^2 \pi^2}{l^2})}{B_m} = \frac{A^2}{A^2 + D_2 \frac{m^2 \pi^2}{l^2}}.$$

Зазначимо, що у випадку тримолекулярної моделі оператор  $L$  не може бути *спряженим до самого себе ні за яких умов*. Інакше кажучи, не існує потенціалу, за допомогою якого можна було б отримати лінеаризовані рівняння, які б відповідали цій моделі, тобто сильно нерівноважні нелінійні системи, загалом, не можуть бути описані екстремумами функціонала стану.

Розглянемо тепер по черзі обидва типи біфуркацій, що виникають під час лінійного аналізу стійкості тримолекулярної моделі.

### 11.5. Загальна схема біфуркації стаціонарних дисипативних структур

Розглянемо четвертий результат розв'язку рівняння (11.15), який стосується власних значень. Метою завдання є становлення явного вигляду стаціонарних розв'язків, що зазнають біфуркації під час переходу через критичне значення  $B_c$ . Підставимо розклад (11.7) у рівняння (11.5), враховуючи нелінійні члени за  $x$  та  $y$ . Крім того, розкладемо оператор  $L$  у рівнянні (11.19) на два оператори:

$$L \equiv L_B = L_c + (L - L_c) = L_c + \begin{pmatrix} (B - B_c) & 0 \\ -(B - B_c) & 0 \end{pmatrix},$$

де  $L_c$  – оператор  $L$ , узятий у критичній точці першої біфуркації. Основним мотивом для цього розкладання є властивість, відповідно до якої оператор  $L_c$  є параболічним і допускає єдиний нульовий власний вектор

$\begin{pmatrix} U_m \\ V_m \end{pmatrix}$ , а в усіх інших випадках має власні значення із від'ємною дійсною частиною. Такі оператори називають *дисипативними*; їх широко використовують у теорії випадкових процесів і кінетичній теорії, де найбільш відомим прикладом є оператор Фоккера–Планка.

Потім, припускаючи, що  $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} = 0$ , отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$L_c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix}, \quad (11.26)$$

де

$$h(x, y) = (B - B_c)x + 2Axy + \frac{B}{A}x^2 + x^2y.$$

У цьому разі граничні умови такі самі, що й для рівняння (11.9). Зазначимо, що нелінійність за змінними  $x$  та  $y$  проявляється не тільки в кубічних, але й у квадратичних членах.

Розв'язок  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  можна знайти тоді, коли поблизу точки біфуркації поправки до термодинамічної гілки  $\begin{pmatrix} A \\ B/A \end{pmatrix}$  малі.

Це можна виразити розклавши в ряд як  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , так і  $\gamma = B - B_c$  за степенями малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \dots; \quad (11.27)$$

$$\gamma = B - B_c = \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \dots$$

Розклад (11.27) є більш гнучким, ніж  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  за степенями  $(B - B_c)$ , що здавалося б природнішим. Зокрема цей розклад дозволяє визначити безпосередньо дробово-степеневу залежність  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  від  $(B - B_c)$ .

Тепер проведемо такий розклад у рівнянні (11.26) та прирівняємо коефіцієнти за однакових степенів  $\varepsilon$ . У результаті отримаємо і співвідношення вигляду

$$L_c \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_k \\ a_k \end{pmatrix}; \quad (k = 0, 1 \dots) \quad (11.28)$$

з граничними умовами

$$x_k(0) = x_k(l) = \dots = 0,$$

або

$$\frac{dx_k(0)}{dr} = \frac{dx_k(l)}{dr} = \dots = 0.$$

Наведемо декілька перших коефіцієнтів  $a_k$ :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; \\ a_1 &= \gamma_1 x_0 + \frac{B_c}{A} x_0^2 + 2Ax_0 y_0; \\ a_2 &= \gamma_2 x_0 + \left( \gamma_1 + \frac{2B_c}{A} x_0 + 2Ay_0 \right) x_1 + 2Ax_0 y_1 + \gamma_1 \frac{x_0^2}{A} + x_0^2 y_0. \end{aligned} \quad (11.29)$$

У результаті маємо

$$L_c \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (11.30)$$

Інакше кажучи, вектор  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  пропорційний нульовій власній функції  $\begin{pmatrix} U_{mc} \\ V_{mc} \end{pmatrix}$  оператора  $L_c$ . Проте рівняння (11.28) за  $k > 1$  утворює *неоднорідну* систему лінійних рівнянь із постійними коефіцієнтами. Якби оператор  $L_c$  допускав обернення, такого роду системи вирішувалися б безпосередньо методом побудови функції Гріна оператора  $L_c$  і перетворенням цих рівнянь в ряд лінійних інтегральних рівнянь. Однак у розглянутому випадку  $L_c$  немає обернення, оскільки цей оператор допускає один нетривіальний нульовий власний вектор. Аналогічна ситуація реалізується здебільшого в лінійній алгебрі, коли є система неоднорідних алгебраїчних рівнянь першого порядку, причому матриця коефіцієнтів сингулярна, тобто має визначник, який дорівнює нулю. Умови існування розв'язку системи (11.28) встановлює теорема – альтернатива Фредгольма, що є узагальненням результатів, уперше отриманих під час застосування до задач лінійної алгебри.

**Теорема (альтернатива Фредгольма).** Вектор  $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$  є розв'язком рівняння (11.28), якщо права його частина  $\begin{pmatrix} -a_k \\ a_k \end{pmatrix}$  ортогональна нульовому власному вектору спряженого оператора  $L_c^*$ .



У розглянутій задачі ортогональність визначають за допомогою скалярного добутку, що є комбінацією скалярних добутків, відомих у векторному аналізі та у теорії функціональних просторів, таких як гільбертовий простір.

Власний вектор  $(x^*, y^*)$  характеризується такою самою просторовою залежністю, як і власний вектор оператора  $L_c$ , а також тим, що в загальному випадку амплітуди  $d_1, d_2$  величин  $(x^*, y^*)$  різні, тому рівняння (11.26) набуває вигляду (залежно від вибору граничних умов)

$$\int_0^l dr \begin{cases} \sin \frac{m_c \pi r}{l} \\ \cos \frac{m_c \pi r}{l} \end{cases} a_k (\{x_{k-m}(r)\}) = 0; \quad (11.31)$$

$(0 < m \leq l; k = 1, \dots).$

Ці умови разом з рівнянням (11.29) повністю визначають коефіцієнти  $\gamma_i$ . Далі, із другого співвідношення (11.27) можна знайти  $\varepsilon$  залежно від  $(B - B_c)$ . Підставляючи розраховане у такий спосіб значення  $\varepsilon$  до першого з рівнянь (11.27), і розв'язуючи неоднорідні рівняння (11.28), можна отримати явний вигляд розв'язку  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Виявляється, що властивості цього розв'язку значно залежать від парності числа  $m_c$ , тому обидва можливих розв'язки розглянемо окремо. Для наступного аналізу обмежимося розрахунком лише декількох перших членів рівняння (11.27), оскільки при цьому можна досягти апроксимації розв'язків отриманих числовими методами.

## 11.6. Біфуркація за фіксованих граничних умов

**Випадок парного  $m_c$ .** Якщо  $m_c$  парне і в умові можливі розв'язки (11.26), для  $a_1$  використовують вираз (11.29). Можна записати

$$\int_0^l dr \sin \frac{m_c \pi r}{l} \left( \gamma \sin \frac{m_c \pi r}{l} + \frac{B_c}{A} c_1 \sin^2 \frac{m_c \pi r}{l} + 2Ac_2 \sin^2 \frac{m_c \pi r}{l} \right) = 0,$$

або

$$\gamma_1 \int_0^l dr \sin^2 \frac{m_c \pi r}{l} = - \left( \frac{B_c}{A} c_1 + 2Ac_2 \right) \int_0^l dr \sin^3 \frac{m_c \pi r}{l}.$$

Коефіцієнт за  $\gamma_1$  у лівій частині останньої рівності завжди додатній. Проте, оскільки  $m_c$  парне, підінтегральна функція в правій частині непарна відносно середньої точки в інтервалі  $0 \leq \gamma \leq 1$ , тому інтеграл перетворюється в нуль. Звідси випливає, що

$$\gamma_1 = 0.$$

Далі рівняння

$$L_c \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (11.32)$$

розв'язують розкладом у ряд Фур'є

$$\begin{pmatrix} x_1(r) \\ y_1(r) \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} \sin \frac{m\pi r}{l}.$$

Підставивши цей розклад у рівняння (11.32), отримаємо

$$\begin{pmatrix} -D_1 \frac{m^2 \pi^2}{l^2} + B_c - 1 & A^2 \\ -B_c & -\left( A^2 + D_2 \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_m \\ q_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_m \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (11.33)$$

де

$$b_m = 2 \int_0^l dr a_1(r) \sin \frac{m\pi r}{l} = \begin{cases} 0 & (\text{якщо } m \text{ парне}) \\ -\frac{8\alpha m_c^2}{\pi(m^2 - 4m_c^2)m} & (\text{якщо } m \text{ непарне}); \end{cases}$$

$$\alpha = \left( \frac{B_c}{A} c_1 + 2Ac_2 \right) c_1.$$

Обертаючи співвідношення (11.33), можна визначити  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  і потім, використовуючи умову можливості розв'язання цього виразу для  $a_2(r)$ , можна знайти явний вигляд коефіцієнта  $\gamma_2$ .

$$\frac{\gamma_2}{c_1^2} = \phi \left( m_c, A, B_c, \frac{D_1}{l^2} \right).$$

Якщо  $m_c \approx \mu$ ,  $B_c \approx B_\mu$ , то функцію  $\phi$  можна виразити через  $A$  й  $D_1/D_2$ :

$$\phi_\mu \approx f \left( A, \frac{D_1}{D_2} \right).$$

Вигляд цієї залежності тут не відіграє особливої ролі. Важливо зрозуміти, що природа розв'язку, яка зазнає біфуркації, визначається знаком  $\phi$ . Якщо  $\phi > 0$ , то з рівняння (11.27) випливає, що

$$\varepsilon \approx \pm \left( \frac{B - B_c}{\gamma_2} \right)^{1/2}, \text{ якщо } B > B_c,$$

тобто розв'язок визначений у надкритичній області. Якщо  $\phi < 0$  або  $\gamma_2 < 0$ , маємо

$$\varepsilon \approx \pm \left( \frac{B_c - B}{-\gamma_2} \right)^{1/2}, \text{ якщо } B > B_c,$$

і розв'язок визначений у докритичній області. Якщо  $\gamma_2 = 0$ , то обчислення варто продовжити. Однак цей особливий випадок не цікавий з фізичної точки зору.

Щоб знайти в першому наближенні розв'язок, що зазнає біфуркації поблизу  $B = B_c$ , після підстановки знайденого значення в перший із виразів (11.27) слід залишити перші два члени. Після цього довільну амплітуду  $c_1$ , що фігурує в лінійному аналізі, можна скоротити, у результаті чого отримуємо

$$\begin{aligned} x(r) = & \pm \left( \frac{B - B_c}{\phi} \right)^{1/2} \sin \frac{m_c \pi r}{l} + \frac{B - B_c}{\phi} \frac{8m_c^2 l^2}{D_1 A \pi^3} \times \\ & \times \left[ B_c - 2 \left( 1 + D_1 \frac{m_c^2 \pi^2}{l^2} \right) \right] \sum_{m \text{ не парне}} \frac{m}{(m^2 - m_c^2)^2} \frac{\sin \frac{m \pi r}{l}}{m^2 - 4m_c^2} \end{aligned} \quad (11.34)$$

Аналогічний вираз буде для  $y(r)$ . Крім того, можемо довести таку теорему.

**Теорема.** Нові розв'язки, що належать околу критичної точки  $B_c$ , і які виникають у результаті біфуркації, є асимптотично стійкими, якщо вони належать до надкритичної області  $B > B_c$  ( $\gamma_2 > 0$ ). Однак якщо  $\gamma_2 < 0$ , докритичні гілки нестійкі.

Ці результати можна наочно зобразити за допомогою діаграм біфуркації (рис. 11.7). Суцільні і пунктирні лінії показують відповідно стійкі та нестійкі розв'язки. Діаграму зображену на рис. 11.7 (б) є сенс розглянути трохи пізніше. Існує мінімальне значення  $B$ , нижче якого повні нелінійні рівняння кінетики тримолекулярної моделі мають єдиний розв'язок. Отже, підкритичні області  $b$  та  $c$  мають «зупинитися» у деякій точці  $B_{\min}$ , при цьому біфуркації або  $X \rightarrow \infty$

за  $B_{\min}$ , або ці гілки вигинаються в напрямку зростання значень  $B$  аж до  $B \rightarrow \infty$ . Отже, гілки мають виглядати так, як зображено на рис. 11.7 (б). Крім цього, нові гілки  $e$  та  $f$ , очевидно, стійкі. Якщо  $B > B_c$  – система зазнає раптового переходу на одну із цих двох гілок, тоді як за  $B < B_c$  є один стійкий розв’язок, що належить термодинамічній гілці, та дві стійкі дисипативні структури. Конкретно у якому зі станів система виявиться – залежить від початкових умов, а також від способу зміни параметра  $B$ . Це схоже на явище гістерезису.

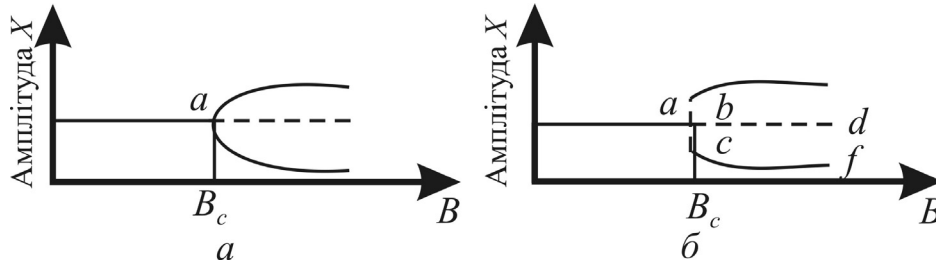


Рис. 11.7. Діаграма біфуркації в одновимірній тримолекулярній моделі за парного критичного хвильового числа:  $a$  – надкритична біфуркація;  $b$  – підкритична біфуркація

**Випадок непарного  $m_c$ .** У цьому випадку умова можливості розв’язання для  $a_1$  дає (див. розрахунки, що передують рівнянню 11.32)

$$\frac{\gamma_1}{c_1} \int_0^l dr \sin^2 \frac{m_c \pi r}{l} = - \left( \frac{B_c}{A} + 2A \frac{c_2}{c_1} \right) \int_0^l dr \sin^3 \frac{m_c \pi r}{l}. \quad (11.35 \text{ а})$$

За непарного  $m_c$  обидва просторових інтеграла обчислюють в так:

$$\int_0^l dr \sin^2 \frac{m_c \pi r}{l} = \frac{l}{2};$$

$$\int_0^l dr \sin^3 \frac{m_c \pi r}{l} = \frac{4l}{3m_c \pi}.$$

Окрім того, за допомогою рівняння (11.24) можна виразити відношення  $c_2/c_1$  через величину  $B_c$  та інші параметри. Підставляючи  $c_2/c_1$  у (11.35 а) за  $B = B_c$ , отримаємо

$$\frac{\gamma_1}{c_1} = - \frac{8}{3m_c \pi} \frac{\left[ 2 \left( D_1 m_c^2 \pi^2 / l^2 + 1 \right) - B_c \right]}{A} = g \left( m_c, A, B_c, \frac{D_1}{l^2} \right). \quad (11.35 \text{ б})$$

Якщо  $m_c \approx \mu$ ,  $B_c \approx B_\mu$ , маємо

$$\frac{\gamma_1}{c_1} \approx \frac{8 (D_1 D_2)^{1/4}}{3 A^{3/2} l} \left( A^2 \frac{D_1}{D_2} - 1 \right).$$

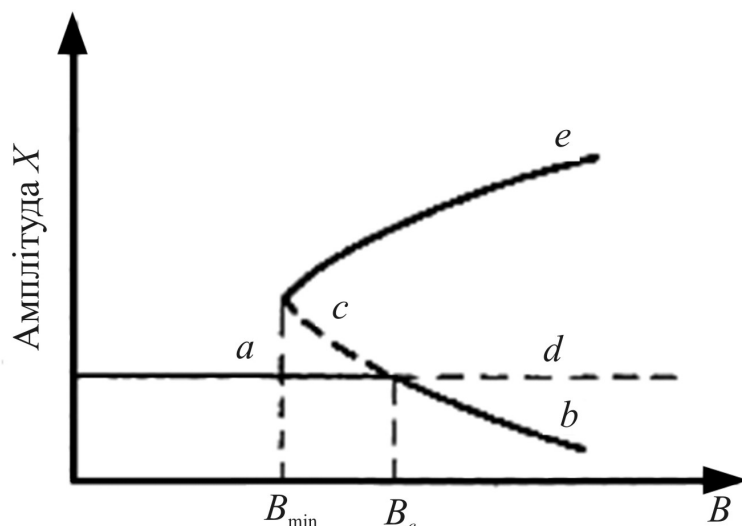


Рис. 11.8. Діаграма біфуркації в одновимірній тримолекулярній моделі за непарного критичного хвильового числа. Суцільні й пунктирні лінії показують стійкі та нестійкі розв'язки відповідно.  $a$ ,  $d$  – термодинамічна гілка;  $b$  – надкритична дисипативна структура;  $c$  – до критична дисипативна структура;  $d$  – дисипативна структура скінченої амплітуди, що виникає у разі накладання на стан, який розміщений на термодинамічній гілці  $a$  скінчених збурень за  $B_{\min} < B < B_c$ ;  $e$  – стійка дисипативна структура

Як і у випадку парного  $m_c$ , функцію  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  можна знайти з рівняння (11.28), використовуючи розклад у ряд Фур'є. З урахуванням двох співвідношень рівняння (11.35  $a$ ,  $b$ ) остаточно отримуємо

$$x(r) = \frac{B - B_c}{g} \sin \frac{m_c \pi r}{l} + O\left[(B - B_c)^2\right]. \quad (11.36)$$

Як і в попередньому випадку, для  $y(r)$  є аналогічний вираз.

Отже, в околі величини  $B_c$  є розв'язок, що зазнає біфуркації, визначений для точок  $B$ , що лежать по обидва боки від точки  $B_c$ . Відповідно до наведеної вище теореми, новий розв'язок стійкий на надкритичній гілці ( $B > B_c$ ) і нестійкий на докритичній гілці ( $B < B_c$ ). Використовуючи такі припущення, як і ті, що привели до рис. 11.7 (б), можна отримати діаграму біфуркації, показану на рис. 11.8. Ця діаграма включає можливості гістерезису й різкого переходу на гілку  $e$  для значень точки  $B$ , близьких до точки  $B_c$ .

## 11.7. Якісні властивості дисипативних структур в околі першої біфуркації

**Втрата симетрії та критична поведінка.** Найбільш важливою властивістю дисипативних структур, що виникають за описаним у попередніх розділах механізмом біфуркації, є порушення симетрії. Під час переходу через певне критичне значення параметра  $\lambda$  (або набору параметрів) найбільш симетричний розв'язок відповідних кінетичних рівнянь втрачає стійкість і система переходить у режим зі зниженою просторовою симетрією. У випадку нульових потоків на межах, а також у разі виконання умов Діріхле за парного  $m_c$ , порушення симетрії супроводжується подвійним виродженням розв'язків, пов'язаних із наявністю критичного показника степеня  $1/2$  у рівняннях (11.34) і (11.36). Інакше кажучи, після переходу через критичне значення  $\lambda$  система має однакові апіорні ймовірності влучення на один із двох розв'язків, причому той чи інший розв'язок реалізується залежно від початкових умов. Це важливе питання розглянемо під час стохастичного аналізу дисипативних структур. Зазначимо, що якщо немає потоків, перше порушення симетрії призводить до ряду Фур'є з однозначною фундаментальною модою  $\cos\left(\frac{m_c \pi r}{l}\right)$ . Навпаки, якщо на межах

системи задається значення функції, то послідовні наближення в термінах параметра  $(B - B_c)$  призводять до порушення симетрії в наближеннях більш низького порядку й просторово-асиметричних розв'язків. Це ілюструється порівнянням  $x_0(r)$  і  $\varepsilon x_1(r)$ , що наведено на рис. 11.9. У деякому сенсі дисипативні структури, що виникають за нульових потоків, можна було б порівняти з кристалом, і тоді структури, що виникають за умов Діріхле, варто було б розглядати як «неідеальні кристали».

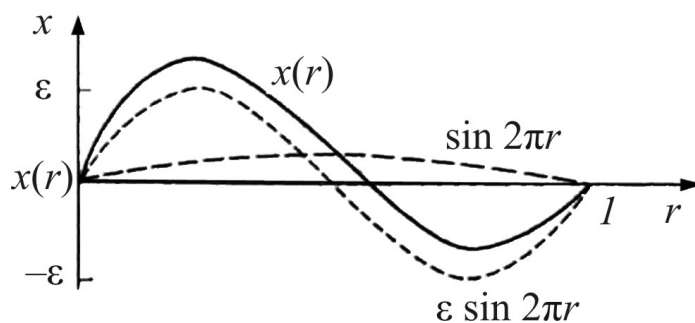


Рис. 11.9. Просторова асиметрія, що індукується субгармонічними членами

У разі виконання умов Діріхле за непарного  $m_c$  реалізується інша ситуація. Тут уже не можна розглядати самовільну втрату симетрії в підкритичній області, оскільки для переходу від термодинамічної галузі до гілки  $e$  на рис. 11.8 потрібні були б збурення, які перевищують деяке граничне значення, пов'язане з точним розміщенням нестійкої гілки  $c$ , однак якщо  $B > B_c$  найбільш імовірно, що доволіно малі (але все ще макроскопічні) додатні збурення мають призводити до гілки  $e$ , а від'ємні – до гілки  $b$ .

Можна провести аналогію між утворенням дисипативних структур і фазовими переходами. Так, якщо переходи гладкі, як на рис. 11.7 (а), або як гілка  $b$  на рис. 11.7 (б), можна говорити про перехід другого роду в тому розумінні, що амплітуда розв'язку, що зазнає біфуркації, яка у цьому випадку відіграє роль параметра впорядкованості, прямує до нуля за  $B \rightarrow B_c$ . З другого боку, у випадку, який зображено на рис. 11.7 (б) або під час переходу на гілку  $e$  (рис. 11.8), можна говорити про перехід першого роду. Зазначимо, що ця суто умовна класифікація навряд чи допомагає з'ясувати природу критичних флуктуацій в області переходу.

Так само, як у розглянутій вище суто формальній аналогії, структура рівнянь (11.34) і (11.36) нагадує деякі аспекти теорії Ландау, яка присвячена фазовим переходам. Розглянемо, наприклад, вираз (11.36). З точністю до величини порядку  $(B - B_c)^{1/2}$  функції  $x(r)$  і  $y(r)$  пропорційні одна одній. Таким чином перехід через критичний режим можна описати за допомогою єдиного параметра впорядкованості  $\omega$ ,

$$\|\omega\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \frac{A^2}{D_1 \frac{m_c^2 \pi^2}{l} + 1 - B_c}, \quad (11.37 \text{ а})$$

де подвійні вертикальні риски  $\|\ \|$  використовують для позначення норми в інтервалі  $0 \leq r \leq 1$ , яка відповідає розглянутому функціональному простору.

Тоді маємо

$$\|\omega\|^2 \propto \frac{B - B_c}{\phi},$$

тобто за винятком несуттєвого фазового множника

$$\omega \propto \pm \left( \frac{B - B_c}{\phi} \right)^{1/2}. \quad (11.37 \text{ б})$$

Крім того, динаміку  $\omega$  в околі критичної точки визначають одним диференціальним рівнянням, яке отримують за допомогою комбінування диференціальних рівнянь для  $x$  та  $y$  з урахуванням співвідношення (11.37 а). Це стало основою для розгляду хімічних нестійкостей, а також для адіабатичного наближення у вивченні теоретичних проблем, пов'язаних із квантовою оптикою. Далі, диференціальне рівняння для дійсної змінної завжди можна отримати за допомогою певного потенціалу. Щоб показати це на простому прикладі, розглянемо звичайне диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{d\omega}{dt} = A(\lambda)\omega + N(\lambda; \omega).$$

Введемо інтеграл

$$F(\omega) = -\int_0^{\omega} d\xi [A(\lambda)\xi + N(\lambda; \xi)]$$

та запишемо це рівняння у вигляді

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial\omega}.$$

Очевидно, що стаціонарні розв'язки цього рівняння визначають екстремумами  $F$ ; точки мінімуму  $F$  визначають стійкі розв'язки, які виникають після точки біфуркації, що задається рівністю (11.37 б). Ця властивість аналогічна відомій у статистичній механіці рівноважних систем ситуації, коли критична поведінка параметра впорядкованості визначається екстремумами вільної енергії, що у свою чергу виражається у вигляді ряду за парними степенями параметра впорядкованості. У цьому сенсі потенціал  $F$ , що визначає параметр  $\phi$  у рівняннях (11.37 а, б), є нерівноважним аналогом вільної енергії та можна розглядати як узагальнений функціонал Ландау–Гінзбурга.

Зазначимо, що цю процедуру не можна безпосередньо поширювати на більш високі порядки за  $(B - B_c)$ , оскільки функції  $x(r)$  та  $y(r)$  уже не пропорційні одна одній і поведінка системи поблизу критичної точки не піддається більш простому описанню за допомогою єдиного параметра впорядкованості.

**Амплітуди та середні значення.** З вигляду виразів (11.35 а, б) і (11.36) випливає, що, зазвичай, повні величини  $X$  та  $Y$  у системі в процесі переходу до дисипативної структури *не зберігаються*. Зокрема, обчислюючи інтеграли

$$\bar{x} = \int_0^l dx(r); \quad \bar{y} = \int_0^l dy(r),$$



можна знайти, що:

1) у разі виконання умов Діріхле та парного  $m_c$ , величини  $x$  та  $y$  прямують до нуля як  $O[(B - B_c)^{1/2}]$ , але в наступному наближенні вони стають ненульовими;

2) за непарного  $m_c$  величини  $X$  та  $Y$  не зберігаються;

3) якщо немає потоків на границях, величина  $x$  перетворюється в нуль (тобто  $X$  зберігається) незалежно від степеня наближення. Справді, складаючи обидві рівності (11.31), маємо

$$x = D_1 \frac{d^2 x}{dr^2} + D_2 \frac{d^2 y}{dr^2};$$

$$\bar{x} = D_1 \left( \frac{dy}{dx} \right)_0^l + D_2 \left( \frac{dy}{dr} \right)_0^l.$$

Оскільки функції  $x$  та  $y$  є періодичними в інтервалі  $(0, l)$ , права частина другої рівності перетворюється в нуль, отже  $x = 0$ . Навпаки, величина  $y$  у загальному випадку не дорівнює нулю. Наприклад, з рівняння (11.37 б) маємо

$$\bar{y} = \frac{1}{2} \frac{B - B_c}{\phi} \frac{-2(D_1 m_c^2 \pi^2 / l^2 + 1) + B_c}{A^3}.$$

Величини  $x$  та  $y$  не зберігаються, тому це може впливати на функціональні властивості реакційної послідовності. Для того, щоб проілюструвати цю обставину, розглянемо тримолекулярну модель за відсутності потоків на межах та в такому діапазоні значень параметрів, за якого  $y$  додатне. Відповідно до рівності (11.4) швидкість автокаталітичної стадії реакції збільшується. Інакше кажучи, за умов показаних на рис. 11.8, система прагне виробляти речовину  $X$  на цій стадії переважно у правій частині реакційного об'єму. Здатність до прискореного виробництва деяких речовин в обмеженій області простору надає системі чудових регуляторних властивостей. Крім того, внаслідок полярності структури показаної на рис. 11.10, ця регуляція проявляється у векторному вигляді, тобто каталітична стадія реакції проходить не ізотропно, а в певному напрямку. Явище *векторного каталізу* добре відоме у клітинному метаболізмі. Дивно спостерігати це явище у примітивній формі для найпростішої з моделей, де можуть виникати дисипативні структури.

**Залежність розв'язку від довжини системи.** Дотепер ми аналізували перехід до дисипативної структури, використовуючи як параметр біфуркації концентрацію початкової речовини  $B$ . У задачах із поступовою зміною форми або розміру системи (наприклад, під час вивчення клітинного росту або різних інших процесів розвитку)

з'ясуємо роль довжини  $l$  у процесі формування дисипативних структур. Із цією метою перейдемо до нової просторової змінної

$$\rho = \frac{r}{l}.$$

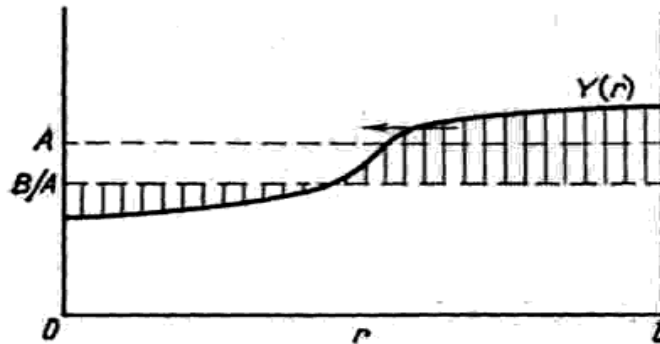


Рис. 11.10. Векторний каталіз, що індукується полярною дисипативною структурою, яка виникає, коли немає потоків на межах системи

Тоді кінетичні рівняння мають вигляд

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A + X^2 Y - (B+1) X \frac{D_1}{l^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \rho^2};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2 Y + \frac{D_2}{l^2} \frac{\partial^2 Y}{\partial \rho^2}; \quad (0 \leq \rho \leq 1).$$

Граничні умови залишаються колишніми, хоча тепер вони належать до інтервалу  $(0, l)$ . Отже, зміну  $l$  можна розглядати як зміну коефіцієнта дифузії в новій постановці завдання. Оскільки коефіцієнти  $D_1$  і  $D_2$  у деякому сенсі є мірою дифузійної відповідності сусідніх просторових областей, у разі збільшення  $l$  така відповідність послаблюється. Якщо величина  $B$  фіксована, а змінюється величина  $l$ , яка відіграє роль параметра біфуркації, то залишаються справедливими всі отримані вище результати, зокрема рівняння (11.19). Показану на рис. 11.4 діаграму стійкості можна подати інакше, як це зроблено на рис. 11.11. У цьому разі величиною  $m$  може служити одне з цілих чисел, сумісних із граничними умовами (наприклад  $m_c$ ). Суть такого зображення стійкості полягає в тому, що за цього  $B$  є деяка область нестійкості, що характеризується різними значеннями  $m$  та  $l$ , тому перехід до дисипативної структури явно залежить від довжини, де формуються дисипативні структури. З рівняння (11.19) випливає, що умова нейтральної стійкості ніколи не виконується, якщо  $l$  не перевищує деякого критичного значення, тобто перехід до дисипативної структури може реалізуватися у системі лише тоді, коли її розмір перевищує критичне зна-

чення. У разі подальшого збільшення розміру системи можливі нові переходи, що відповідають різним значенням  $m$ . Ця умова підтверджується безпосередньо під час використання методів числового моделювання.

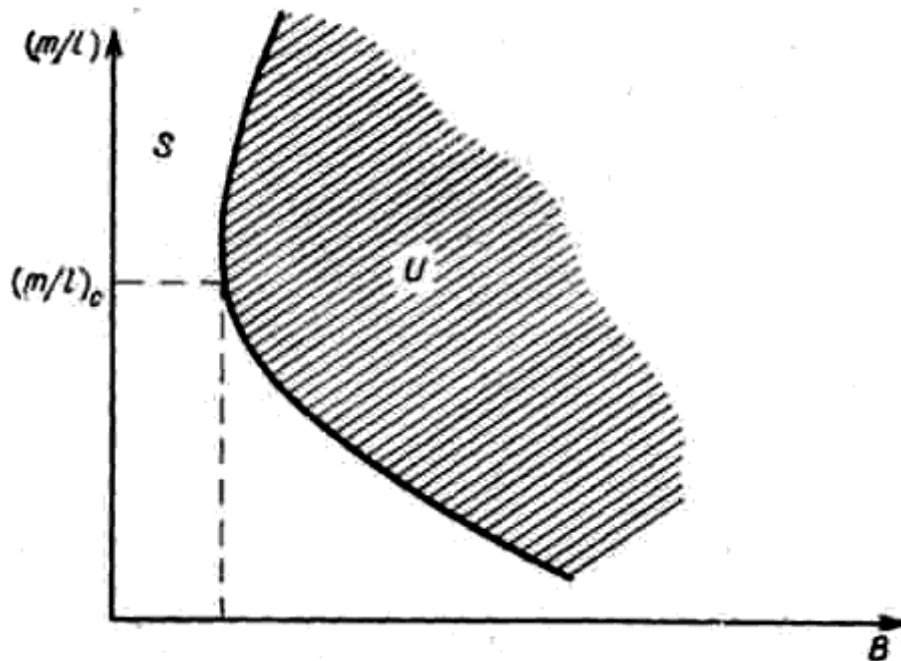


Рис. 11.11. Діаграма лінійної стійкості, яка зображає залежність результату від довжини  $l$

### 11.8. Послідовні нестійкості та вторинні біфуркації

Якщо  $m$  не дорівнює критичному числу  $m_c$ , то в результаті біфуркації однорідного розв'язку виникає нова гілка кожного разу, як тільки  $B$  набуває значення  $B = B_m$ , що задається рівністю (11.19), принаймні тоді, коли нуль є простим власним значенням оператора  $L_{Bm}$ . Ці нові розв'язки подібні описаним вище розв'язкам у результаті біфуркації за  $B = B_c$ , з тією різницею, що тепер як основна мода замість  $\sin(m_c \pi r/l)$  або  $\cos(m_c \pi r/l)$  фігурує  $\sin(m \pi r/l)$  або  $\cos(m \pi r/l)$ . За парного  $m$  нові гілки вироджені й мають критичний показник степеня  $1/2$ , тоді як у разі виконання умов Діріхле й непарного  $m$  нова гілка аналогічна описаним у другій частині розділу 11.6.

Так само, як і в околі  $B_m > B_{m_c}$ , оператор  $L_{Bm}$  має вже щонайменше одне додатне значення, причому нові гілки нестійкі поблизу  $B_m$ . На жаль невідомо в яких ділянках, якщо вони існують, то нові гілки стають стійкими.

Якщо  $B$  значно перевищує  $B_c$ , можливе виникнення низки дисипативних структур, деякі з них є стійкими стосовно малих збурень.

Таку ситуацію можна зобразити за допомогою діаграми, показаної на рис. 11.12. Біфуркація гілки 1 відбувається за  $B = B_c$ , але гілки 2 і 3 зазнають біфуркації за  $B > B_c$ . Із цього рисунка видно, що за  $B > B_d$  може бути сім різних розв'язків.

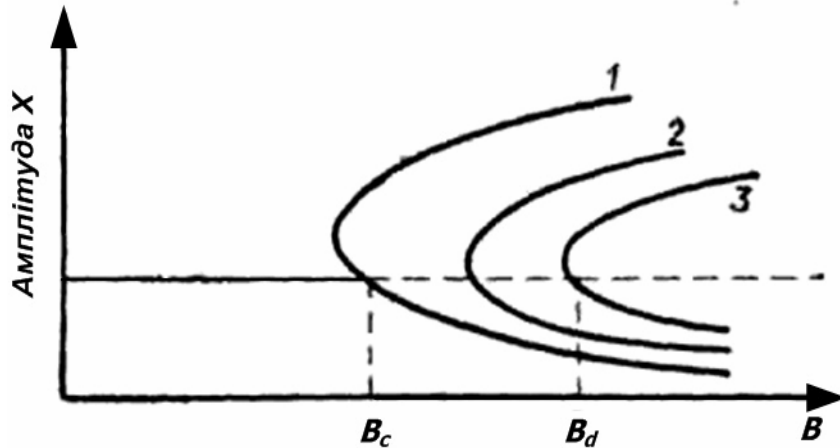


Рис. 11.12. Виникнення послідовних первинних біфуркацій на термодинамічній гілці

Якщо після першої біфуркації система перебуває на гілці 1, то немає причини, внаслідок якої система могла б перейти на гілку 2 або 3, що відходять від термодинамічної гілки. Інакше кажучи, перебуваючи на гілці 1, система має додаткові можливості до ускладнення, якщо гілка 1 втрачає стійкість за рахунок нової біфуркації. Такі каскадні явища зазвичай називають *вторинними біфуркаціями*. Цей результат надзвичайно важливий, особливо у зв'язку з біологічними проблемами. Тільки завдяки біфуркаціям другого й більш високого порядку система, що еволюціонує, може спонтанно призвести до прогресуючих складних структур, що виникають у вигляді послідовних нестійкостей.

Опишемо метод для фіксованих граничних умов Махара–Матковського. Відповідно до лінійного аналізу стійкості нульове власне значення оператора  $L_c$  є дворазово виродженим за умови, що (див. рівняння (11.23))

$$\delta = -\frac{A^2 l^4}{\pi^4 D_1 D_2} + m_c^2 (m_c + 1)^2 = 0.$$

Отже, як тільки  $\delta$  відхиляється від нуля, це значення служить мірою відстані між двома найменшими власними значеннями, що відповідають, скажімо,  $m_c$  і  $m_c + 1$ . У разі перетворення  $\delta$  у нуль обоє власних значень зливаються й утворюють дворазово вироджене власне значення. За малого  $\delta \neq 0$  перша вихідна гілка, що зазнає

біфуркації за  $B_{m_c}$ , відповідає моді  $\sin(\pi m_c r/l)$ , тоді як друга вихідна гілка, що зазнає біфуркації за  $B_{m_c+1}$ , відповідає моді  $\sin[(m_c + 1)\pi r/l]$ .

Тепер легко знайти систематичний розклад  $B_{m_c}$ ,  $B_{m_c+1}$  за степенями  $\delta$  поблизу значення  $B_c$ , що відповідає дворазово виродженому власному значенню. Далі, за теорією біфуркацій, як і в попередніх розділах визначається кожна з вихідних гілок. Щоб продемонструвати основні моменти, розглянемо випадок непарного  $m_c$ , маємо

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \varepsilon^i;$$

$$B_p = B_{m_c}(\delta) + \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i \varepsilon^i.$$

де індекс  $p$  позначає вихідну гілку. Використовуючи умови можливості розв'язку для  $m_c$ , отримуємо

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{1 + A_{m_c}^2(\delta)}} \sin \frac{m_c \pi r}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ A_{m_c}(\delta) \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

де

$$B_p^{m_c} = B_{m_c}(\delta) - \varepsilon \frac{8}{3\pi m_c} \left( \frac{B_{m_c}(\delta)}{A} + 2AA_{m_c}(\delta) \right) + O(\varepsilon^2),$$

та для  $m_c+1$  маємо

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{1 + A_{m_c+1}^2(\delta)}} \sin \frac{(m_c+1)\pi r}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ A_{m_c+1}(\delta) \end{pmatrix} + O(\varepsilon)^2;$$

$$B_p^{m_c+1} = B_{m_c+1}(\delta) - \varepsilon^2 2 \left\{ \frac{3A_{m_c+1}(\delta)}{4A_{m_c+1}^2(\delta)} + \frac{2B_{m_c+1}(\delta)S_1}{A} + 2A(S_2 + A_{m_c+1}(\delta)S_1) \right\} + O(\varepsilon^3).$$

де  $\alpha$  й  $A_{m(\delta)}$  – амплітуда й відношення  $y/x$ , що відповідають власним функціям нуль-простору

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \alpha \sin \frac{m\pi r}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ A_m(\delta) \end{pmatrix}.$$

Відповідно до лінеаризованих рівнянь  $A_m$  залежить від  $\delta$ , і тому може бути розкладене за степенями цього параметра поблизу значення  $A_m$ . Отже,  $S_1$  і  $S_2$  – однозначно визначені коефіцієнти, що містять внесок від нескінченного ряду, що з'являється під час обчислення коефіцієнта  $\gamma_2$ . Наступний крок – пошук таких точок на вихідній гілці.

У точках  $B_p^{m_c}$  або  $B_p^{m_c+1}$  вторинні гілки можуть зазнавати біфуркації. Зазначимо, що вихідні гілки є функціями параметрів  $\varepsilon$  та  $\delta$ . Із цієї причини розглядатимемо  $\varepsilon$  так само як і  $B$  у вихідній біфуркації, і знаходитимемо відповідні нелінійні власні значення  $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\delta)$ . Ці значення розкладемо у ряд теорії збурень за  $\delta$ . Припустимо, що

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \\ \varepsilon &= \delta(b_0 + \delta b_1 + \dots); \end{aligned} \quad (11.38)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \delta^{1/2} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + \dots,$$

де  $\delta^{1/2}$  використано як параметр розкладання в ряд. Підставляючи ці вирази в кінетичні рівняння, лінеаризовані поблизу  $\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$ , і при-

рівнюючи коефіцієнти за однакових степенів  $\delta$ , можна отримати низку співвідношень, перше з яких є лінеаризованою задачею за дворазово виродженого власного значення.

Очевидно, розв'язки цієї задачі мають вигляд

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \beta_1 \sin \frac{m_c \pi r}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ A_{m_c+1} \end{pmatrix} + \beta_2 \sin \frac{(m_c + 1) \pi r}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ A_{m_c+1} \end{pmatrix}. \quad (11.39)$$

Коефіцієнти  $\beta_1$  і  $\beta_2$  можна знайти з умов можливості розв'язку рівнянь вищих порядків у певній послідовності. У цьому разі внаслідок дворазового виродження маємо дві умови. Як тільки в рівнянні (11.39) з'являється член з  $\beta_2 \neq 0$ , можна зробити висновок, що відбу-

валася вторинна біфуркація. Справді, у цій точці розв'язок  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  «пе-

рескакує» від члена, що містить  $\sin(m_c \pi r/l)$ , до виразу, в якому додатково є більш висока мода  $\sin[(m_c + 1)\pi r/l]$ . Цю ситуацію зображено на діаграмі біфуркації (рис. 11.13). Отже, коефіцієнт  $b_0$  у рівнянні (11.38) визначається з умов можливості розв'язку, а також з умов

нормування  $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ . Знаючи значення  $b_0$ , можна виразити  $\delta$  через  $\varepsilon$ ,

тобто через  $(B - B_c)$ , і тим самим оцінити відстань від точки  $B_c$ , у якій повинна була відбутись вторинна біфуркація.

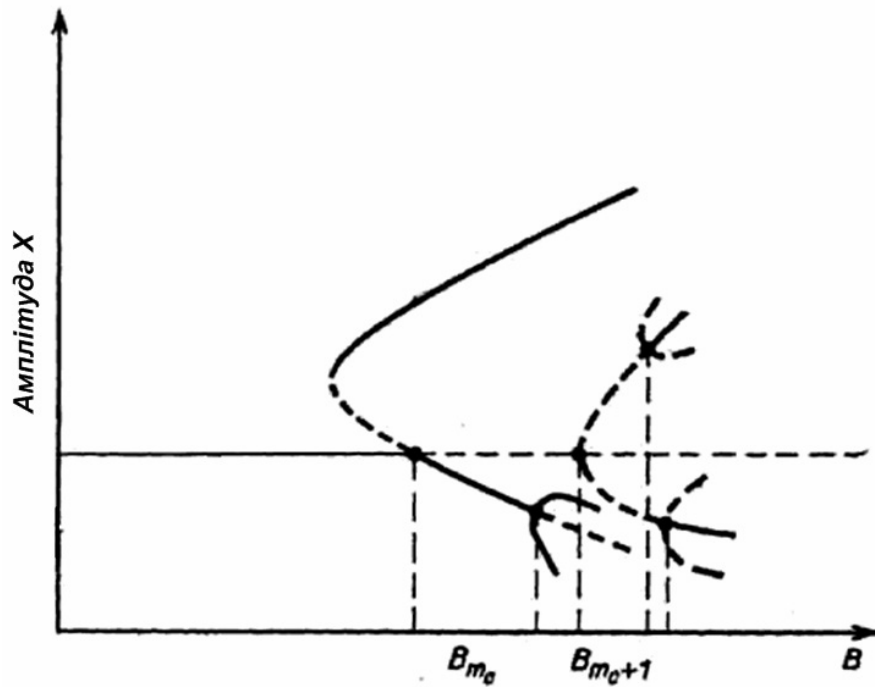


Рис. 11.13. Діаграма біфуркації в тримолекулярній моделі. Діаграма зображає можливість вторинних біфуркацій стаціонарних розв'язків, які відповідають раніше утвореним дисипативним структурам. Пунктиром (стійкість) та неперервними (нестійкість) лініями показано можливі варіанти стійкості різних гілок

Детальна побудова вторинних гілок у нелінійній ділянці після вторинної біфуркації не викликає ускладнень і проводиться так само як і у разі вихідних гілок, тому це питання розглядати не будемо.

Зазначимо, що в надкритичній ділянці після першої біфуркації система подає множинність якісно різноманітних розв'язків. Ці дискретні розв'язки виникають у разі переходу параметра  $B$  через деякі критичні значення. Ситуацію, яка виникає, можна назвати *макроскопічним квантуванням* станів. Хоча інформація про стійкість цих станів не повна, сподіваємося, що принаймні деякі з них виявляться стійкими й будуть притягати траєкторії з конкретної ділянки початкових умов. Таку властивість можна було б розглядати як примітивну пам'ять, зв'язану зі здатністю системи накопичувати інформацію у вигляді початкових умов, яку відповідна дисипативна структура стягує. Це можна підтвердити результатами числового моделювання, розглянутого нижче.

## 11.9. Порівняння з результатами числового моделювання

Лефевєр і Гершкович–Кауфман широко застосовували методи числового моделювання для вивчення тримолекулярної моделі. Отримані результати узгоджуються з теоретичними передбаченнями, побудованими на аналітичних розрахунках. Окрім того, вони дозволяють з'ясувати деякі цікаві тенденції еволюції системи в надкритичній ділянці  $B \gg B_c$ .

**Загальні властивості.** Розглянемо спочатку виконання умов Діріхле. Числові значення  $A = 2$ ,  $l = 1$ ,  $D_1 = 1,6 \cdot 10^{-3}$  і  $D_2 = 6 \cdot 10^{-3}$  призводять до додатних значень  $\phi$  (див. рівняння (11.33)), що дозволяє обчислити функції  $x(r)$  і  $y(r)$  за  $B > B_c$ . Отримані таким чином розв'язки показано на рис. 11.14–11.16, де вони порівнюються з результатами числового інтегрування на ЕОМ. Для значень  $B$  поблизу  $B_c$  (рис. 11.14) обидва розв'язки добре узгоджуються. Тут чітко видно спотворення критичної моди за рахунок наявності нескінченного ряду. Зі зростанням  $r$  це спотворення призводить до зростання послідовних максимумів, за  $B > B_c$  (рис. 11.14) узгодження між двома підходами погіршується.

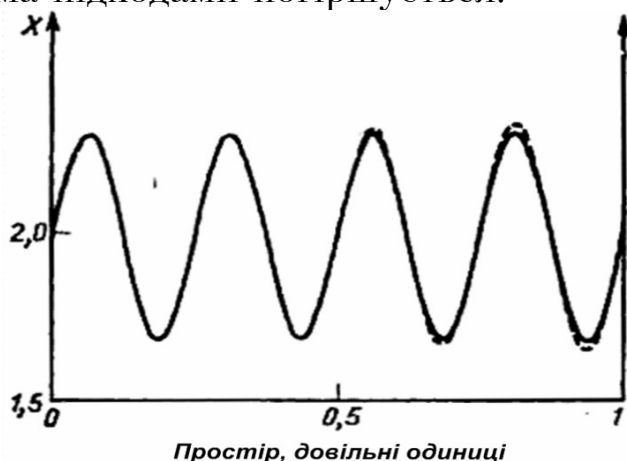


Рис. 11.14. Стаціонарна дисипативна структура у разі заданих концентрацій на межах системи та за  $B \approx B_c$  (пунктиром показано аналітичну криву, яка відповідає рівнянню (11.38), неперервна крива отримана внаслідок числового інтегрування. Значення параметрів:  $A = 2$ ,  $l = 1$ ,  $D_1 = 1,6 \cdot 10^{-3}$ ,  $D_2 = 6,0 \cdot 10^{-3}$ ,  $B = 4,17$ ;  $m_c = 8$  та  $B_c = 4,133$ . Граничні значення  $X$  та  $Y$ :  $X = A = 2$ ,  $Y = B/A = 2,065$ )

**Множинність розв'язків.** Результати числового моделювання показали, що одночасно може виникати більше однієї пари вироджених структур, що відповідають різній кількості екстремумів. Це відбувається у разі виконання таких умов: параметр  $B$  набуває більшого значення; за  $t = 0$  система зазнає впливу одночасних, але по-різному локалізованих збурень, причому їх локалізація залежить від певних правил.



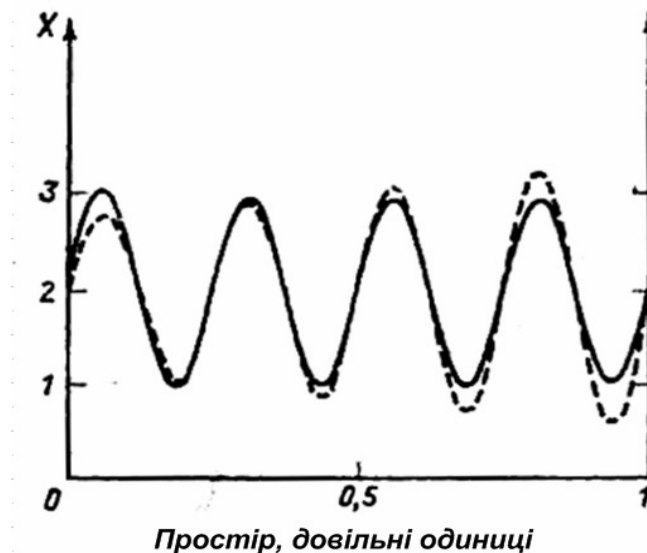


Рис. 11.15. Стационарна дисипативна структура у разі заданих концентрацій на межах системи та за  $B > B_c$  (пунктиром показано аналітичну криву, яка відповідає рівнянню (11.38). Неперервна крива отримана внаслідок числового інтегрування,  $B = 4,6$ ; інші параметри такі самі, як і на рис. 11.14. Граничні значення  $X$  та  $Y$ :  $X = A = 2$ ,  $Y = B/A = 2,3$ )

Цю ситуацію показано на рис. 11.16 у разі браку потоків на границях системи. Для тих самих значень параметрів, що й на рис. 11.14, спостерігаються три різні стійкі дисипативні структури з 8, 9 і 10 екстремумами відповідно, причому реалізація тієї або іншої структури залежить від початкових умов. Кожній із цих структур відповідає симетрична структура.

Побудований на теорії збурень аналіз стійкості розв'язків, які послідовно розгалужуються, не дозволяє заздалегідь гарантувати правильність відповіді, однак різноманітні комп'ютерні розрахунки показують, що за  $B \gg B_c$  існує скінченна множина стійких розв'язків, що відповідають найбільш швидко зростаючим нестійким модам. Цей висновок узгоджується з лінійним аналізом стійкості поблизу термодинамічної гілки. Таку ситуацію показано на рис. 11.17, де значення  $m = 7, 8$  і  $9$  фігурують як основні моди за числових значень параметрів із попереднього прикладу. Існування нестійких мод з коефіцієнтами підсилення, за порядком величини близькими до критичного, зумовлено тим, що декілька перших послідовних нестійкостей виникають за досить близьких значень  $B_m$ , у тоді як для інших нестійкостей відстань між сусідніми значеннями  $B$  збільшується.

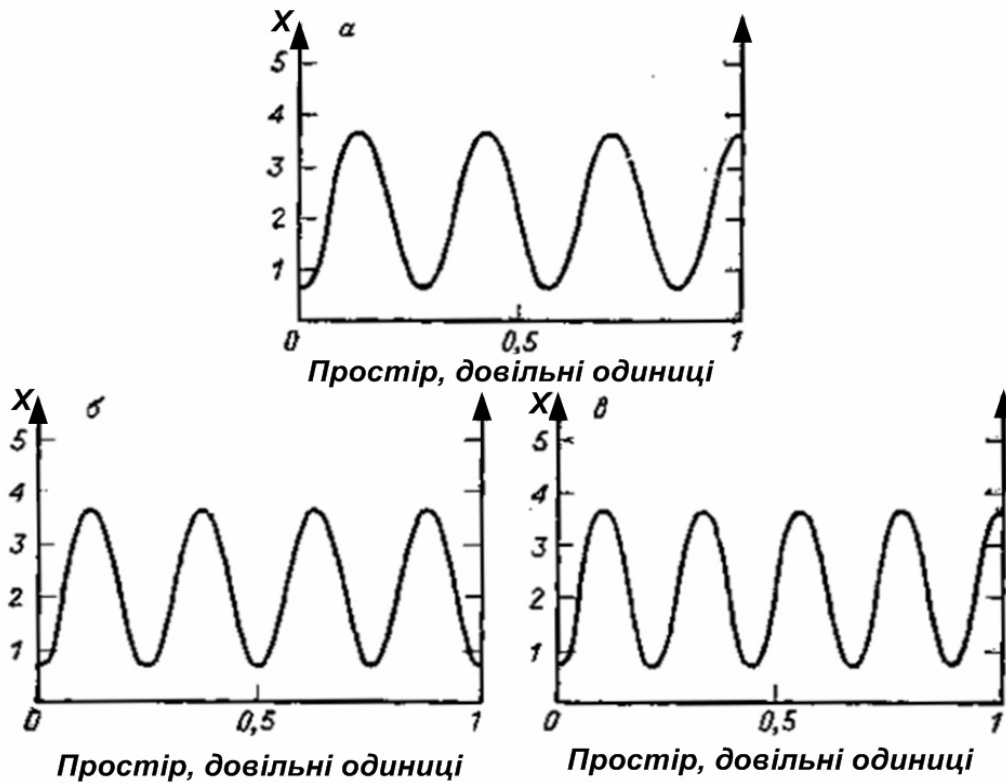


Рис. 11.16. Стационарні профілі, отримані за тих самих значень параметрів, зображених на рис. 11.15, але за інших початкових умов (простір розміром  $l$  розбивали на 101 рівний відрізок, після чого збурення одного й того самого знака та однакової амплітуди накладались у точках 9, 21, 48 або 72 (а); 9, 17, 34, 43 (б); 9, 55 чи 70 (в))

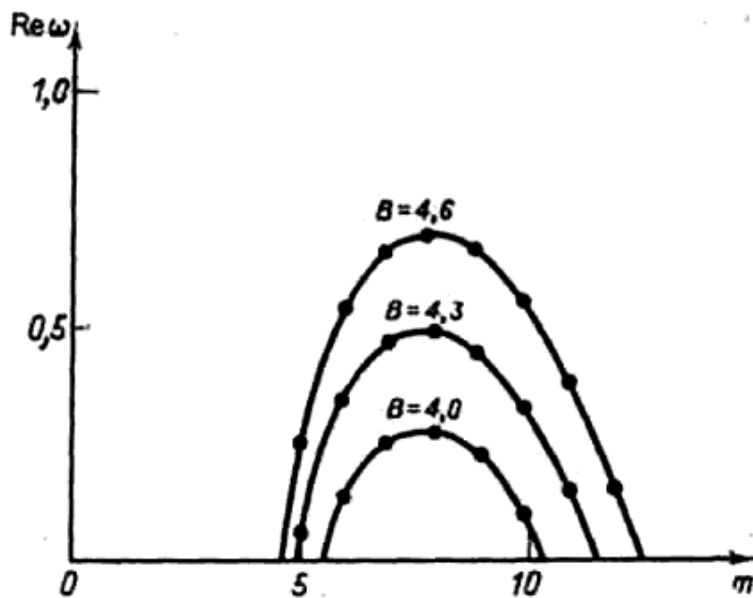


Рис. 11.17. Дійсні частини власних значень  $\omega_n$ , які належать нестійким розв'язкам, що утворюються на термодинамічній гілці за різних значень  $B$  (тобто за нульових потоків чи заданих концентрацій на межах)

### 11.10. Висновки

З аналізу найпростішої моделі, у якій термодинамічна гілка може бути нестійкою впливає, що далекі від рівноваги відкриті фізико-хімічні системи мають здатність до самоорганізації, тобто до утворення дисипативних структур, які утворюють поряд з регуляторними властивостями надзвичайну гнучкість та різноманіття.

Проявляються такі явища як спонтанне утворення просторової неоднорідності, імпульсної хімічної активності, здатності накопичувати інформацію за рахунок своєї пам'яті – усе це є наслідком незначних змін параметрів системи (наприклад її розмірів) або граничних умов.

### Завдання

1. Отримати характеристичне рівняння та знайти власні значення  $\omega_m$  оператора  $L$  (з рівняння 11.8).
2. Провести аналіз виразів для власних значень  $\omega_m$ .
3. Отримати вирази для співвідношення амплітуд власних векторів оператора  $L^*$  (рівняння 11.25).
4. Знайти перші коефіцієнти розкладу в ряд рівняння (11.30).

## Розділ 12. ДЕТЕРМІНОВАНИЙ ХАОС

### 12.1. Термін «хаос»

**Хаос** (від грец.  $\chi\acute{o}\varsigma$  – розкриватися, розверзатися) – категорія космогонії, первинний стан Всесвіту, безформна сукупність матерії і простору (на противагу *впорядкованості*). Інакше кажучи, *хаос* означає *безлад, плутанину, змішування*. Термін виник у старогрецькій міфології про початковий стан світу, від назви якоїсь «безодні, що розверзається» (а не безладного стану), з якої виникли перші божества.

У математиці хаос означає аперіодичну детерміновану поведінку динамічної системи, дуже чутливу до початкових умов. Безкінечно мале збурення граничних умов для хаотичної динамічної системи призводить до кінцевої зміни траєкторії у фазовому просторі.

Складні режими коливань у нелінійних дисипативних системах, які називають хаотичними, на перший погляд мають вигляд випадкових процесів, проте вони підкоряються певним закономірностям (рис. 12.1).

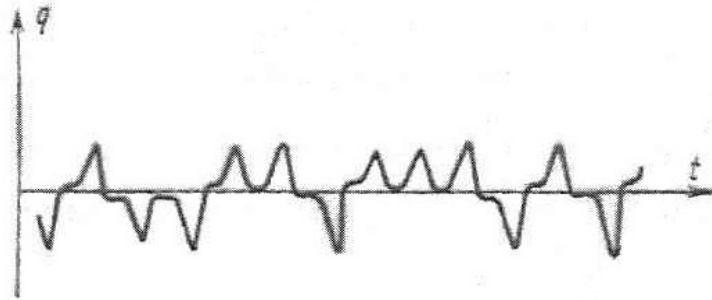


Рис. 12.1. Приклад хаотичної зміни величини  $q$  з часом

Притягальну множину в фазовому просторі динамічної системи, яка характеризується режимом сталих неперіодичних коливань, називають дивним *атрактором*.

Прикладом хаотичної поведінки (дивного атрактора) є рух рідини в міксері. Цей пристрій підкоряється простим механічним законам: його ніж-змішувач обертається з постійною швидкістю, і взаємодію рідини з ножем усередині міксера можна описати простими детерміністичними рівняннями. Проте рух рідини, що виникає при цьому, достатньо складний. Її сусідні області розтинаються і розділяються ножем, а віддалені – можуть зближуватися, тобто рідина перемішується.

Важливою ознакою хаотичної динаміки є її непередбачуваність. Уявимо дві частинки порошку, що знаходяться поруч одна з

одною в рідині всередині міксера. Після включення міксера ці дві частинки недовго залишаться поруч; вони швидко розійдуться в різні боки і незабаром почнуть рухатися незалежно. Подібним чином, якщо двічі запустити хаотичну систему з дуже близькими початковими станами, її поведінка в цих двох випадках буде зовсім несхожою. Це означає, що на великих часових проміжках хаотичні системи непередбачувані. Найменша похибка виміру початкового стану швидко збільшується, і передбачення майбутнього стану стане все більш неточним. Проте, на відміну від випадкової системи, короткострокове прогнозування тут можливе.

## 12.2. Топологічні різноманіття та фрактали

Поведінка всіх систем, що зводяться до одно- або двовимірного фазового простору, жорстко обмежена топологічними умовами. У цьому разі атрactorами можуть бути тільки нерухомі точки і граничні цикли.

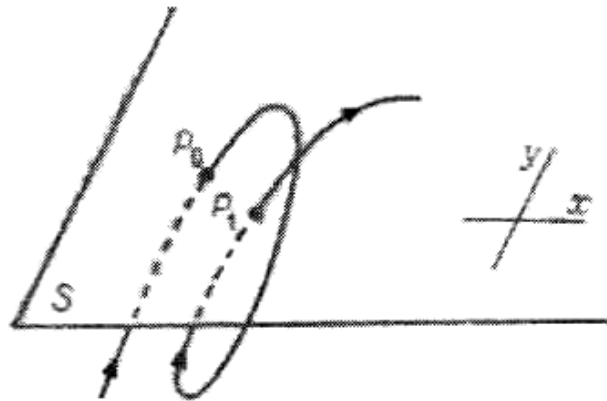
Розглянемо якісні особливості поведінки динамічних систем у фазових просторах з розмірністю вище двох. У таких системах будуть збережені всі особливості одно- і двовимірних систем, проте топологічна структура траєкторії буде складнішою. Для отримання чіткої картини, проведемо розрахунки для систем, динаміка яких відбувається в тривимірному фазовому просторі. Використаємо досвід, отриманий під час аналізу двовимірних задач. Розглянувши тень від цілого предмета, його важко відновити за цією двовимірною картиною. Одна часткова проекція, звичайно, не дає взаємно однозначної відповідності з предметом. Для повного опису цього предмета необхідно мати декілька проекцій на поверхні з різною орієнтацією. Проте ясно, що в нашому випадку подібні міркування автоматично приведуть до початкового багатовимірного простору, тобто до того, чого хотіли уникнути.

Використовують ще одну можливість, яку винайшов Анрі Пуанкаре. Розглянемо площину  $S$ , що трансверсально перерізає фазові траєкторії (рис. 12.2), і вивчимо послідовність точок перетину  $P_n$  з її траєкторіями. З часом ці точки почнуть скупчуватися, і де це відбудеться ми зможемо отримати уявлення про тривимірний атрactor.

Площину  $S$  називають перерізом поверхні Пуанкаре, а характер розташування точок  $P_n$  відповідає *відображенню Пуанкаре*. Зазначимо, що в такому вигляді динаміка системи схожа на деяке *рекурентне співвідношення* з дискретним часом, оскільки проміжки часу між послідовними перетинами поверхні  $S$  із траєкторією скінченні.

Вводячи на площині  $S$  відповідну систему координат, рекурентне співвідношення можна записати у вигляді

$$x_{n+1} = f(x_n, y_n); y_{n+1} = g(x_n, y_n). \quad (12.1)$$



*Рис. 12.2.* Поверхня Пуанкаре (вивчаються перетини траєкторій динамічної системи, що безперервно еволюціонує в часі, з деякою поверхнею  $S$ . Дискретна тимчасова динаміка, що описує положення на площині  $S$  послідовних точок перетину  $P_0, P_1, \dots, P_n$ , дає докладну інформацію про відповідний безперервний потік)

Тепер, коли динаміка системи вже зведена до двовимірного вигляду, можна використати попередні результати і зробити можливі висновки про динаміку системи. Спробуємо класифікувати різні можливості, що виникають за такого підходу.

Одну з найбільш очевидних можливостей такого роду – точки перетину  $P_0, P_1, \dots, P_n$  сходяться до нерухомої точки  $P$  (рис. 12.3 а). Це означає, що аттрактор, якщо він обмежений, є граничним циклом  $C_1$ . У рекурентних співвідношеннях (12.1) існування точки  $P$  виявляється як можливість одночасного виконання рівностей  $X_{n+1} = X_n$ ,  $y_{n+1} = y_n$  або, що рівнозначно  $X_n = f(x_n, y_n)$ ,  $Y_n = g(x_n, y_n)$ .

Проте допускаються й інші можливості. Так, замість щойно описаного циклу першого порядку можна спостерігати, що  $x_{n+1}, x_{n+2}$  і т. д., не співпадають з  $x_n$  (і те саме відбувається зі змінними  $y$ ) аж до  $k$ -ї ітерації, для якої такий збіг буде досягнуто:  $x_{n+k} = x_n, y_{n+k} = y_n$ . У цьому разі розглядатимемо цикл порядку  $k$ . Цикл другого порядку зображено на рис. 12.3 б. На поверхні Пуанкаре аттрактор показано набором з двох точок ( $P$  і  $P'$ ), що послідовно утворюються перетином фазової траєкторії з площею перерізу, тоді як відповідним тривимірним об'єктом є крива  $C_2$ , яка, перед замиканням, здійснює два оберти. У двовимірному фазовому просторі це було б неможливо, оскільки означало б наявність самоперетинів на траєкторіях.

Нерухомі точки відображення Пуанкаре також можна класифікувати як сідлові точки, вузли тощо.

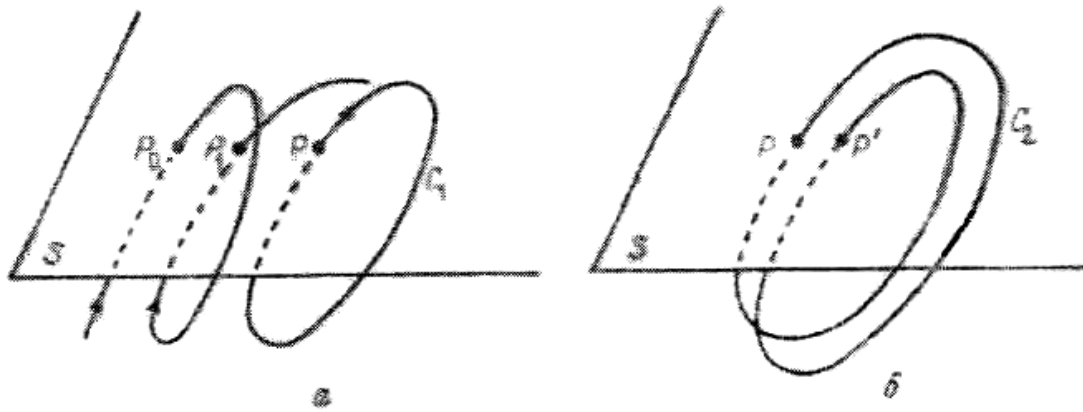


Рис. 12.3. Збіжність траєкторії динамічної системи в безперервному часі до граничного циклу  $C_1$  (а) і граничний цикл  $C_2$ , з періодом, що в два рази перевищує період  $C_1$  (б) (на поверхні Пуанкаре збіжність до цих граничних циклів виявляється у вигляді послідовності  $P_0, P_1, \dots$ , що сходяться відповідно до нерухомої точки  $P$  (а) і пари нерухомих точок  $P, P'$  (б))

Ще одну топологічно допустиму можливість зображено на рис. 12.4, де точки перетину  $P_0, P_1, \dots, P_n$  сходяться до замкнутої кривої  $Q$  на поверхні Пуанкаре  $S$ , тому відповідним об'єктом, що притягується у тривимірному просторі буде двовимірна поверхня. Якщо з фізичних міркувань вимагати, щоб траєкторії не прямували до нескінченності, то така поверхня буде обмеженою. Крім того, структура цієї поверхні має допускати брак точок перетину траєкторій відповідно до теореми єдиності. Ця умова унеможливорює існування поверхні типу сфери. Отже, залишається лише можливість існування поверхні типу *тора*, при цьому рух за тороїдальною поверхнею в загальному випадку є квазіперіодичним завдяки наявності несумісних частот. Новим елементом можна вважати те, що тор притягує траєкторії на відміну від консервативних систем, де є континуум торів, що оточують періодичну орбіту.

На перехідному етапі, перш ніж зійтися до поверхні тора, траєкторія перетинає поверхню Пуанкаре  $S$  у точках  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Надалі вона нескінченно навивається на поверхню тора. Під час кожного проходження крізь поверхню  $S$ , траєкторія дає точку перетину  $P_i$ . Безліч таких точок утворюють криву  $Q$ , що є атрактором на поверхні Пуанкаре. Послідовність перехідних точок  $P_0, P_1, \dots, P_n$  сходиться до цієї кривої.

Отже, притягувальний інваріантний тор є моделлю відтворених квазіперіодичних явищ, що спостерігаються в природі.

Розглянемо можливість існування у тривимірному фазовому просторі атракторів, відмінних від нерухомих точок, замкнутих

кривих або обмежених двовимірними поверхнями. Зазначмо, що розмірність множини, що є атрактором, обов'язково менша за розмірності самого фазового простору, оскільки ця множина станів залишається інваріантною під час руху. Тому цей варіант зводиться до можливості існування об'єктів з розмірністю, проміжною між точкою і лінією, лінією та поверхнею, або навіть поверхнею й об'ємом. Такі об'єкти, якщо вони існують, не будуть ні точками, ні кривими або поверхнями, ні взагалі топологічними множинами. Французький математик Бенуа Мандельброт увів для них спеціальну назву – *фрактали*.

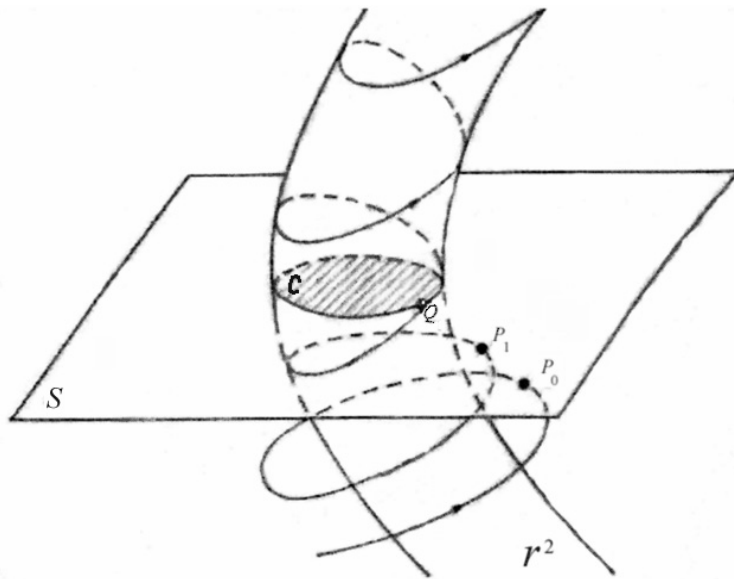


Рис. 12.4. Квазіперіодичний атрактор у вигляді тороїдальної поверхні  $r^2$  у тривимірному фазовому просторі

Теорія чисел дозволяє передбачати множини, проміжні між зліченими множинами (наприклад множини натуральних чисел) і континуумом (наприклад сукупності точок на прямій). Це тісно пов'язано з поняттям нескінченності, яке увів німецький математик Георг Кантор. Результат зображено на конкретному прикладі – *множині Кантора* (рис. 12.5).



Рис. 12.5. Побудова множини Кантора

Розглянемо відрізок  $[0, 1]$ . Розділимо його на три рівні частини і знехтуємо середнім інтервалом. Кожний з двох відрізків, що залишилися, теж розділимо на три рівні частини, та знову знехтуємо



середнім інтервалом і т. д. За побудовою множина точок, отриманих таким чином, є незліченною множиною ізольованих точок. Вона немає власної довжини (це множина *міри нуль*), оскільки довжина її доповнення до відрізка  $[0, 1]$  дорівнює одиниці:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = 1.$$

Проте дивно, що розмірність цієї множини не дорівнює нулю. Розглянемо ситуацію, коли шматок паперу, на якому ми пишемо, двовимірний, а простір, в якому рухаємося, – тривимірний. Позначимо за допомогою  $D$  будь-яку множину, і спробуємо закрити її відрізками, або квадратами, або взагалі гіперкубами зі стороною, рівною  $\varepsilon$  (рис. 12.6). Зазначимо, що розмірність  $d$  всіх відомих топологічних множин впливає зі співвідношення

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\ln N_\varepsilon}{\ln (1/\varepsilon)} \right).$$

Пояснити це співвідношення можна розділивши множину  $D$  на комірки зі стороною  $\varepsilon$  і підрахувавши мінімальну кількість таких комірок; щоб покрити всю множину, розділимо логарифм цього числа на логарифм  $1/\varepsilon$ , перейдемо до межі за дуже малих  $\varepsilon$  і в результаті отримаємо потрібну розмірність.

Застосуємо цей підхід до квадрата зі стороною 1. Для того щоб закрити цей квадрат, потрібно  $(1/\varepsilon)^2$  квадратів зі стороною  $\varepsilon$ . Отже,

$$d = \left[ \frac{\ln (1/\varepsilon)^2}{\ln (1/\varepsilon)} \right] = 2 \left[ \frac{\ln (1/\varepsilon)}{\ln (1/\varepsilon)} \right],$$

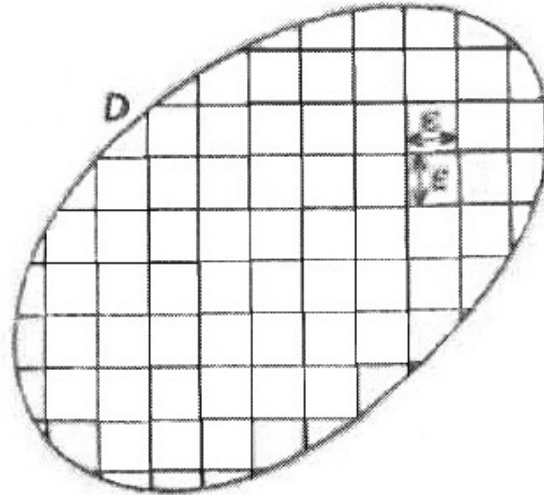
тобто  $d = 2$ , як і передбачалося.

Поширимо ці уявлення на множини Кантора. Під час першого розбиття для покриття всіх наявних підмножин досить мати два відрізки довжиною  $1/3$ . Під час другого розбиття потрібно вже чотири відрізки довжиною  $1/9$ , і взагалі, за  $n$ -го розбиття потрібно мати  $2^n$  відрізків довжиною  $1/3^n$ . Отже,  $\ln N/\ln(1/3) = \ln 2^n/\ln 3^n = (n \ln 2)/(n \ln 3)$ , або  $d = (\ln 2)/(\ln 3)$ ,  $d \approx 0,63$ .

Отже, в цьому разі множина Кантора – проміжна між точкою ( $d = 0$ ) і лінією ( $d = 1$ ), тобто вона є фракталом.

Встановивши існування подібних множин можна уявити такі атрактори в тривимірному фазовому просторі, які відображуються на поверхні Пуанкаре у вигляді нескінченно незліченної множини виключно звивистих відрізків, останні з часом потрапляють

у траєкторію, яку не можна відтворити. Відповідним тривимірним об'єктом буде нескінченний набір аркушів, такий, що їх трансверсальний зріз утворює канторівську множину. Можна сподіватися, що такі об'єкти, які часто називають *дивними атракторами*, виявляться природною моделлю виникнення хаотичної поведінки, що нагадує турбулентність.



*Рис. 12.6.* Ілюстрація поняття розмірності  $d$  множини  $D$  (враховується мінімальна кількість гіперкубів розміром  $\epsilon$ , необхідних для повного покриття цієї множини, а потім обчислюється межа за нескінченного зменшення розміру  $\epsilon$ )

Інакше кажучи, дивний атрактор – це такий атрактор, на якому близькі траєкторії розходяться експоненціально. Як приклад уявимо тривимірний потік у вигляді шару з нескінченної кількості двовимірних аркушів. Шар розтягується уздовж одного з напрямків і складається, як показано на рис. 12.7 *а*. У цьому разі краї шару ( $AB$  і  $A'B'$ ) гладко сполучені між собою. Оскільки на краю  $A'B'$  є два окремих аркуша, а на межі  $AB$  тільки один, то для гладкості їх з'єднання необхідна нескінченна кількість аркушів, інакше виникнуть розриви, що приведуть до безповоротності потоку. Ескіз остаточної структури такого атрактора зображено на рис. 12.7 *б*.

Зі схеми атрактора видно, що, не зважаючи на експоненціальну розбіжність, траєкторії обмежені. Далі виявляється, що структура атрактора повторюється на все більш дрібних просторових масштабах. Подібну багат шарову структуру можна описати математично як деяку *канторову множину*.

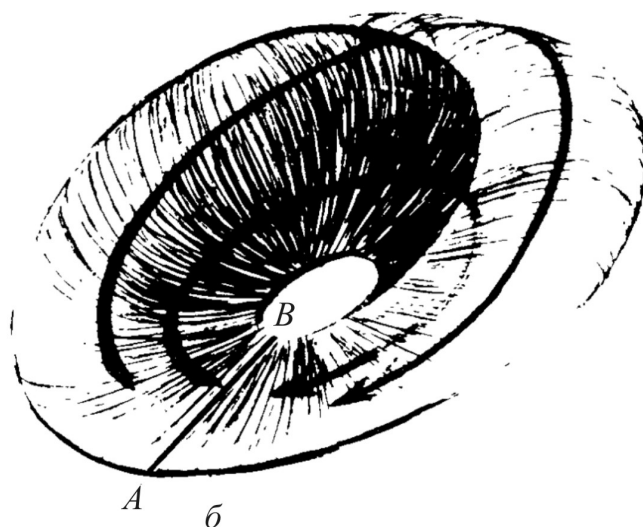
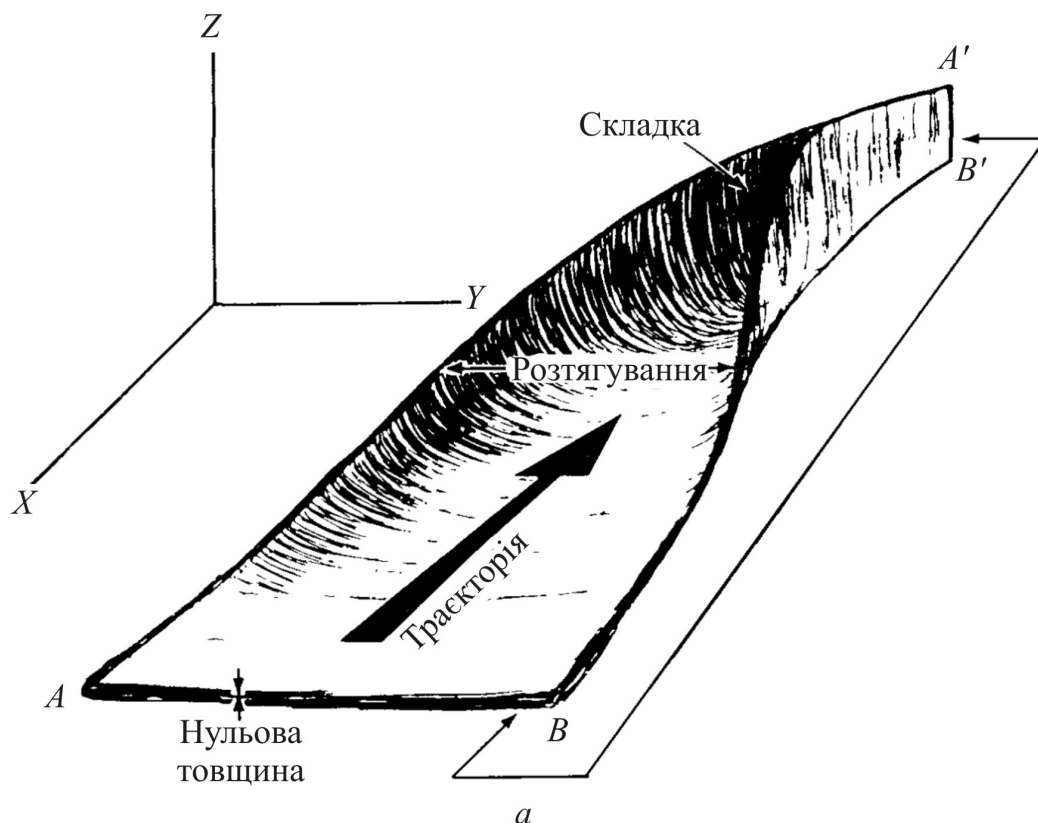


Рис. 12.7. Схематичне зображення прикладу дивного атратора:  
 а – шар з нескінченної кількості аркушів розтягується і складається;  
 б – вигляд атратора після з'єднання кожного аркуша по лінії  $AB$  з сусіднім по лінії  $A'B'$

Рівняння потоку, що призводять до виникнення дивного атратора, зазвичай залежать від певного параметра, варабельність якого змінює характер руху. У дисипативних системах у разі зміни параметра можливий перехід від періодичного до хаотичного руху на дивному атраторі. У багатьох випадках такий перехід відбувається

послідовним подвоєнням періоду руху аж до деякого критичного значення параметра, після якого структура атрактора змінюється і рух стає хаотичним. Пізніше збільшення параметра призводить до зворотного процесу або до появи простого атрактора іншої симетрії. Ще одна цікава особливість таких систем полягає в тому, що зазвичай можна знайти поверхню перетину, на якій рух зводиться приблизно до необоротного одновимірного відображення. Необерненість тут означає багатозначність зворотного відображення.

### 12.3. Неінтегровані консервативні системи: нова механіка

Інтегровані консервативні системи у чистому вигляді в природі майже не трапляються. Як приклад розглянемо рух планет навколо Сонця. Маса планет приблизно в тисячу разів менша від маси Сонця, тому в першому наближенні їх взаємодію можна розглядати лише як притягання планет до Сонця. Отже, маємо *завдання про два тіла* – класичного прикладу інтегрованої (і точно вирішуваної) системи. Аналіз цієї системи призводить до періодичного руху кожної планети і до квазіперіодичного руху планетної системи в цілому.

Проте планети завжди взаємодіють, хоча і слабо, що утворює *збурювальний вплив* на кеплерівській траєкторії. Питання в тому, як зміниться від цього рух – чи відбувається слабка зміна траєкторій, чи їх характер значно зміниться.

Це основна проблема механіки небесних тіл. Аналогічні питання можна сформулювати і для низки інших механічних систем. Очевидно, вплив такого збурення може бути значним, якщо масштаби часу, що цікавлять нас, обернено пропорційні інтенсивності збурення (для планетної системи цей час становитиме приблизно 1000 років). Для того, щоб знайти наближений розв'язок повної системи рівнянь, достатньо до розв'язку в «нульовому» наближенні, відповідно інтегрованої «стандартній» системі, додати малу поправку, пропорційну інтенсивності збурення. Це роблять стандартними методами. Проте, якщо спробувати знайти розв'язок, дійсний для великого інтервалу часу, і, зокрема, якщо прагнути зрозуміти якісний характер точних розв'язків, то потрібно буде подолати низку неусувних труднощів. Для планетної системи такі труднощі виникнуть у інтервалі часу в мільярд років у разі спроби дати відповідь на питання: чи вийдуть планети за межі Сонячної системи, чи впадуть на Сонце, чи зіткнуться між собою?

Згадані вище труднощі виникають переважно у вигляді різних *розбіжностей*. Це означає, що під час обчислення традиційними методами теорії збурень поправок до руху інтегрованої системи

з'ясовується, що за певних умов ця поправка стає дуже значною або навіть прямує до нескінченності. Найчастіше це відбувається у разі виникнення *резонансу*, тобто тоді, коли власні частоти інтегрованої стандартної системи співмірні в тому сенсі, що виконується співвідношення  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots = 0$ . Такі катастрофи свідчать про непридатність використовуваного методу і служать чіткою вказівкою на те, що поведінка системи за таких умов має якісно змінитися.

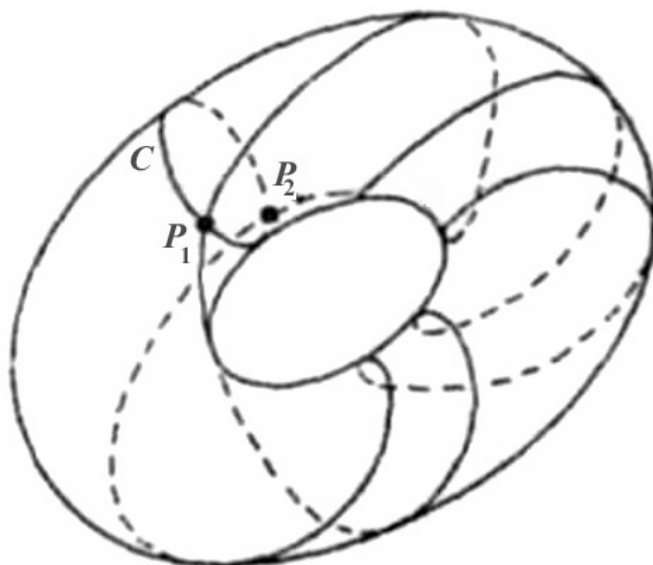
Розглянемо резонанси, які трапляються не як виключення, а швидше як правило.

З теорії чисел відомо, що серед усіх дійсних чисел ірраціональні утворюють переважну більшість, оскільки, по-перше, вони утворюють численну множину (на відміну від раціональних чисел), а по-друге, вони заповнюють усю «довжину» або «міру» будь-якого відрізка реальної лінії. Це означає, що в більшості точок фазового простору відповідні дії змінних  $\{I_j\}$  матимуть такі значення, що власні частоти системи  $\{\omega_j\}$  будуть пов'язані ірраціонально, і з цієї причини вони будуть несумісні. Тому згадані вище труднощі не виникнуть, і, зазвичай, рух буде відбуватися на *нерезонансних торах* зумовлених ірраціональністю зв'язку між частотами. Хоча вони і здаються в деякому розумінні «рідкими», проте раціональні числа завжди є в «надлишку» (інакше кажучи, множина раціональних чисел всюди щільна), оскільки в будь-якому заданому околі будь-якого дійсного числа завжди існують раціональні числа. Отже, будь-який *малий об'єм* фазового простору містить нескінченну кількість точок для яких виконується умова резонансу. Зокрема, можна сподіватися, що резонанси відіграють важливу роль в еволюції гіббсового ансамблю, а також і в статистичному описі системи.

Розглянемо резонанси, які можуть бути «небезпечними». Звернемося знову до умов резонансу, з яких випливає, що існує певна комбінація кутових змінних, яка залишається інваріантною під час руху, і тому майже не використовуються в описі динаміки системи. Інакше кажучи, вихідний вибір  $n$  незалежних кутів виявився хибним, оскільки  $n - 1$  з них є насправді незалежним. Застосувавши спеціальну термінологію, вважатимемо, що  $n$ -вимірний тор стягується до  $(n - 1)$ -мірного тору.

Такі інваріантні поверхні нижчої розмірності називають *резонансними торами*. У разі двох мір вільності це означатиме, що інваріантна поверхня покрита сімейством замкнутих (одновимірних) орбіт, відповідних періодичному (але не квазіперіодичному) руху. Одна з цих орбіт породжуватиме на поверхні площини Пуанкаре  $S$

(рис. 12.8) низку нерухомих точок ( $P_1$  і  $P_2$  на рис. 12.8), кількість яких дорівнює кількості обертів, що здійснюються орбітою довкола тора.



*Рис. 12.8.* Нерухомі точки  $P_1$  та  $P_2$ , що породжуються на січній поверхні площини Пуанкаре  $S$  періодичною траєкторією, що навивається на резонансний тор

Будь-який інший член того сімейства породить інший набір з тієї самої кількості нерухомих точок на площині  $S$ . Отже, вся крива  $C$  складатиметься з нерухомих точок. Така ситуація є дещо винятковою, на зразок трьох точок на одній і тій самій прямій. З цієї причини можна сподіватися, що найбільш типові збурення (неінтегровані), що впливають на систему, зруйнують цю конфігурацію траєкторій у фазовому просторі.

Пошук розв'язку, що дозволяє подолати ці труднощі, пов'язаний з неінтегрованими системами. Багато важливих результатів були відомі вже Пуанкаре і Біркгофу, проте головну роль у цьому прориві відіграв радянський математик А. Колмогоров. Серед інших учених згодом важливий внесок зробили В. Арнольд і Дж. Мозер. Розглянемо коротко найбільш яскраві положення нової теорії.

**Збурення квазіперіодичних рухів.** Використані раніше міркування на користь того, що резонансні тори мають бути чутливими до малих неінтегрованих збурень, дозволяють сподіватися, що в нерезонансному випадку рух має залишатися «грубим». Інакше кажучи, типова квазіперіодична поведінка системи немає значно змінюватися слабким збуренням. Цей важливий результат був доведений Колмогоровим; він також чітко описав ті типи квазіперіодичного руху, які продовжують існувати після накладення збурення.

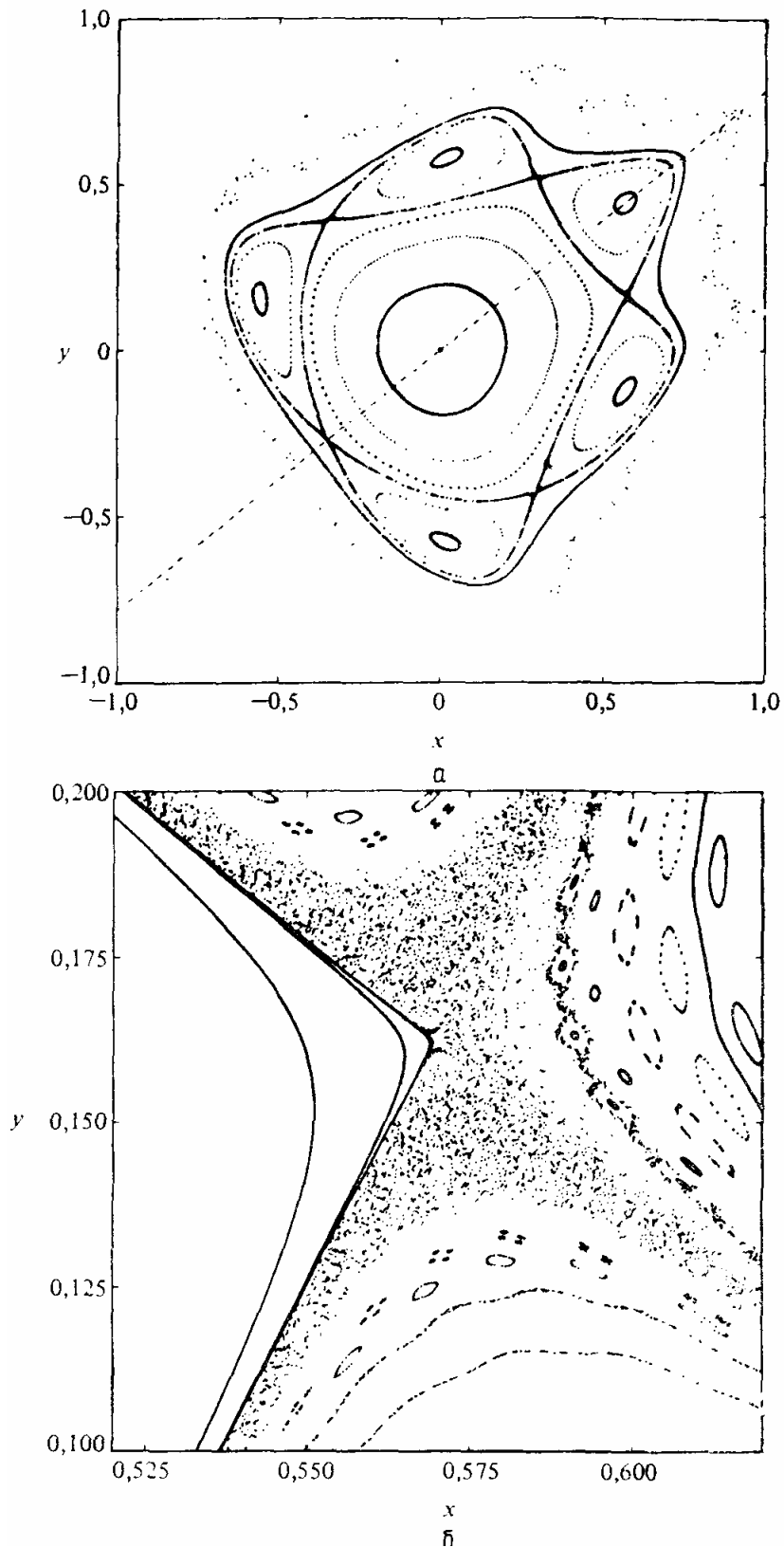
Було встановлено, що для того, щоб квазіперіодичний рух продовжував існувати, зв'язок між власними частотами має бути достатньо ірраціональним. У разі двох ступенів вільності це означає, що відношення частот  $\omega_1 / \omega_2$  має значно відрізнятись від раціонального значення.

Слід сподіватися, що в об'ємних ділянках фазового простору неінтегрована система близька до деякої інтегрованої, та має демонструвати стійкий рух навколо періодичних орбіт.

**Збурення періодичних рухів.** Для вирішення цієї проблеми можна скористатися методом перерізу поверхні Пуанкаре (рис. 12.8). спочатку доцільно вирішити питання про континуум нерухомих точок на площині  $S$  у зв'язку з дією збурень. Нехай кількість витків, що здійснюють орбіти, дорівнює  $s$ . Можна показати, що під дією збурення з'являється  $2ks$  нерухомих точок ( $k$  – певне ціле число), з яких точки  $ks$  є еліптичними, а  $ks$  – гіперболічними (сідлами). Еліптичні нерухомі точки відповідають стійким періодичним орбітам, кожна з яких оточена (нерезонансними) інваріантними торами, що проявляються на відображенні перерізу Пуанкаре у вигляді замкнених кривих. Відповідну частину фазового простору часто називають «островом» (такий «острів» чітко видно на рис. 12.9 а).

Абсолютно інша ситуація виникає у разі гіперболічних нерухомих точок. Унаслідок нестійкості відповідних періодичних орбіт в околі таких точок розвивається виключно складна структура, що обумовлено особливою конфігурацією їх сепаратрис (рис. 12.9 б). Точніше, на відображенні перерізу Пуанкаре, ці сепаратриси вигинаються і перетинаються в нескінченній кількості точок, відомих під назвою *гомоклінічні точки*. На цих ділянках виникає режим надзвичайно *іррегулярного руху* – траєкторії дуже чутливі до малих змін початкових умов і спонтанно переміщуються по фазовому просторі. На відображенні Пуанкаре це проявляється у вигляді хмари випадково розкиданих точок, не зважаючи на те, що відповідні траєкторії абсолютно детерміновані. Ця хаотична поведінка вказує на можливий глибокий зв'язок між неінтегрованими консервативними системами і стохастичною поведінкою, яку зазвичай пов'язують із безповоротністю і дисипативними системами.

Зазначимо, що структура відображення Пуанкаре повторюється на всіх масштабах поблизу всіх еліптичних точок, що породжуються різними резонансними орбітами. Ця властивість самоподібності показує, наскільки великої складності можна досягати навіть у простих на вигляд завдань.



*Рис. 12.9.* Регулярні й стохастичні траєкторії неінтегрованої гамільтонової системи на поверхні Пуанкаре; *a* – стійкий рух поблизу еліптичних нерухомих точок; *б* – нестійкий рух поблизу гіперболічних нерухомих точок [із статті: *Hénon M.Q. App1.Math., 27,291(1969)*]



Таку поведінку досліджували числовими методами на багатьох простих моделях. У разі малих збурень обчислення узгоджуються із загальною картиною, яка зображена на рис. 12.9. Проте зі зростанням енергії системи спостерігається тенденція порушення островів і хаотичні траєкторії заповнюють все більші ділянки фазового простору. Які-небудь суттєві висновки з цих спостережень зробити важко, оскільки цей режим погано піддається аналітичному опису і, більш того, нелегко провести які-небудь загальні топологічні міркування. Проте можна ввести міру нестійкості руху і чутливості до початкових умов. Це забезпечується *показниками Ляпунова*, що описують середню швидкість розбіжності двох близьких із самого початку траєкторій.

Складна структура регулярних та іррегулярних траєкторій, що розглядалися, не є виключно властивістю неінтегрованих гамільтонових систем. Така поведінка типова і для інших широких класів консервативних систем, серед яких важливу роль відіграють колмогоровські системи (*K*-системи). Іншим методом для вивчення динамічних систем є відображення в дискретному часі, що обумовлено їх тісним зв'язком з динамічними системами в безперервному часі, опосередкованою поверхнею Пуанкаре. Більш того, за декількома рідкісними винятками, дискретні відображення – єдиний відомий натепер тип динамічних систем, для якого можна надати доказ виникнення іррегулярних видів руху, відповідних хаотичній поведінці. Відомим прикладом є *відображення типу підкови*, яку можна розглянути як у вигляді абстрактної консервативної, так і у вигляді дисипативної динамічної системи.

#### 12.4. Модель нестійкого руху: підкова

Розглянемо відображення *T*-площини на саму себе, що діє на квадраті *R*, способом, який показано на рис. 12.10. Квадрат стискається по вертикалі й розтягується по горизонталі, а потім вигинається у вигляді підкови так, що зігнута частина та кінці «заготовки для підкови» виходять за межі початкового квадрата. Отже, квадрат *R* не відображається сам на себе – в ньому містяться лише ті ділянки, які належать підкові – смуги *I* та *J*. Їх праобразами (тобто тими частинами *R*, з яких ці смуги вийдуть у результаті відображення) насправді є дві вертикальні смуги *K* та *L* початкового прямокутника.

Очевидно, інваріантна кількість точок цього перетворення і зворотного йому перетворення  $T^{-1}$ , що позначається  $\Lambda$ , міститься в обох парах прямокутників (*I, J* та *K, L*). Отже, ці точки є підмно-

жинами чотирьох малих квадратів  $C_1-C_4$ , показаних на рис. 12.10. Називатимемо їх *поворотними множинами*.

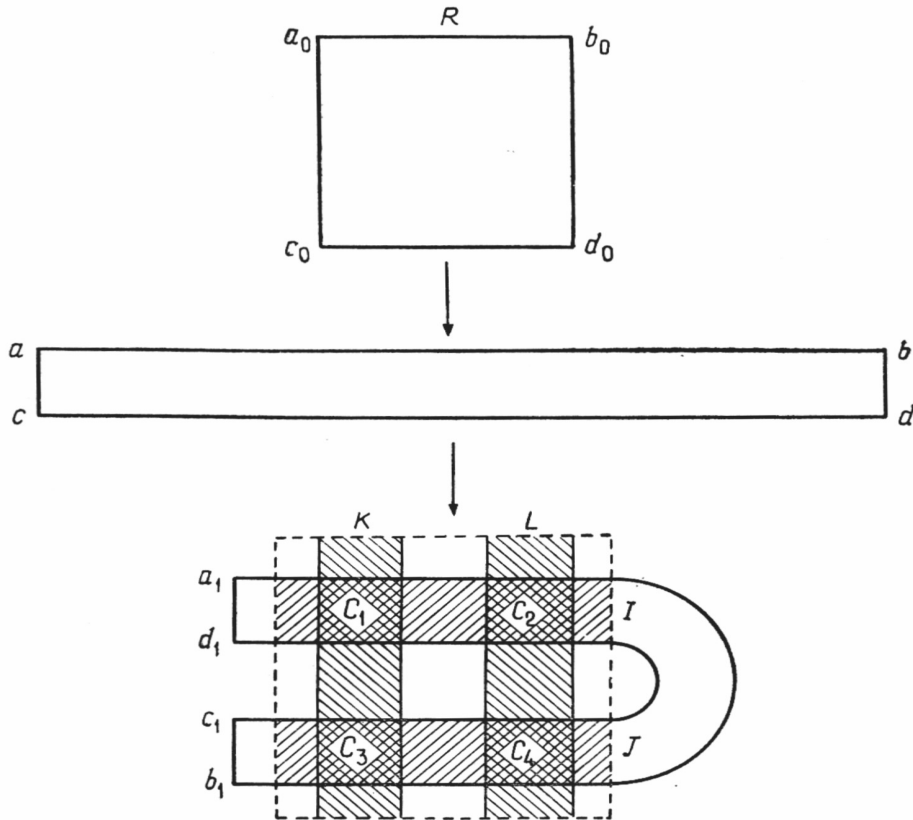


Рис 12.10. Відображення «підкова». Початковий квадрат  $a_0b_0c_0d_0$  розтягується принаймні в два рази в горизонтальному напрямку і стискається більше ніж у два рази у вертикальному. Отримана смужка згинається у формі підкови. У цьому разі перетворенні квадрати  $C_1-C_4$  залишаються інваріантними

Результат повторної дії цього відображення на квадрат  $R$ , тобто результат відображення  $T^2 = T \times T$ , показано на рис. 12.11. Зокрема, на рисунку видно смуги  $T^2R$ , що містяться в початковому квадраті, та їх прообрази, що є частиною множини, породженої зворотним перетворенням  $T^{-2}$  квадрата  $R$ . Так утворюється поворотна множина з 16 квадратів, по чотири в кожному з квадратів  $C_1-C_4$  (рис. 12.10).

Крім того, існують неперіодичні орбіти, що наближаються як завгодно близько до будь-якої точки  $\Lambda$ . Зазначимо, що кожна точка  $\Lambda$  за побудовою є гіперболічною, оскільки вона лежить на перетині напрямків розтягування (горизонталь) і стиснення (вертикаль), тому дві орбіти, що починаються в двох сусідніх точках  $\Lambda$ , будуть експоненціально розходитися в процесі послідовних ітерацій. Це означає надзвичайну чутливість до початкових умов – одна з основних властивостей іррегулярних траєкторій.

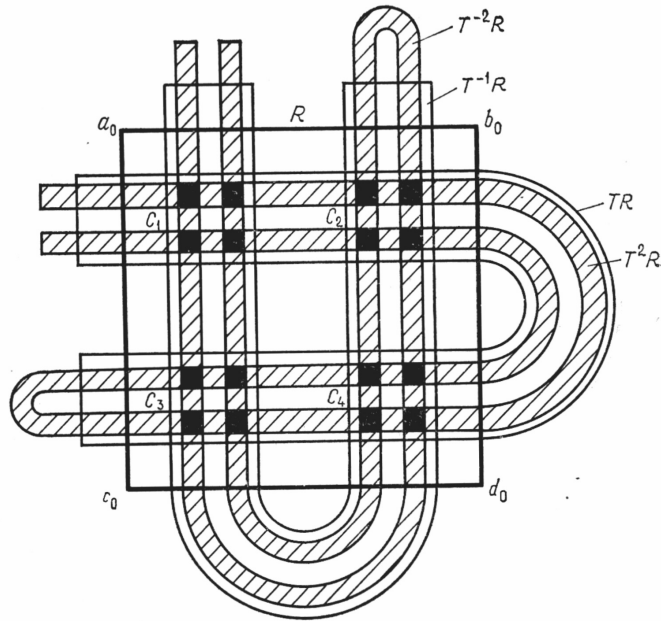


Рис 12.11. Перетворення «підкова» після двократної ітерації (утворення множини  $\Lambda$  рекурентних точок за подальшої фрагментації квадратів  $C_1-C_4$ )

## 12.5. Дисипативні системи

На відміну від гамільтонових систем із їх фундаментальним законом збереження фазового об'єму, для дисипативних систем характерне його постійне зменшення з часом. Це приводить до того, що всі траєкторії руху притягуються до деякої поверхні (атрактора), розмірність якої менша, ніж у вихідного фазового простору. У цьому разі рівняння руху вже не є канонічними, але їх можна записати у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{x}),$$

де для  $N$ -вимірного фазового простору вектори  $\mathbf{x}$  і  $\mathbf{V}$  мають  $N$  компонент. Траєкторію  $x(t)$  називають в цьому разі  $N$ -вимірним потоком. У разі регулярного потоку рух на аттракторі є простим. Це може бути, наприклад, нерухома точка (фокус) або періодична траєкторія (граничний цикл). Для двовимірних потоків існують лише ці дві можливості.

Для тривимірних потоків, окрім фокусів і граничних циклів, можливі й квазіперіодичні траєкторії з двома основними частотами. Аналогічно можна було б сподіватися, що це єдиний можливий аттрактор. Проте це не так. Було показано, що у тривимірних (і більших розмірностях) дисипативних системах існують аттрактори з дуже складною геометричною структурою. Зокрема вони мають

дробову розмірність, і їх називають *дивними атрactorами*. Рух на дивних атрactorах є хаотичним.

## 12.6. Модель Лоренца

Розглянутий приклад хаотичного потоку виник з гідродинамічних рівнянь, що описують конвекцію Релея–Бенара. Шар рідини кінцевої товщини підігрівається знизу так, що між верхньою холодною і нижньою гарячою поверхнями підтримується постійна різниця температур. Рух рідини описується рівнянням Навьє–Стокса. Припустивши, що потік двовимірний, його можна охарактеризувати двома змінними: функцією струму току  $\psi$  і відхиленням  $\Theta$  стаціонарних розподілів температур від лінійного по вертикалі.

Рівняння у часткових похідних для збуреного потоку можна перетворити у систему звичайних диференціальних рівнянь. Для цього слід розкласти функції  $\psi$  та  $\theta$  у подвійний ряд Фур'є по  $x$  і  $z$  з амплітудами, залежними тільки від часу  $t$ . Залишивши обмежену кількість членів, отримаємо рух у скінченновимірному фазовому просторі.

Лоренц досліджував спрощену модель, в якій було залишено лише три «найбільш важливих» Фур'є-амплітуди. У цьому наближенні рівняння набувають вигляду

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y; \\ \dot{Y} &= -XZ + rX - Y; \\ \dot{Z} &= XY - bZ,\end{aligned}\tag{12.2}$$

де  $X$  – амплітуда конвективного руху;  $Y$  – різниця температур для течій вгору і вниз;  $Z$  – відхилення вертикального температурного профілю від лінійного;  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  – безрозмірні параметри, фізичний сенс яких розглянуто нижче.

Значення параметрів  $\sigma$  та  $b$  зазвичай постійні ( $\sigma = 10$ ;  $b = 8/3$ ), а поведінка системи досліджується залежно від  $r$ . Перерахуємо деякі елементарні властивості моделі Лоренца.

1. Рівняння інваріантні відносно перетворення:  $X \rightarrow -x$ ,  $Y \rightarrow -Y$ ,  $Z \rightarrow +Z$ .

2. Фазовий об'єм скорочується зс сталою швидкістю

$$\Lambda = \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = -(\sigma + b + 1),$$

яка значно більша для значень параметрів, що зазвичай використовуються:  $\sigma = 10$ ;  $b = 8/3$ ;  $\Lambda = -13,7$ . За одиницю часу об'єм скорочується в  $e^{-\Lambda} = 10^6$  разів.

3. За  $r = 0$  і  $t > 0$  розв'язок обмежений і  $X, Y, Z \rightarrow 0$  для  $t \rightarrow \infty$ .

Зі зростанням  $r$  характер розв'язків змінюється так:

1. Для  $0 < r < 1$  єдиним аттрактором є нерухома точка на початку координат. Це належить стаціонарній теплопровідності в завданні Релея–Бенара.

2. Для  $r > 1$  аттрактор втрачає стійкість і виникають дві нові нерухомі точки

$$X_{1,2} = \left( \pm [b(r-1)]^{1/2}, \pm [b(r-1)]^{1/2}, r-1 \right),$$

які є аттракторами для  $1 < r < r_2$ ,

$$r_2 = \sigma(\sigma + b + 3) / (\sigma - b - 1) = 470 / 19 \approx 24,74$$

Це належить стаціонарній конвекції в завданні Релея–Бенара.

3. Для  $r > r_2$  не існує аттракторів типу нерухомих точок.

4. Для  $r > r_1 = 24,06$  виникає дивний аттрактор із хаотичним рухом. Зазначимо, що у вузькому діапазоні  $24,06 < r < 24,74$  існують три аттрактори, два з яких належать стаціонарній конвекції, а третій – хаотичному потоку. У цьому разі в системі відбувається явище гістерезису, якщо  $r$  зростає, то регулярна конвекція переходить у турбулентність за  $r = 24,74$ ; якщо  $r$  зменшується, турбулентний рух переходить у регулярну конвекцію за  $r = 24,06$ .

Приклад хаотичної траєкторії, що виходить з початку координат і що перерізає площину  $Z = 27$ , наведено на рис. 12.12. Спочатку траєкторія прямує до  $X_1$ , а потім розкручується і притягується до  $X_2$ .

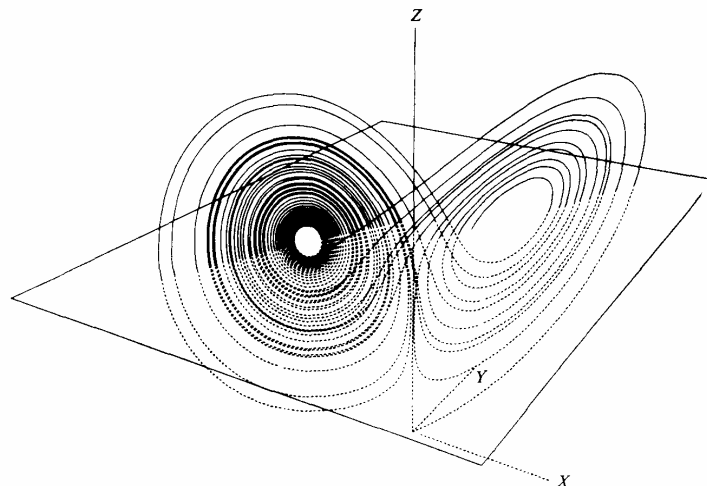


Рис. 12.12. Хаотична траєкторія на аттракторі Лоренца за  $r = 28$

Спектр потужності  $X(t)$  показано на рис. 12.13. Його безперервність відображає неперіодичний, хаотичний рух на аттракторі.

Звернувши увагу, що залежність  $Z$  від  $t$  виглядає хаотичною, Лоренц придумав ефективний метод аналізу руху. Він зафіксував

послідовні максимуми  $Z_1, Z_2, \dots$ , і побудував залежність  $Z_{n+1}$  від  $Z_n$ , яку зображено на рис. 12.14.

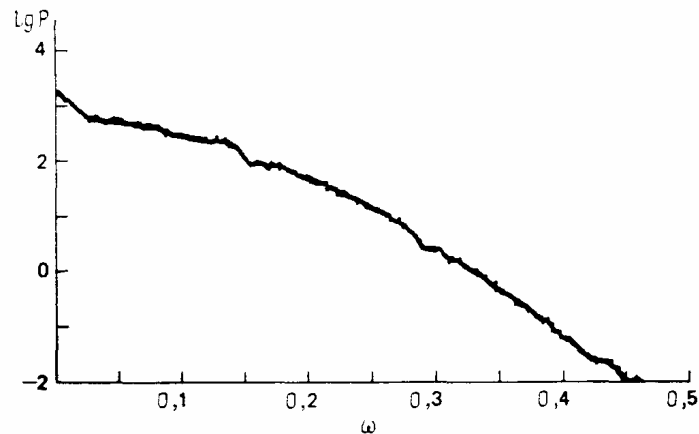


Рис. 12.13. Спектр потужності  $P(\omega)$  для  $X(t)$  на атракторі Лоренца за  $r = 28$  (безперервність спектра відображає хаотичність руху)

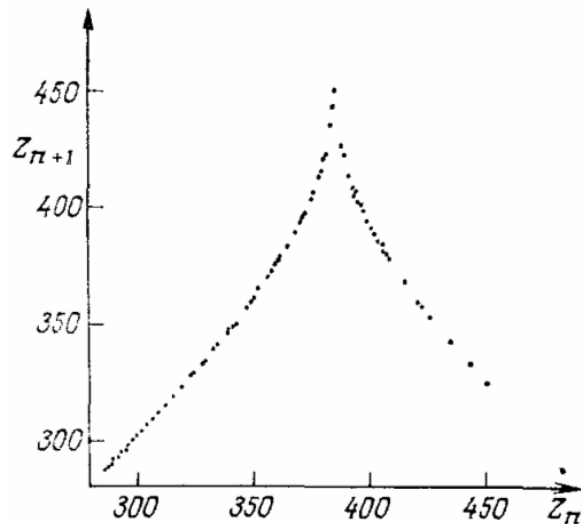


Рис. 12.14. Одновимірне відображення на атракторі Лоренца за  $r = 28$ ,  $Z_n$  – послідовні максимуми  $Z(t)$

Періодична модуляція граничного циклу автономної системи приводить до того, що фазова траєкторія із заданою частотою  $p$  обертається навколо граничного циклу і лежить на двовимірній поверхні, що є поверхнею тора. Аналогічно випадку граничного циклу ця поверхня буде стійкою граничною множиною, до якої з часом стягуються всі траєкторії з поверхні тора (як зсередини, так і зовні).

## 12.7 Системи, що приводять до моделі Лоренца

### 12.7.1. Конвекція в замкненій петлі та водяне колесо

Розглянемо іншу систему, яка зводиться до рівняння Лоренца, але її виведення є набагато простішим і, можливо, переконливішим. Нехай маємо замкнуту в кільце трубку, заповнену рідиною (рис. 12.15). Трубка підігривається знизу і охолоджується зверху, і за достатньої інтенсивності підігріву можливе виникнення конвекційної течії. Введемо кутову координату  $\varphi$ , яка відраховується від спрямованого у низ радіуса проти годинкової стрілки. Залежність температури від кута  $T = T(\varphi)$  має період  $2\pi$  і її можна подати у вигляді ряду Фур'є. Враховуючи тільки першу гармоніку, вважатимемо

$$T(\varphi) = T_0(1 + Y \sin \varphi + Z \cos \varphi).$$

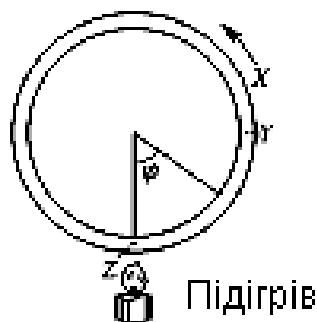


Рис. 12.15. Задача про конвекцію в замкненій кільцевій трубці;  $X$  – характеризує швидкість течії;  $Y$  і  $Z$  – відхилення температури від середнього значення у вказаних точках

Можна побачити, що  $Z$  характеризує відхилення температури від середнього значення у нижній точці трубки, а  $Y$  – у крайній правій точці за  $\varphi = \pi/2$ . Через  $X$  позначимо швидкість рідини. Оскільки рідина майже така, що не стискається, цю швидкість можна вважати одною і тою самою в будь-якому перерізі трубки, тобто не залежною від  $\varphi$ .

Побудуємо рівняння що описують зміну в часі динамічних змінних  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Зміна швидкості течії зумовлена архімедовою силою, яка пропорційна  $Y$ , і зменшена силою в'язкого тертя, що пропорційна  $X$ . Тому перше рівняння матиме вигляд

$$\dot{X} = cY - \beta X, \quad (12.3)$$

де  $c$  і  $\beta$  – деякі сталі.

Припустимо спочатку, що є течія з постійною швидкістю,  $\varphi = X$ , тоді рівняння для  $Y$  та  $Z$  можна записати так:

$$T = f(\varphi - Xt) = T_0(1 + Y \sin(\varphi - Xt) + X \cos(\varphi - Xt)).$$

Введемо позначення  $\varphi' = \varphi - Xt$ , маємо

$$\dot{T} = T_0(Y\dot{\varphi}' \cos \varphi' - Z\dot{\varphi}' \sin \varphi') = T_0(-XY \cos \varphi' + ZX \sin \varphi').$$

Звідси видно, що перенесення температури потоком рідини враховується членом вигляду  $XZ$  у рівнянні для  $Y$  і членом  $(-XY)$  у рівнянні для  $Z$ . В обидва рівняння слід додати члени, що враховують релаксацію, які матимуть вигляд  $(-DY)$  і  $(-DZ)$ , де  $D$  – константа, а також врахувати підігрів додаванням постійного члена  $A$  в рівняння для  $Z$ . Отже,

$$\dot{Y} = XZ - DY; \quad \dot{Z} = A - XY - DZ. \quad (12.4)$$

Проводячи у виразах (12.3) і (12.4) заміну змінних

$$X = Dx; \quad Y = \frac{\beta Dy}{c}; \quad Z = -\frac{\beta Dz}{c}; \quad t = Dt.$$

приходимо до рівнянь Лоренца:

$$\dot{x} = \sigma(y - x); \quad \dot{y} = rx - y - xz; \quad \dot{z} = -bz + xy, \quad (12.5)$$

де

$$\sigma = \frac{\beta}{D}; \quad r = \frac{cA}{\beta D^2}; \quad b = 1.$$

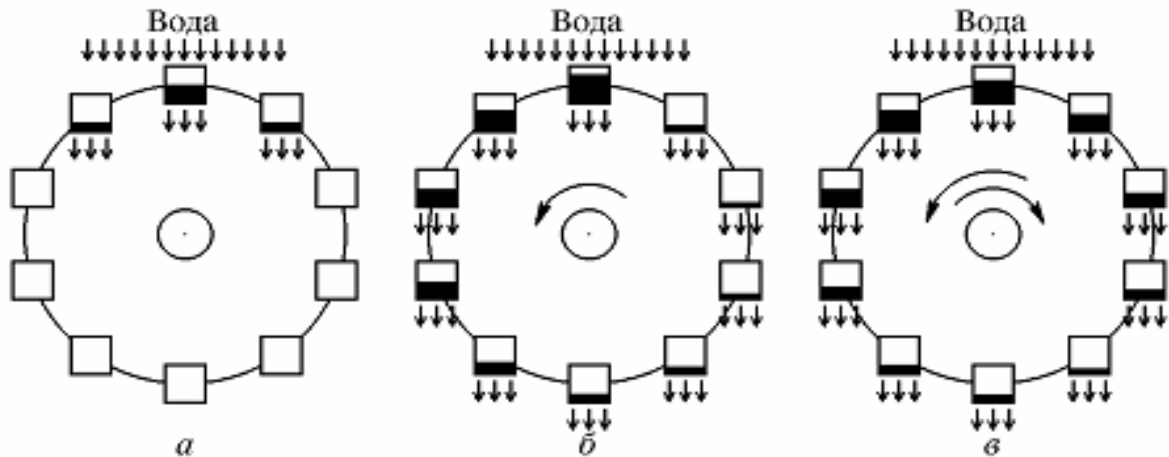
Параметр  $b$  дорівнює одиниці, тому що розглядалася трубка у вигляді круглого кільця. Якщо взяти еліптичну форму, можна отримати рівняння з параметром  $b$  відмінним від одиниці.

Фізичний сенс змінних, що фігурують у рівняннях Лоренца, можна проінтерпретувати на підставі співвідношень (12.2). Змінна  $x$  характеризує швидкість обертання конвекційних валів, величини  $y$  та  $z$  відповідають за розподіл температури, відповідно по горизонталі й по вертикалі. Параметр  $b$  визначають геометрією конвекційного осередку, а саме відношенням її вертикального і горизонтального розмірів  $a$ . Параметр  $a$  є відношенням коефіцієнту кінематичної в'язкості ( $\nu$ ) і коефіцієнту температуропровідності ( $k$ ) –  $\nu/k$ . Його називають *числом Прандтля*. Комбінацію  $R = g\gamma h^3 \Delta T / \nu k$  – *числом Релея*. Свого часу Релей показав, що умові виникнення конвекційної течії у вигляді валів відповідає певне критичне значення цього числа, а саме  $R_c = \pi^4 a^{-2} (1 + a^2)^3$ . Параметром  $r$  є відношення  $R/R_c$ .

Іншу просту реалізацію системи Лоренца показує пристрій, який зображено на рис. 12.16 – водяне колесо (Gleick, 1987). Уявімо колесо, встановлене на горизонтальній осі, по ободу якого підвішені



корзини. Зверху ллється вода, потрапляючи в корзини, затримується в них, і витікає, оскільки корзини діряві. Зрозуміло, що ця система дуже схожа на розглянуту вище задачу про конвекцію в трубці (просто перевернуту «вгору ногами»), і можна описати аналогічними рівняннями – системою Лоренца. Перевага моделі водяного колеса в її наочності (таку систему могли б побудувати первісні люди для яких-небудь господарських або ритуальних потреб).



*Рис. 12.16.* Водяне колесо – механічна модель системи Лоренца;  
*a* – за малого потоку води колесо залишається у спокої;  
*б* – за великих потоків води – колесо обертається з постійною швидкістю;  
*в* – дуже великий потік – колесо обертається хаотично, час від часу змінюючи напрямок обертання на протилежний

За малої інтенсивності колесо буде нерухомим. Якщо потік збільшити, колесо обертатиметься з постійною швидкістю. За більшої швидкості потоку рух стане хаотичним і, більш того, напрямок обертання буде час від часу змінюватися. Буде завершений черговий оберт колеса або колесо зупиниться, не набувши стійкої рівноваги, і почне обертатися в інший бік – залежить від наповнення всіх корзин у цей момент і від того, чи вистачить швидкості, щоб уникнути рівноваги. Характер режиму стає нетривіальним і прояснити його природу можливо тільки за допомогою аналізу рівнянь.

Вражає те, що рівняння (12.2) повністю еквівалентні рівнянням у теорії роботи одномодового лазера.

## 12.8. Динаміка системи Лоренца

Розглянемо систему трьох нелінійних рівнянь першого порядку (12.5), яка описує динаміку декількох фізичних систем – конвекцію в шарі, конвекцію в кільцевій трубці й одномодовий лазер. Її називають моделлю Лоренца (Lorenz, 1963) на честь дослідника, що виявив у числових розрахунках можливість хаотичної поведінки.

### 12.8.1. Результати числового розв'язання рівнянь Лоренца

Якщо взяти вибрані Лоренцом у початковій роботі значення параметрів  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$  і провести числових розв'язання рівнянь (12.5) на комп'ютері, то виявляється, що в системі встановлюється хаотичний автоколивальний режим. Залежності динамічних змінних  $x$ ,  $y$ ,  $z$  від часу показано на рис. 12.17. Зображену на верхній діаграмі залежність  $x(t)$  можна інтерпретувати наочно, використовуючи модель водяного колеса. Саме ділянки процесу, що відповідають осциляціям на ділянці  $x > 0$ , відповідають обертанню колеса в один бік, а ділянки  $x < 0$  – в інший. Видно, що напрямок обертання час від часу змінюється на протилежний, причому кількість обертів (осциляцій) в певному напрямку кожного разу змінюється хаотично.

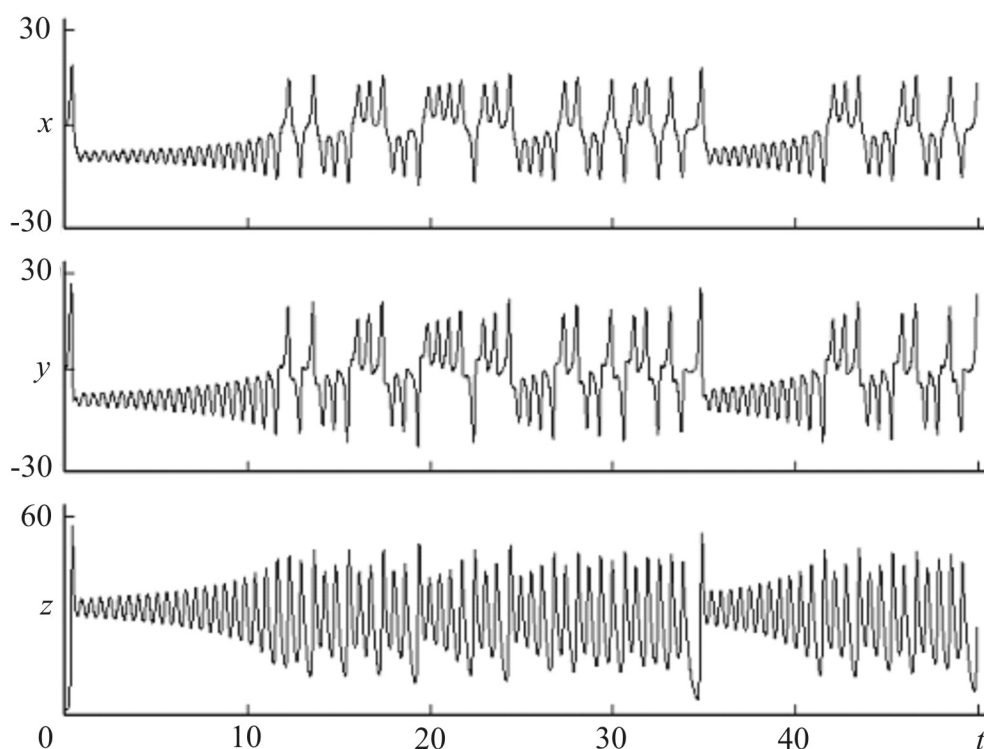


Рис. 12.17. Залежності динамічних змінних  $x$ ,  $y$ ,  $z$  від часу, отриманих числовим інтегруванням рівнянь Лоренца за  $\sigma = 10$ ;  $b = 8/3$ ;  $r = 28$

Фазовий портрет системи Лоренца показано на рис. 12.18. Як бачимо, фазова траєкторія зображає в просторі станів  $(x, y, z)$  певний об'єкт складної структури, схожий на моток ниток, причому не переплутаних, а акуратно укладених одна уздовж одної. Це утворення називають *дивним атрактором* або, у контексті цієї конкретної системи, *атрактором Лоренца*.

За вказаних класичних значень параметрів  $\sigma$ ,  $b$ ,  $r$  один і той самий сталий режим (принаймні, в сенсі усереднених статистичних характеристик і стаціонарності зовнішнього вигляду атрактора) виникає в системі Лоренца незалежно від вибору початкових умов.

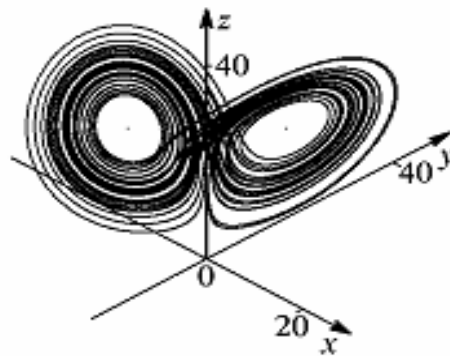


Рис. 12.18. Фазовий портрет атрактора Лоренца для класичного набору параметрів:  $\sigma = 10$ ;  $b = 8/3$ ;  $r = 28$

### 12.8.2. Аналітичне дослідження рівнянь Лоренца

Для досягнення повного розуміння особливостей системи Лоренца, звернемося до розгляду тих аспектів динаміки, які можна виявити за допомогою аналітичного дослідження.

**Симетрія.** Перш за все розглянемо симетрію рівнянь Лоренца – їх вигляд не зміниться, якщо одночасно змінити знаки  $x$  та  $y$ . Це означає, що будь-яке утворення у фазовому просторі або має ту саму симетрію, тобто перетворюється саме на себе під час заміни змінних  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ , або має таке саме утворення у вигляді симетричного партнера. З рис. 12.18 видно, що атрактор Лоренца має вказану симетрію.

**Обмеженість області, де може розташовуватися атрактор.** У фазовому просторі системи Лоренца можна вказати таку обмежену замкнену область, в яку фазові траєкторії можуть тільки входити і ніколи її не залишати. Для спрощення будемо використовувати форму рівнянь:

$$\dot{x} = \sigma(y - x); \quad \dot{y} = -y + xz; \quad \dot{z} = -bz + br - xy \quad (12.6)$$

Помножимо перше рівняння на  $x/\sigma$ , друге – на  $y$ , а третє – на  $z$  і складемо їх:

$$+ \begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) & \times x / \sigma \\ \dot{y} = -y + xz & \times y \\ \dot{z} = -bz + br - xy & \times z \end{cases} .$$

Результат перепишемо в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{x^2 / \sigma + y^2 + z^2}{2} \right) &= xy - x^2 - y^2 + xyz - bz^2 - xyz + brz = \\ &= - \left( x - \frac{1}{2} y \right)^2 - \frac{3}{4} y^2 - b \left( z - \frac{1}{2} r \right)^2 + \frac{1}{4} br^2. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Розглянемо в тривимірному просторі  $(x, y, z)$  область  $E$ , задану нерівністю  $-(x - (1/2)y)^2 - (3/4)y^2 - b(z - (1/2)r)^2 + (1/4)br^2 \geq 0$ . Вона обмежена поверхнею еліпсоїда з центром, зміщеним відносно початку координат. Поза цією областю права частина рівняння (12.7) негативна. Крім того, визначимо сімейство еліпсоїдів рівнянням  $x^2/\sigma + y^2 + z^2 = \text{const}$ , де наявна комбінація фігурує під знаком похідної в лівій частині рівняння (12.7). Виберемо значення константи таким, щоб отримати еліпсоїд  $S$ , який містить область  $E$ . Тоді на поверхні  $S$  маємо  $\frac{d}{dt}(x^2 / \sigma + y^2 + z^2) < 0$ , тобто величина  $(x^2/\sigma + y^2 + z^2)$  зменшується з часом. Це означає, що всі траєкторії, які перетинають поверхню  $S$ , прямують тільки всередину обмеженої області. Отже, яким би не був атрактор рівнянь Лоренца, він повинен розташовуватися всередині  $S$ .

**Дисипативність системи Лоренца.** Розглянемо векторне поле в тривимірному фазовому просторі, залежність трьох компонент якого від координат  $x, y, z$  задається правими частинами трьох рівнянь Лоренца:

$$L(x, y, z) = \{ \sigma(y - x); rx - y - xz; -bz + xy \}.$$

Згідно з рівняннями (12.5) векторне поле має сенс поля швидкостей у фазовому просторі: миттєва швидкість руху точки, що зображається в момент, коли вона має координати  $(x, y, z)$ , дається вектором  $\mathbf{L}$ . Обчислимо дивергенцію цього поля

$$\text{div} \mathbf{L} = \nabla \mathbf{L} = \frac{\partial L_x}{\partial x} + \frac{\partial L_y}{\partial y} + \frac{\partial L_z}{\partial z} = -\sigma - 1 - b.$$

Якщо параметри  $\sigma$  і  $b$  позитивні, то дивергенція стала і негативна. Розглянемо ансамбль однакових систем, кожна з яких

описується рівняннями Лоренца, і нехай вони відрізняються тільки початковими умовами. Уявімо, що в початковий момент хмара точок, які зображують стан систем ансамблю у фазовому просторі, займає деякий об'єм  $\Delta V$ . Тоді в процесі еволюції систем ансамблю об'єм хмари буде зменшуватися в часі за законом  $\Delta V = \Delta V_0 \exp(Dt)$ , де  $D = -\sigma - b - 1$ . З часом всі вони мають концентруватися на певній множині нульового об'єму, тому аттрактор повинен розміщуватися в обмеженій області фазового простору. Зазначимо, що проведені міркування не виключають можливості існування у згаданій обмеженій області декількох аттракторів.

**Нерухомі точки.** Знайдемо нерухомі точки системи рівнянь Лоренца. Це стани незмінні в часі, тобто похідні динамічних змінних за часом треба прирівняти до нуля. Отже, праві частини рівнянь теж мають перетворюватися в нуль. Отримаємо три алгебраїчні рівняння для трьох невідомих:

$$\sigma(y - x) = 0; \quad rx - y - xz = 0; \quad -bz + xy = 0.$$

З першого рівняння маємо  $y = x$ , тоді друге перепишемо у вигляді  $x(r - 1 - z) = 0$  і видно, що є дві можливості  $x = 0$  і  $z = r - 1$ . З третього рівняння отримуємо для першого випадку  $z = 0$ , а для другого  $x = \pm\sqrt{bz} = \pm\sqrt{r-1}$ , так що цей розв'язок існує лише коли  $r \geq 1$ . Отже, за  $r \leq 1$  є один стан рівноваги, розміщений на початку координат, а за  $r \geq 1$  – три стани рівноваги:

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 0;$$

$$x = \sqrt{r-1}; \quad y = \sqrt{r-1}; \quad z = r-1; \quad (12.8)$$

$$x = -\sqrt{r-1}; \quad y = -\sqrt{r-1}; \quad z = r-1, \quad (12.9)$$

які надалі позначатимемо відповідно  $O$ ,  $O_1$  і  $O_2$ .

З погляду фізичної інтерпретації в завданні про конвекцію, перша нерухома точка відповідає стану рівноваги і браку конвекційних потоків. Водяне колесо нерухоме, лазер не генерує сигнал. Другий і третій розв'язки відповідають наявності конвекційного потоку – обертання рідини, відповідно проти або за годинниковою стрілкою. Водяне колесо обертається в один або інший бік із постійною швидкістю. Лазер генерує сигнал постійної, незалежної від часу інтенсивності. Зазначимо, що друга і третя нерухомі точки рівнянь Лоренца можуть бути прикладом пари симетричних партнерів – вони переходять одна в одну за одночасної зміни знаків  $x$  та  $y$ .

**Аналіз нерухомих точок на нестійкість.** Розглянемо питання про те, за яких значень параметрів знайдені нерухомі точки є стійкими або нестійкими. Нехай  $(x_0, y_0, z_0)$  – нерухома точка, що нас цікавить.

Знайдемо розв'язання рівнянь Лоренца (12.6) у такому вигляді:

$$x(t) = x_0 + \tilde{x}(t); \quad y(t) = y_0 + \tilde{y}(t); \quad z(t) = z_0 + \tilde{z}(t),$$

де додатки, позначені тильдою, вважаються незначними. Нехтуючи квадратами та добутками малих додатків, з рівняння Лоренца отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \sigma(\tilde{y} - \tilde{x}); \\ \dot{\tilde{y}} &= r\tilde{x} - \tilde{y} - x_0\tilde{z} - \tilde{x}z_0; \\ \dot{\tilde{z}} &= -b\tilde{z} + x_0\tilde{y} + \tilde{x}y_0, \end{aligned}$$

де члени нульового порядку зникають за умови, що  $(x_0, y_0, z_0)$  є нерухомою точкою. На основі лінійного аналізу на стійкість припускаємо, що залежність збурень від часу експоненціальна  $x, y, z \sim \exp(\lambda t)$ . Тоді рівняння набувають вигляду задачі на власні числа матриці  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned} \lambda\tilde{x} &= \sigma(\tilde{y} - \tilde{x}) \\ \lambda\tilde{y} &= r\tilde{x} - \tilde{y} - x_0\tilde{z} - \tilde{x}z_0, \quad \text{або} \quad \lambda \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & -\sigma & 0 \\ r - z_0 & -1 - x_0 & \\ y_0 & x_0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} \\ \lambda\tilde{z} &= -b\tilde{z} + x_0\tilde{y} + \tilde{x}y_0 \end{aligned}$$

Умовою існування нетривіального роз'язку є рівність детермінанта матриці

$$\begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ -r + z_0 & \lambda + 1 & x_0 \\ -y_0 & -x_0 & \lambda + b \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$(\lambda + \sigma) \left[ (\lambda + 1)(\lambda + b) + x_0^2 \right] + \sigma \left[ (\lambda + b)(z_0 - r) + x_0 y_0 \right] = 0. \quad (12.10)$$

Для нерухомої точки  $O$ , розміщеної на початку координат, маємо

$$(\lambda + \sigma)(\lambda + 1)(\lambda + b) - \sigma x(\lambda + b) = 0,$$

або

$$(\lambda + b) \left[ \lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r) \right] = 0,$$

звідки знаходимо три корені:

$$\lambda_1 = -b; \quad \lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + 1)^2 + \sigma(r - 1)}.$$

Перше власне число завжди від'ємне. Друге та третє від'ємні лише тоді, коли  $r < 1$ ; якщо  $r > 1$ , одне з них стає додатнім. Отже, точка  $O$  стійка за  $r < 1$  і нестійка за  $r > 1$ . З точки зору класифікації нерухомих точок за  $r < 1$  це стійкий вузол, а за  $r > 1$  – сідло-вузол. Як зазначалось,  $r$  є відношенням числа Релея до його критичного значення. Отже, стаціонарний стан, який відповідає відсутності конвекційного

струму, стає нестійким у разі перевищення критичного значення  $r = 1$ . Цим прикладом було відтворено результат Релея.

Повернемося тепер до точок  $O_1$  і  $O_2$ , які існують, як було показано, за  $r > 1$ . Підставивши до рівняння (12.10)

$$x_0 = y_0 = \pm\sqrt{b(r-1)}, \quad z_0 = r-1,$$

після алгебраїчних перетворень отримаємо кубічне рівняння відносно  $\lambda$ :

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r-1) = 0. \quad (12.11)$$

Дослідження рівняння (12.11) показує, що за  $r$ , яке лише трохи перевищує одиницю, всі три власні числа  $\lambda$  від'ємні. Отже, нерухомі точки  $O_1$  і  $O_2$  є *стійкими вузлами*. Під час збільшення  $r$  з деякого моменту вони стають стійкими фокусами – одне власне число дійсне та від'ємне, а два інших комплексно зв'язані з від'ємною дійсною частиною. У разі подальшого збільшенні  $r$  дійсна частина змінює знак, це і є момент втрати стійкості стану  $O_1$  і  $O_2$  (за симетрією це здійснюється одночасно).

Знайдемо поріг втрати стійкості для досліджуваної нерухомої точки, якому відповідає перетворення дійсної частини в нуль. Підставимо в формулу (12.11)  $\lambda = i\omega$ :

$$-i\omega^3 - (\sigma + b + 1)\omega^2 + ib(\sigma + r)\omega + 2\sigma b(r-1) = 0,$$

і відокремимо дійсні та уявні частини:

$$-(\sigma + b + 1)\omega^2 + 2\sigma b(r-1) = 0;$$

$$\left[-\omega^2 + b(\sigma + r)\right]\omega = 0.$$

З першого рівняння маємо  $\omega^2 = 2\sigma b(r-1) / (\sigma + b + 1)$ .

Підставивши цей виразу у друге рівняння маємо  $\frac{-2\sigma b(r-1)}{(\sigma + b + 1) + b(\sigma + r)} = 0$ .

Виражаючи звідси  $r$ , знаходимо поріг стійкості:

$$r_\sigma = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}. \quad (12.12)$$

**Біфуркація в моделі Лоренца.** Розглянемо зміну динаміки системи Лоренца, якщо підтримувати постійними параметри  $\sigma = 10$  і  $b = 8/3$  і збільшувати, починаючи з нуля, параметр  $r$ . З погляду фізичної інтерпретації, це відповідає збільшенню ступеня підігріву або числа Релея в задачах конвекції, інтенсивності падаючого згори потоку моделі водяного колеса, інтенсивності накачки в лазері.

Зазначимо, за  $r < 1$  система Лоренца має стійку нерухому точку на початку координат – точку  $O$ . Це єдиний атрактор системи.

Якщо  $r > 1$ , стан рівноваги  $O$  стає нестійким – одне з трьох власних чисел є позитивним, тоді як два інших залишаються від’ємними. Якщо ввести невелике збурення, то точка, що його зображає, буде відхилятися від стану рівноваги уздовж деякої спеціальної тракторії, яку називають *нестійкою сепаратрисою* або *нестійким різноманіттям*. Це нестійке різноманіття *одновимірне* (деяка крива лінія), оскільки тільки одне власне число відповідальне за нестійкість. Із властивості симетрії випливає, що є дві гілки нестійкої сепаратриси  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$ , що розходяться від стану рівноваги  $O$  в різні боки (рис. 12.19 а).

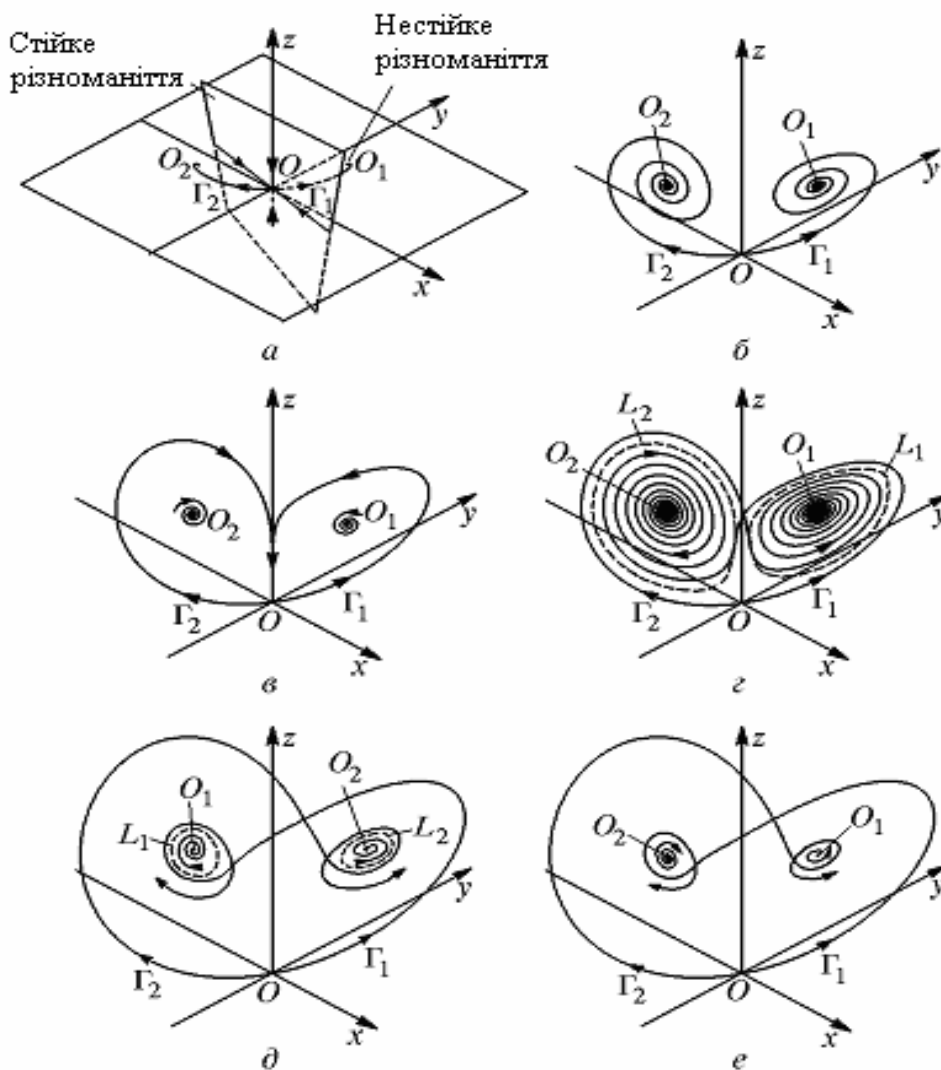


Рис. 12.19. Біфуркації в системі Лоренца за фіксованих  $\sigma = 10$  і  $b = 8/3$ , наявних у разі збільшення параметра  $r$  (позначення:  $O$  – нерухома точка на початку координат;  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  – дві гілки нестійкого різноманіття (сепаратриси);  $O_1$  і  $O_2$  – нерухомі точки;  $L_1$  і  $L_2$  – нестійкі замкнені орбіти)



Точка  $O$  має також *стійке різноманіття*. Воно *двовимірне*, оскільки *два* власні числа від'ємні і відповідають загасанню збурень. Сійке різноманіття є кривою поверхнею, під час старту з якої траєкторії переходять у стан рівноваги  $O$ .

Під час переходу  $r$  через одиницю, точка  $O$  перестає бути атрактором, і атракторами стають нерухомі точки  $O_1$  і  $O_2$ , які знову виникають (див. рівняння (12.8), (12.9)). Згідно з співвідношенням (12.12), вони залишаються стійкими за достатньо великих значень  $r$ . У задачах з конвекції, ці два атрактора відповідають станам з рівномірним обертанням рідини, відповідно проти або за годинниковою стрілкою. Зазначимо, що швидкість обертання рідини зростає зі збільшенням параметра  $r$ :  $x = \pm\sqrt{b(r-1)}$ .

Наявність двох атракторів означає утворення *бістабільності* – залежно від початкових умов, система набуває одного з двох можливих стійких режимів (у більш загальному випадку, коли атракторів більше одного, говорять про мультистабільність. Це одна з характерних і поширених властивостей нелінійних динамічних систем).

Сепаратриси  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  у тій області значень  $r$ , де нерухомі точки  $O_1$  і  $O_2$  є стійкими фокусами, показано на рис. 12.19 б. Фазові траєкторії наближаються до нерухомої точки по спіралі, що відповідає затухаючим осциляціям. Чим більший параметр  $r$ , тим більший початковий розмах цих осциляцій. За деякого значення  $r = 13,927$  з'ясовуємо, що сепаратриса, зробивши один оберт, повертається в точку  $O$  уздовж осі  $z$  (рис. 12.19 в). Про цю ситуацію говорять як про *петлю сепаратриси*. Це момент *нелокальної біфуркації*, коли відбувається перебудова структури потоку фазових траєкторій, яка не зводиться до локальних змін в околі якоїсь однієї точки фазового простору.

Перехід параметра  $r$  через вказане значення не відбивається на властивостях стаціонарних режимів, що відповідають атракторам  $O_1$  та  $O_2$ , за винятком, що після нього сепаратриса  $\Gamma_1$  прямує в точку  $O_2$ , сепаратриса  $\Gamma_2$  – в точку  $O_1$ . Це означає, що у разі встановлення режиму конвекції, починаючи від ситуації обертання з малою швидкістю, напрямок руху рідини у результаті змінюється на протилежний. Проте в глобальній структурі фазового простору відбуваються істотні зміни. По-перше, з кожної петлі сепаратриси утворюється замкнена траєкторія – нестійкий граничний цикл (штрихові криві  $L_1$  і  $L_2$  на рис. 12.19 з). По-друге, з'являється інваріантна множина  $\Omega_1$  – складна кількість траєкторій, що допускають кодування усіма нескінченими в обидва боки послідовностями двох символів. Проте ця множина  $\Omega_1$  не є такою, що притягує, вона

утворює дивний репеллер. Ще одна істотна нелокальна біфуркація відбувається за  $r \approx 24,06$ . Якщо до цього моменту сепаратриси  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  прямували в нерухомі точки  $O_2$  і  $O_1$ , то після біфуркації вони асимптотично наближаються до нестійких орбіт (рис. 12.19 *д*). З цього моменту замість множини  $\Omega_1$  виникає вже притягувальна множина складної структури. Це і є дивний атрактор Лоренца, що відповідає хаотичному режиму коливань. Зазначимо, проте, що стани  $O_1$  і  $O_2$  залишаються стійкими, до досягнення значення  $r = 24,71$  (співвідношення (12.12)). Отже, у проміжку  $r$  від 24,06 до 24,74 у системі співіснують три атрактора – дві нерухомі точки  $O_1$  і  $O_2$  і атрактор Лоренца. Нарешті, починаючи з  $r = 24,74$ , нерухомі точки втрачають стійкість і атрактор Лоренца залишається єдиним, що притягує множини (рис. 12.19 *е*).

Розглянутий процес ґрунтується на результатах Шильникова (1980), Каплана, Йорка (1979), і не вичерпує всього різноманіття феноменів, можливих у моделі Лоренца. Виявляється, що за дуже великих значень  $r$  система має простий регулярний режим автоколивання, якому у фазовому просторі відповідає граничний цикл. У разі зменшення параметра  $r$  можна спостерігати перехід до хаосу через послідовність біфуркації подвоєння періоду. В певних ділянках за параметром  $r$  реалізується перехід від періодичних до хаотичних режимів через переміжність.

Система Лоренца не передбачає квазіперіодичних автоколивань. Таким коливанням мав би відповідати атрактор у вигляді тора. Припустимо, що такий атрактор існує. Фазові траєкторії не можуть перетинати поверхню тора, вони можуть тільки наближатися до нього. Розглянемо ансамбль систем, точки яких заповнюють внутрішність тора. Будь-який елемент об'єму має зменшуватися внаслідок того, що в системі Лоренца дивергенція векторного поля постійна та від'ємна. З другого боку, об'єм внутрішності тора має залишатися постійним. Ці два висновки несумісні, тому маємо суперечність, і, отже, припущення про наявність атрактора у вигляді тора є хибним.

### Завдання

1. Числовими методами знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь Лоренца:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x); \\ \dot{y} &= 56x - y - xz; \\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}(z + 2\sin(2\pi t)) + xy.\end{aligned}$$

2. Числовими методами знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь Лоренца:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x); \\ \dot{y} &= x(r - z) - y; \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

із заданими параметрами  $\sigma = 10$  і  $b = 8/3$ , за різних значень параметра  $r = 0,3; 1,8; 3,7; 10; 16; 24,06$  та  $28$ .

## Розділ 13. ФРАКТАЛИ

### 13.1. Поняття «фрактал»

Поняття *фрактал* і *фрактальна геометрія* виникли в кінці 70-х років ХХ ст. Термін «фрактал» походить із латинського *fractus* – *зібраний із фрагментів*. Цей термін запропонував Бенуа Мандельброт у 1975 р. для позначення нерегулярних, але самоподібних структур. Зародження фрактальної геометрії пов'язують з виходом у 1977 р. книги Мандельброта «*The Fractal Geometry of Natur*». В його роботах використано наукові результати інших вчених, які працювали в період 1875-1925 рр. – Пуанкаре, Фату, Жюліа, Кантор, Хаусдорф. Але об'єднати їх роботи в єдину систему вдалося тільки тепер.

Наведемо визначення фрактала за Мандельбротом: «*фракталом називають структуру, яка складається з частин, які в деякому сенсі подібні цілому*».

Однією з основних властивостей фракталів є самоподібність. У найпростішому випадку невелика частина фрактала містить інформацію про весь фрактал. Найбільш відомими фрактальними об'єктами, які з'явилися задовго до самого слова «фрактал», можна вважати криву Коха (аналог у природі – сніжинка), трикутну й універсальну криву Серпинського, фігуру Ліхтенберга, яка з'являється у вигляді візерунка на пластинці діелектрика після його пробою.

Фігури Ліхтенберга – картина розподілення іскрових каналів, розміщених на поверхні твердого діелектрика під впливом ковзного *іскрового розряду*. Вперше подібні розряди спостерігав Г. К. Ліхтенберг у 1777 р. У сильному розряді високий тиск і температура в іскрових каналах деформують поверхню діелектрика, утворюючи фігури Ліхтенберга. За малих розрядів ці фігури відповідають вибірковій поляризації діелектрика, їх можна зробити помітними, посипавши поверхню діелектрика спеціальним порошком або проявивши фотопластинку, підкладену під час розряду під шар діелектрика. Фігури Ліхтенберга біля анода і катода дуже відрізняються за зовнішнім виглядом (рис. 13.1); тому за їх допомогою можна встановити, від якого з цих електродів утворювались іскрові канали (полярність іскрового розряду).

Важливу роль фрактали відіграють у машинній графіці. Вони стають у нагоді, наприклад, коли необхідно за допомогою декількох коефіцієнтів задати лінії на поверхні дуже складної форми. З погляду машинної графіки, фрактальна геометрія незамінна під час генерації штучних хмаринок, скель, поверхні моря.

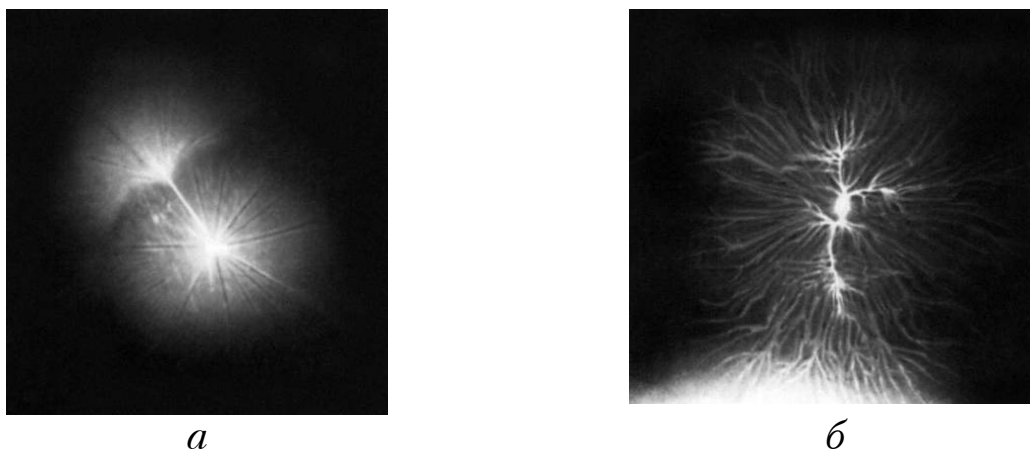


Рис. 13.1. Фігури Ліхтенберга:  
*a* – для негативного заряду; *б* – для позитивного заряду

## 13.2. Класифікація фракталів

### 13.2.1. Геометричні фрактали

Фрактали цього класу найбільш наочні. В двовимірному випадку їх отримують за допомогою певної ламаної (або поверхні в тривимірному випадку), яку називають *генератором*. За один крок алгоритма кожен із відрізків, які становлять ламану, замінюються на ламану-генератор у відповідному масштабі. У результаті нескінченного повторення цієї операції утворюється геометричний фрактал.

Одним із стандартних прикладів фракталів цього класу є тріадна крива Коха. Побудову кривої Коха починають із прямолінійного відрізка одиничної довжини  $L(1) = 1$ . Цей вихідний відрізок називають *затравкою* і його можна замінити будь-яким багатокутником, наприклад рівностороннім трикутником, квадратом.

**Затравка** – це нульове покоління кривої Коха. Побудова кривої Коха продовжується: кожна ланка затравки замінюється утворювальним елементом, який позначений на рис. 13.2 через  $n$ ,  $n = 1$ . У результаті такої заміни отримуємо перше покоління – криву з чотирьох прямолінійних ланок довжиною по  $1/3$  кожна. Довжина всієї кривої першого покоління становить  $L(1/3) = 4/3$ . Наступне покоління отримуємо замінивши кожен прямолінійну ланку зменшеним утворювальним елементом. У результаті отримуємо криву другого покоління, яка складається з  $N = 4^2 = 16$  ланок, довжиною  $\delta = 3^{-2} = 1/9$  кожна. Довжина кривої другого покоління становить  $L(1/9) = (4/3)^2 = 16/9$ . Замінюючи всі ланки попереднього покоління кривої зменшеним утворювальним елементом, отримуємо нове

покоління кривої. Якщо  $n$  спрямоване до нескінченності, крива Коха стає фрактальним об'єктом.

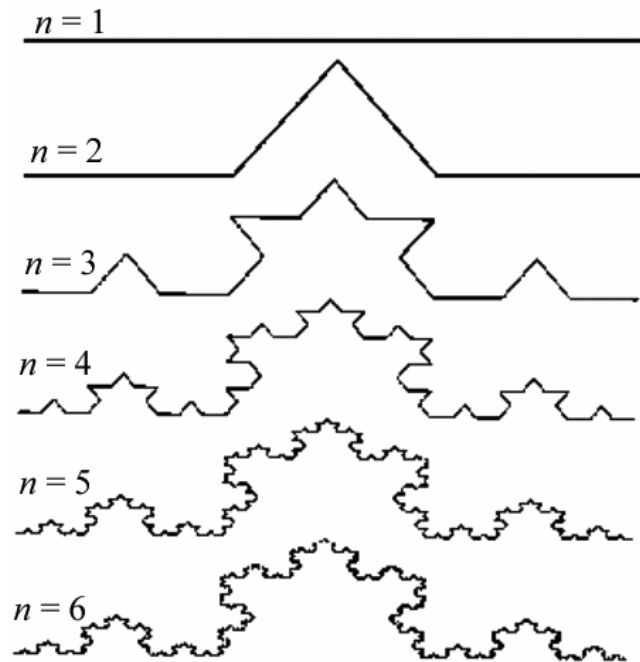


Рис 13.2. Побудова тріадної кривої Коха

### 13.2.2. Алгебраїчні фрактали

Алгебраїчні фрактали – це найбільша група фракталів. Отримують їх за допомогою нелінійних процесів в  $n$ -вимірних просторах. Найкраще вивчені двовимірні процеси. Визначаючи нелінійний ітераційний процес як дискретну динамічну систему, використовують термінологію теорії нелінійної динаміки: *фазовий портрет, стабільний аттрактор* тощо.

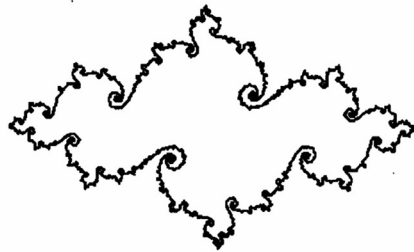
Відомо, що нелінійні динамічні системи мають декілька стійких станів. Той стан, в якому опинилась динамічна система після деякої кількості ітерацій, залежить від її початкового положення, тому кожен стійкий стан (або аттрактор) має деяку область початкових станів, з яких система обов'язково опиниться в розглянутих кінцевих станах. Тому фазовий простір системи поділяють на *області притягання* аттракторів. Якщо фазовим є двовимірний простір, то розфарбовуючи області притягання різними кольорами, можна отримати *кольоровий фазовий портрет* цієї системи (ітераційного процесу). Змінюючи алгоритм вибору кольору, можна отримати складні фрактальні картини з примхливими багатокольоровими візерунками (рис. 13.3).

Класичними прикладами алгебраїчних фракталів є множини Жюліа та Мандельброта, які отримують за допомогою простої

ітераційної функції

$$z_{n+1} = z_n + c, \quad (13.1)$$

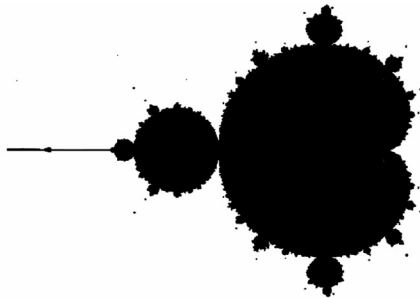
де  $z$  – комплексна функція двох змінних  $x$  та  $y$ ;  $c$  – комплексне число ( $a$  та  $b$  – дійсні числа);  $n = 0; 1; 2\dots$  – натуральні числа;  $z = x + iy$ ;  $c = a + ib$ .



*a*



*б*



*в*



*г*

*Рис. 13.3.* Множини Жюліа та Мандельброта: *a* – зв'язана множина Жюліа для  $z^2 - 0,7382 + 0,0827i$ ; *б* – незв'язана множина Жюліа для  $z^2 + 0,50$ ; *в* – множина Мандельброта для  $z^2 + c$ ; *г* – фрагмент множини Мандельброта для  $z^2 + c$  під час кольорового кодування значень точок  $z_n$

Поведінка послідовності функції (13.1) залежить від параметра  $c$  і початкової точки  $Z(0)$ . Якщо зафіксувати  $c$  і змінювати  $Z(0)$  у полі комплексних чисел, то отримаємо множину Жюліа, а якщо зафіксувати  $Z(0) = 0$  і змінювати параметр  $c$ , то матимемо множину Мандельброта.

Якщо взяти  $Z(0)$  далеко від нуля, то послідовність буде швидко прямувати до нескінченності. Це відбувається також і тоді, коли точка  $Z(n)$  для деякого  $n$  знаходиться далеко від нуля. Але існують і такі значення  $Z(0)$ , для яких послідовність  $Z_n$  ніколи не віддаляється, а завжди залишається обмеженою.

Математичне визначення множини Жюліа формулюють так: множина Жюліа функції  $f$ , яку позначають  $J(f)$ , визначають як

$$J(f) = \partial \{z : f^{(n)} \rightarrow \infty \text{ за } n \rightarrow \infty\}.$$

Отже, множина Жюліа функції  $f$  є межа множини точок  $z$ , які прямують до нескінченності під час ітерування функції  $f(z)$ .

Для множини Мандельброта  $M$  для полінома  $f_c(z) = z^2 + c$  визначається як множина всіх  $c \in \mathbb{C}$ , для яких орбіта нульової точки обмежена:

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : \left\{ f_c^{(n)}(0) \right\}_{n=0}^{\infty} \text{ обмежена} \right\},$$

чи

$$M = \left\{ c \in \mathbb{C} : f_c^{(n)}(0) \neq \infty \text{ за } n \rightarrow \infty \right\}.$$

Вигляд множини Жюліа і Мандельброта суттєво залежить від вибору параметра  $c$  чи початкової точки  $Z(0)$  відповідно. Змінюючи ці параметри, можна отримати неймовірну різноманітність цих множин.

Є два основні типи множини Жюліа: деякі з них є цілісними (зв'язані множини), а інші є хмарами з точок (Канторові чи незв'язані множини) (рис. 13.3).

### 13.2.3. Стохастичні фрактали

Ще одним відомим класом фракталів є стохастичні фрактали, які можна отримати лише тоді, коли в ітераційному процесі випадково змінюються будь-які параметри. У цьому разі отримуємо об'єкти дуже схожі на природні несиметричні дерева, порізані берегові лінії та ін. Двовимірні стохастичні фрактали використовують під час моделювання рельєфу місцевості й поверхні моря (рис. 13.4).

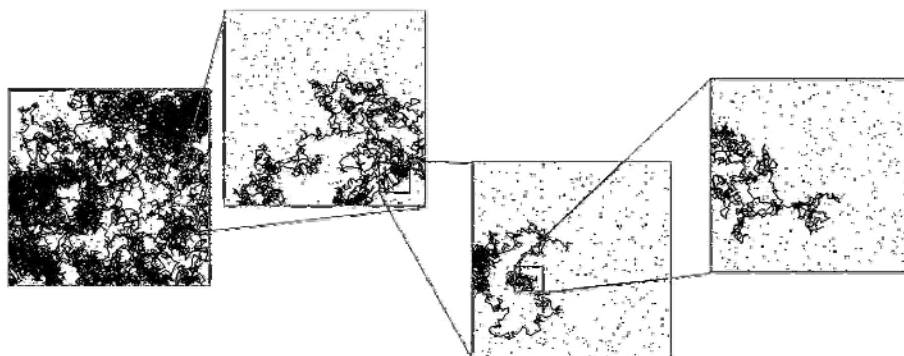


Рис. 13.4. Особливий вид стохастичних фракталів (фрактальні кластери) (класична модель для дослідження цих видів структур: модель агрегації, обмеженої дифузією (*diffusion limited aggregation*, DLA) описує агрегацію частинок в умовах їх випадкового руху (Witten, Sander, 1981; Сандер 1987)



Стохастичні фрактали часто отримують за допомогою додавання деякого випадкового параметра в детермінований фрактал, що найчастіше трапляється в природі (рис. 13.5).

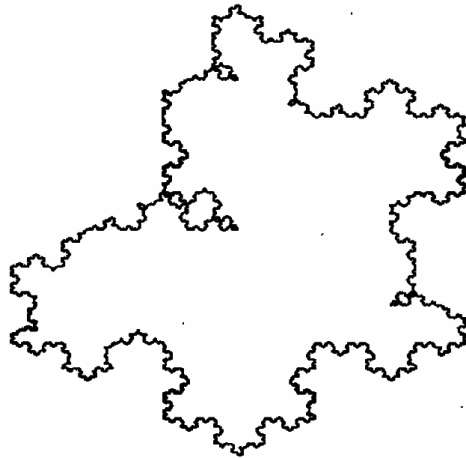


Рис. 13.5. Рандомізована крива Коха

Існують й інші класифікації фракталів, наприклад, ділення фракталів на детерміновані (алгебраїчні та геометричні) і недетерміновані (стохастичні).

#### 13.2.4. Самоподібність і фрактальна розмірність

Поділимо відрізок прямої на  $N$  рівних частин. Кожну частину можна вважати копією всього відрізка, зменшеною в  $1/r$  раз. Отже,  $N$  і  $r$  пов'язані співвідношенням  $Nr = 1$  (рис. 13.6). Якщо квадрат розділити на  $N$  рівних квадратів (з площею в  $1/r^2$  разів меншою за площу вихідного квадрата), то співвідношення матиме вигляд  $Nr^2 = 1$ . Якщо куб розділити на  $N$  рівних кубів (з об'ємом, в  $1/r^3$  разів меншим за об'єм вихідного квадрата), то співвідношення матиме такий вигляд  $Nr^3 = 1$ . Помітно, що розмірність об'єкта будь-то одновимірний відрізок, двовимірний квадрат або тривимірний куб, визначається степенем  $r$  у співвідношенні між  $N$ , та кількістю рівних підоб'єктів з коефіцієнтом подібності  $r$ , а саме

$$Nr^d = 1. \quad (13.2)$$

Множини, побудовані на рис. 13.6, мають цілу розмірність. Виникає питання, чи можлива така побудова, за якої показник  $d$  в формулі (13.2) не є цілим, тобто таким, що під час поділу вихідної множини на  $N$  підмножин, що не перетинаються, отриманих масштабуванням оригіналу з коефіцієнтом  $r$ ? Таку множину називають *самоподібним фракталом*. Величину  $d$  називають *фрактальною (дробною) розмірністю* або *розмірністю подібності*. Вираз для значення  $d$  через величини  $N$  та  $r$  знаходимо логарифмуванням обох

частин формули (13.2):

$$d = \frac{\log N}{\log 1/r}$$

Логарифм можна взяти за будь-якої додатної основи, відмінної від одиниці, наприклад з основою 10 або з основою  $e = 2,7183$ .

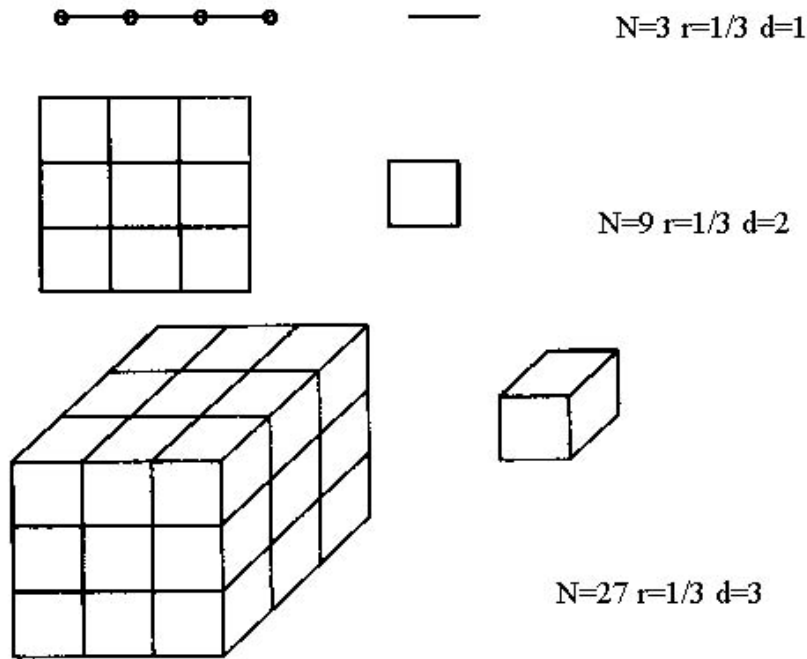


Рис. 13.6. Розмірність простих геометричних фігур

У загальному випадку коефіцієнти подібності не обов'язково однакові для всіх підмножин фрактала.

Зауважимо, що деякі множини цілої розмірності також є фракталами.

Для прикладу існування дробної розмірності наведемо вже частково розглянуту сніжинку Коха та килим Серпинського.

**Сніжинка Коха.** Границя сніжинки, вигаданої Гельге фон Кохом у 1904 р. (рис. 13.2.), описується кривою, яка складається з трьох однакових фракталів розмірністю  $d = 1,2618$ . Кожна третина сніжинки будується ітеративно, починаючи з одної зі сторін рівностороннього трикутника. Нехай  $L_0$  – початковий відрізок. Заберемо середню частину і додамо два нових відрізки такої самої довжини, як показано на рис. 13.7. Назвемо отриману множину  $L_2$ . Повторимо цю процедуру багаторазово, на кожному кроці замінюючи середню третину двома новими відрізками. Позначимо через  $L_n$  фігуру, отриману після  $n$ -го кроку.

Інтуїтивно зрозуміло, що послідовність кривих  $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$  зводиться до деякої граничної кривої  $L$ . Розглянемо деякі її властивості. Якщо взяти копію  $L$ , зменшену в три рази ( $r = 1/3$ ), то всю множину  $L$  можна зібрати з  $N = 4$  таких копій. Отже, співвідношення самоподібності за формулою (13.2) виконується за вказаних  $N$  і  $r$ , а розмірність фрактала

$$d = \log(4)/\log(3) = 1,2618.$$

Також важливою властивістю, яку має границя сніжинки Коха – її нескінченна довжина. Зазвичай гладкі або хоча б частково гладкі криві завжди мають кінцеву довжину (можна перекопатися інтегруванням). Мандельброт опублікував низку робіт, в яких досліджував питання про вимірювання довжини берегової лінії Великобританії. За модель він використовував фрактальну криву, яка нагадувала границю сніжинки за винятком, що в неї ввели елемент випадковості, який враховував випадковість у природі. У результаті виявилось, що крива, яка описує берегову лінію, має нескінченну довжину.

Нехай вихідний відрізок  $L_0$  має одиничну довжину, тоді довжина кривої  $L_1$  становить  $4/3$ , а довжина  $L_2$  –  $16/9$ . Продовжуючи отримуємо, що крива  $L_n$  після  $n$ -го кроку має довжину  $4^n/3^n$ . Отже, довжина граничної кривої  $L$  дорівнює нескінченності:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n / 3^n = \infty.$$

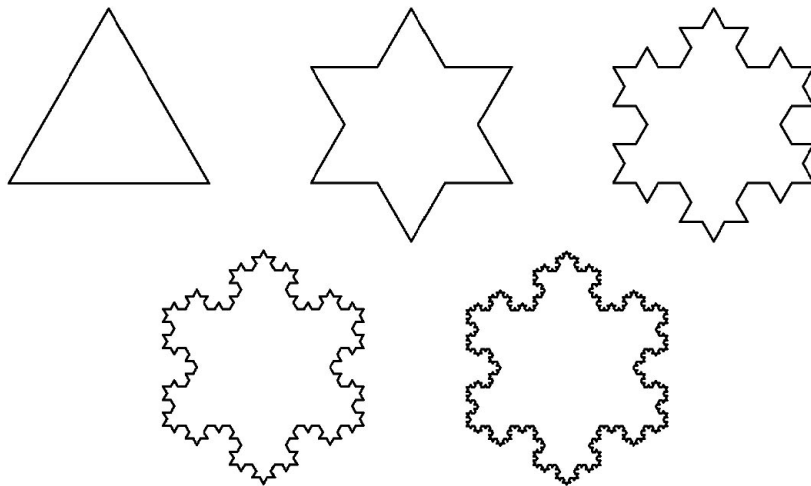


Рис. 13.7. Сніжинка Коха

**Килим Серпинського.** Ще один приклад простого самоподібного фрактала – килим Серпинського (рис. 13.8), вигаданий польським математиком Вацлавом Серпинським у 1915 р. Термін «килим» (*gasket*) належить Мандельброту. Спосіб побудови розпочинається з деякої області, звідки послідовно прибираємо внутрішні підобласті.

Нехай початкова множина  $S_0$  – рівносторонній трикутник разом з областю, яку він замикає. Розділимо  $S_0$  на чотири менші трикутні області, з'єднавши відрізками середини сторін вихідного трикутника. Видалимо вміст маленької центральної трикутної області. Назвемо область, яка залишилась  $S_1$  (рис. 13.8). Потім повторимо процес для кожного із трьох маленьких трикутників, що залишилися, і отримаємо наступне наближення  $S_2$ . Продовжуючи цей процес, отримуємо послідовність вкладених множин  $S_n$ , їхній перетин і утворює килим  $S$ .

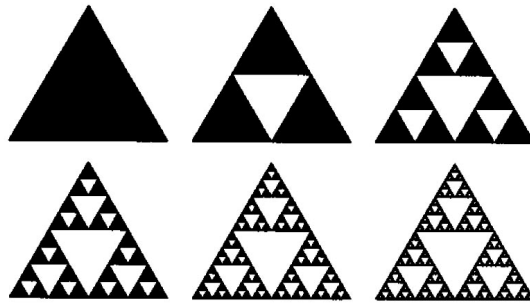


Рис. 13.8. Побудова килима Серпинського

Із побудови видно, що весь килим є об'єднанням значення  $N = 3$  зменшених в два рази копій, які не перетинаються; коефіцієнт подібності  $r = 1/2$  (як по горизонталі, так і по вертикалі). Отже,  $S$  – самоподібний фрактал з розмірністю

$$d = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx 1,5850.$$

Очевидно, що сумарна площа частин, викинутих під час побудови, дорівнює площі вихідного трикутника. На першому кроці було видалено  $1/4$  частину площі, на наступному кроці – три трикутники, причому площа кожного дорівнює  $1/4^2$  площі вихідного, тому повна частина видаленої площі становить

$$\frac{1}{4} + 3\left(\frac{1}{4^2}\right) + 3^2\left(\frac{1}{4^3}\right) + \dots + 3^{n-1}\left(\frac{1}{4^n}\right) + \dots$$

Якщо  $n = \infty$ , ця сума дорівнює одиниці. Отже, можна стверджувати, що множина  $S$ , яка залишилась, тобто килим, має площу міри нуль.

**Фрактали з цілою розмірністю.** Фрактальна розмірність не завжди дробна. Таке явище спостерігають, коли для побудови фрактала використовують декілька коефіцієнтів подібності. Як приклад, наведемо фрактал – модифікований трикутний невід, де фрактальна розмірність  $d = 2$  (рис. 13.9). Для побудови цієї фігури

використовують утворений елемент, наведений у лівому верхньому куті (рис. 13.9), який покриває одиничний відрізок і перетворюється з двома коефіцієнтами подібності: довгий катет змінюється з коефіцієнтом подібності  $r_1 = 2/\sqrt{5}$ , короткий –  $r_2 = 1/\sqrt{5}$ . У цьому разі вже не можна використовувати формулу (13.1). Мандельброт визначив розмірність подібності  $d$  як таку, для якої виконується співвідношення:

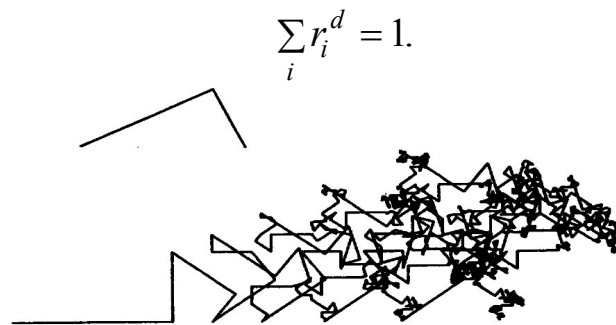


Рис. 13.9. Модифікований трикутний невід (фрактальна розмірність  $d = 2$ )

Слід зауважити, що для розглянутого фрактала властиве утворення «кластерних» структур, подібних до стохастичного фрактала для броунівського руху частинки (рис. 13.9).

### 13.3. Довжина берегової лінії. Периметри фракталів

Встановимо наскільки велика довжина берегової лінії, наприклад, Норвегії (рис. 13.10). Спочатку з'ясуємо, чи потрібно брати до уваги острови і річки; в якому місці фіорд перестає бути фіордом і де саме він переходить у річку. Якщо взяти в розрахунки ці й подібні об'єкти, одна складність все ж залишається, тобто якщо взяти курвіметр і надто малий масштаб карти, то найглибші фіорди не враховуватимуться, тоді довжину берегової лінії позначимо як величину  $L$ . А якщо обрати більший масштаб карти, то у довжину берегової лінії увійшли б найглибші фіорди. Для більш точного підрахунку довжини берегової лінії знадобились би такі карти, якими користується населення для вирішення питань про те, де має проходити огорожа між земельними ділянками. Зрозуміло, що уточнення можна вносити нескінченно. Кожного разу зі збільшенням роздільної здатності, довжина берегової лінії буде зростати, крім того будуть виникати проблеми з островами і річками.

Альтернативний спосіб вимірювання довжини берегової лінії полягає у тому, щоб нанести на карту сітку, як показано у верхній частині рис. 13.10 *a*. Нехай квадратні комірки сітки мають розміри  $\delta \times \delta$ .

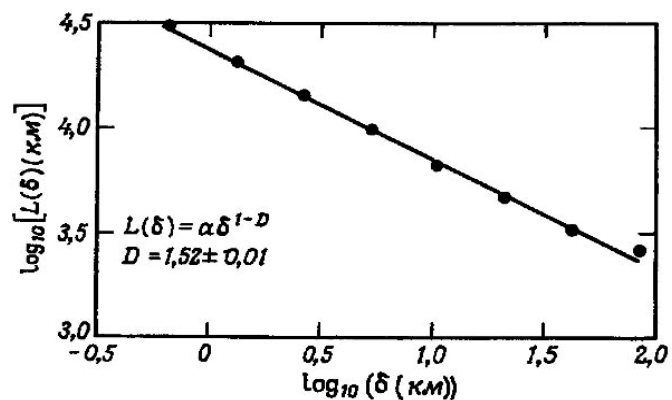
Кількість  $N(\delta)$  таких комірок, необхідних щоб покрити берегову лінію на карті, приблизно дорівнює кількості кроків, за які можна пройти по карті вздовж берега лінійними відрізками довжиною  $\delta$ . Зменшення  $\delta$  приводить до збільшення кількості комірок, необхідних для покриття берегової лінії. Якби берегова лінія Норвегії мала визначену довжину  $L_n$ , то можна було б сподіватися, що кількість квадратних комірок  $N(\delta)$ , потрібних для покриття берегової лінії на карті, буде обернено пропорційною  $\delta$ , а величина  $L(\delta) = N(\delta)\delta$  зі зменшенням  $\delta$  буде прямувати до сталої  $L_n$ . Але сподівання не справджуються. Як показано на рис. 13.10, зі зменшенням довжини  $\delta$  кроку вимірювання довжини збільшується. Графік на цьому рисунку виконаний у подвійному логарифмічному масштабі й показує, що зі зменшенням  $\delta$  виміряна довжина берегової лінії не прямує до сталої величини. Навпаки, вимірювану довжину описують наближеною формулою

$$L(\delta) = a\delta^{1-d}.$$

Для звичайної кривої можна було б сподіватися, що  $a = L_n$  (принаймні за достатньо малих  $\delta$ ) і показник  $d$  дорівнює одиниці. Але для берегової лінії Норвегії, як видно з графіка (рис. 13.10),  $d \approx 1,52$ . Берегова лінія – фрактал із фрактальною розмірністю  $d$ .



а



б

Рис. 13.10. Визначення довжини берегової лінії: а – берегова лінія Норвегії; б – виміряна довжина берегової лінії як функція кроку  $\delta$  (км) – довжини сторони  $\delta \times \delta$  квадратних комірок, що покривають берегову лінію на карті

Аналогічна залежність властива і для інших країн (рис.13.11) Кутовий коефіцієнт цих прямих становить  $1-d$ , де  $d$  – фрактальна розмірність.

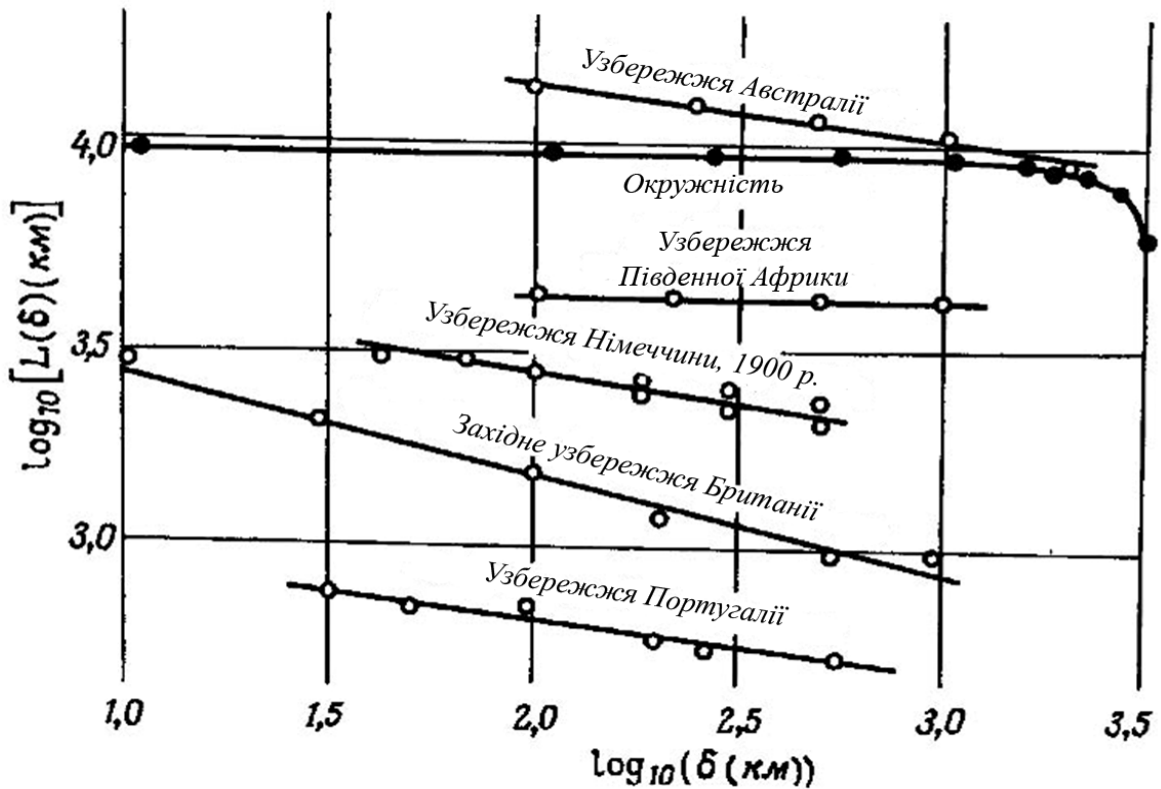


Рис. 13.11. Довжина берегової лінії як функція кроку  $\delta$  (км) – довжина сторони  $\delta \times \delta$  квадратних комірок, що покривають берегову лінію на карті

**Гра в хаос.** Розглянемо гру, яку М. Барнслі назвав грою в хаос (*chaos game*). Візьмемо рівносторонній трикутник з вершинами в точках  $A$ ,  $B$  і  $C$  (рис. 13.12). Довільно виберемо у середині цього трикутника початкову точку. Кинемо тепер гральний кубик, на шести гранях якого проставлені букви  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Нехай кожна буква наявна на двох з них, тоді ймовірність випадання будь-якої букви однакова і дорівнює  $1/3$ .

Припустимо, що першого разу випала буква  $A$ . З'єднаємо подумки початкову точку з вершиною трикутника  $A$  відрізком прямої і на його середині поставимо точку (рис. 13.12 *a*). Тепер нова точка виконуватиме роль початкової. Після цього повторимо киданням кубика, проставляючи точки у середині відповідного відрізка. Припустимо, на другому кроці випала буква  $C$ , на наступних  $B$ , і знову  $C$  і т. д. У результаті на кожному кроці будемо отримувати все нові й нові точки. Виникає питання, як розподіляться ці точки всередині трикутника після достатньо великої кількості кроків?

Результати цієї гри відповідно з 5 000, 10 000 і 50 000 точок показано на рис. 13.12 (зліва направо). Зі збільшенням кількості точок все виразніше проявляється структура килима Серпинського.

Видно, що хоча кожного разу вибір вершини трикутника відбувається суто випадково, розподілення точок на площині зовсім не випадкове і має яскраво виражену фрактальну структуру.

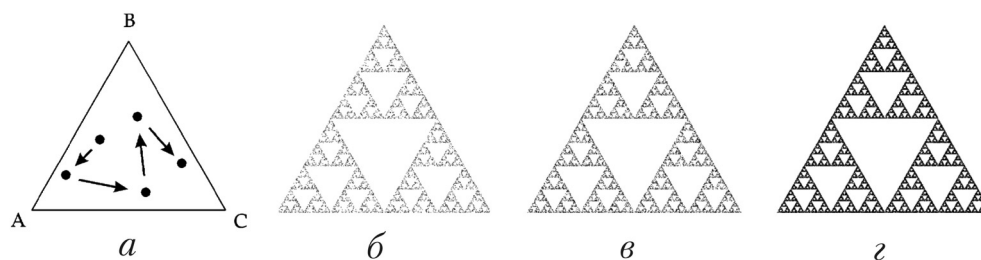


Рис. 13.12. Побудова килима Серпинського за алгоритмом гри в хаос:

- a* – випадкове визначення координати точок;
- б* – просторове розподілення точок після 5 000 ітерацій;
- в* – просторове розподілення точок після 10 000 ітерацій;
- г* – просторове розподілення точок після 50 000 ітерацій

Аналогічним способом можна побудувати багато інших фракталів.

**Мультифрактали.** Фрактали неймовірно збільшили можливості опису природи. Абстрактні конструкції Кантора, Коха, Больцано забезпечили нас моделями набагато реалістичнішими, ніж Евклідова геометрія. Проте у фізиці, хімії, геології (і в деяких інших науках) трапляється багато явищ, для яких потрібно розширити поняття фрактала на складніші структури. Для повної характеристики цих неоднорідних об'єктів потрібна вже не одна, на відміну від регулярних фракталів, а цілий спектр фрактальних розмірностей, кількість яких у загальному випадку нескінченна. Причина цього полягає у тому, що разом із суто геометричними характеристиками, які визначаються розмірністю Хаусдорфа, такі фрактали мають деякі статистичні властивості.

Багато дивних аттракторів нелінійних динамічних систем також мають яскраво виражену мультифрактальну структуру.

Найпростіше пояснити, що є мультифракталом (неоднорідним фракталом) на прикладі трикутника Серпинського, отриманого за допомогою методу випадкових ітерацій (рис. 13.13).

Система проітерованих функцій для цього фрактала складається з трьох рівноймовірних лінійних перетворень (імовірність =  $1/3$ ). Перерозподілимо ймовірність так: на одне перетворення нехай доведеться 90 %, на інші два по 5 %, тобто отримаємо трикутник Серпинського, точки якого розподілені нерівномірно. Велика кількість точок зібрана біля однієї вершини, тоді як біля інших вершин їх мало. Проте, фрактальна розмірність цього об'єкта дорівнює фрактальній розмірності класичного трикутника Серпинського (тобто з рівноймовірними перетвореннями) і становить  $d = \ln 3 / \ln 2$ . Такий збіг і



примушує займатися пошуком нових характеристик, які відрізняли б нерівномірний розподіл від рівномірного. Для цього, крім узагальненої фрактальної розмірності, доцільно використовувати інші – інформаційну фрактальну розмірність, кореляційну фрактальну розмірність, ентропію та багато інших характеристик.

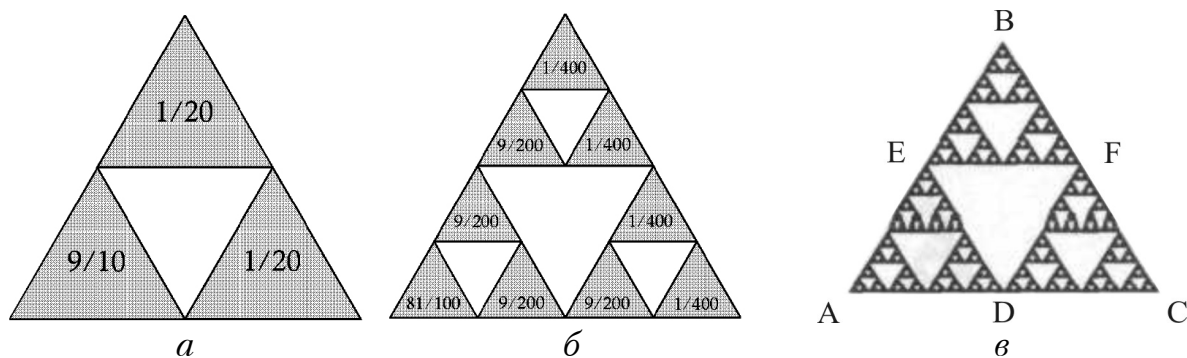


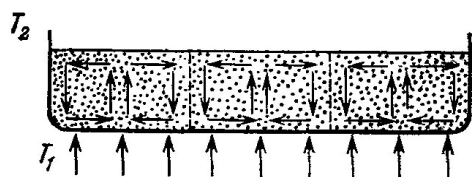
Рис.13.13. Мультифрактальний трикутник Серпинського: *a*, *б* – принципи побудови мультифрактального трикутника Серпинського й імовірність розподілення точок; *в* – результат побудови мультифрактального трикутника Серпинського за допомогою алгоритму гри в хаос

### 13.4. Фрактали та самоорганізація в природі

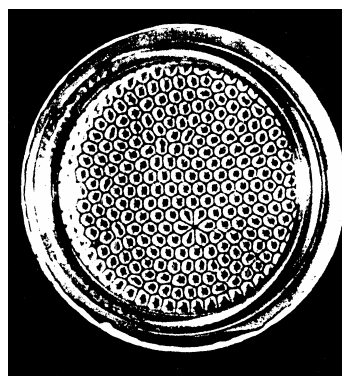
Теоретичну можливість виникнення коливального, періодичного режиму в хімічних і біологічних системах довів у 1910 р. А. Лотка. У 1937 р. Колмогоров математично описав виникнення подібних неоднорідностей. Математичний доказ виникнення неоднорідності – структуризації, порушення просторової симетрії в початково однорідній системі – навів А. Тьюрінг (1952 р.). Реакційно-дифузійний механізм виникнення неоднорідностей, теоретично описаний Тьюрінгом, був основою великого сімейства моделей біологічного морфогенезу.

**Морфогенез** – (від гр. *morphe*) – вигляд, форма, генез, морфогенія, формоутворення (біологічне), виникнення і розвиток органів, систем і частин тіла організмів як в індивідуальному, так і в історичному, або еволюційному розвитку.

Класичним прикладом може слугувати поява *комірок Бенара* – поява складної просторової організації з узгодженим, когерентним переміщенням множини молекул і утворенням конвективних комірок у формі геометричних вельми правильних шестигранних структур у підігрій знизу достатньо в'язкій рідині, наприклад, у шарі силіконового масла (рис. 13.14).



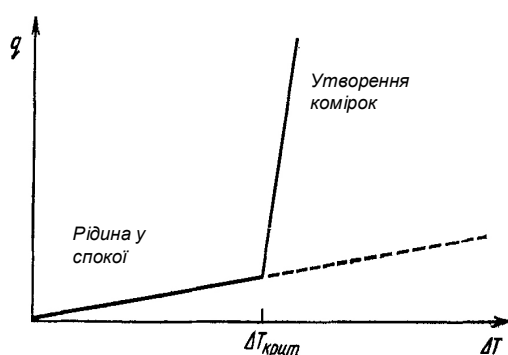
*a*



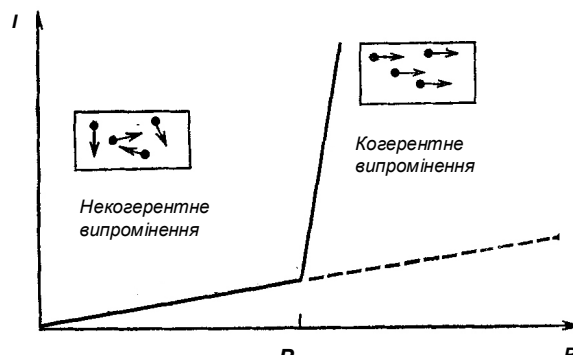
*б*

Рис. 13.14. Комірки Бенара: *a* – схематичне зображення виникнення конвекційних комірок ( $T$  – температура;  $T_2 < T_1$ ); *б* – фотографія (вид зверху) комірок Бенара

Виникнення комірок Бенара відбувається за умови, що градієнт температур  $\Delta T = T_1 - T_2$  перевищує деяке критичне значення для цієї рідини  $\Delta T_{\text{крит}}$ . Наявність подібних точок біфуркації взагалі властива для самоорганізації як біологічним, так і фізичним структурам та системам (рис. 13.15).



*a*



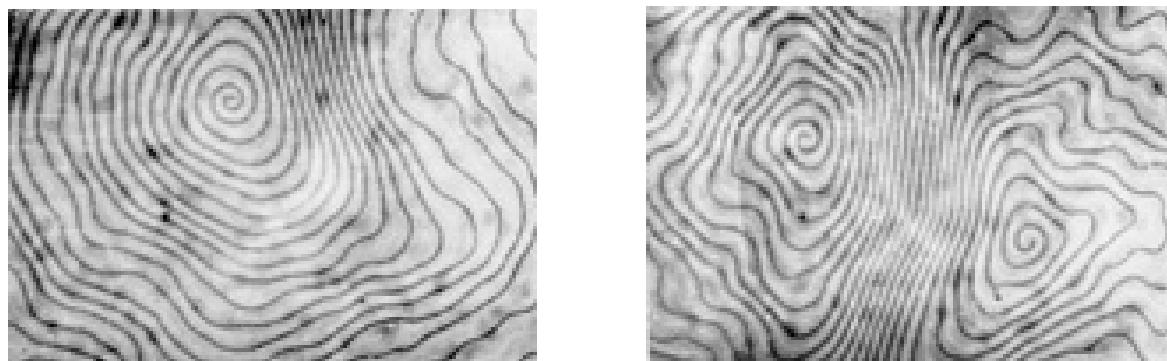
*б*

Рис. 13.15. Наявність точок біфуркації під час самоорганізації: *a* – потік тепла ( $q$ ) у разі докритичних і надкритичних значень температури й умова виникнення комірок Бенара; *б* – генерація лазерного випромінювання ( $I$  – інтенсивність випромінювання) залежно від потужності накачки ( $P$ )

Слід зауважити, що за сучасними уявленнями, організм людини чи будь-який інший біологічний об'єкт є фрактальною структурою, для якої утворювальним елементом є материнська клітина. Всі клітини організму подібні одна до одної, змінюються чи масштабуються. «Афінним перетворюванням» підлягають лише деякі структурно-функціональні властивості, що приводить до спеціалізації клітин. Саме такий погляд на біологічні об'єкти пояснює, як одна молекула ДНК може закодувати розвиток та структуру всього організму.

Завдяки цьому об'єм інформації, необхідний для відтворення хоча б однієї елементарної біологічної структури (наприклад клітини) різко скорочується – ДНК необхідно лише запам'ятати деяку основоположну структуру та правило її перетворення. Такі перетворення потребують певного часу, тому повне відтворення біологічного об'єкта з материнської клітини потребує годин, днів, місяців та років залежно від складності повної структури. Саме тому використання фрактальної геометрії в техніці, наприклад, під час розробки комп'ютерних ігор, передачі інформації каналами зв'язку тощо, потребує відносно швидких обчислювальних можливостей на тлі суттєвого зменшення вихідної інформації.

Наведемо еволюцію спіральної доменної структури в ультратонкому шарі магніто-одноосьового кристала за одну хвилину під дією зовнішнього змінного магнітного поля 300 Гц (рис. 13.16).



*Рис. 13.16.* Динамічна фрактальна структура

Отже, розглянувши біологічні об'єкти чи інші реальні фізичні системи як фрактальні структури слід зазначити, що здебільшого структури необхідно розглядати як динамічні системи, правила перетворення утвореного елемента фрактала у кожен момент часу змінюються за визначеними законами з урахуванням випадкових стохастичних зовнішніх процесів.

## Розділ 14. ЗАСТОСУВАННЯ ФРАКТАЛІВ У МЕДИЧНІЙ ІНЖЕНЕРІЇ

Однією з найактуальніших проблем медичної діагностики є коректна інтерпретація отриманих даних. Розвиток медичної техніки дає все більші можливості вимірювання тих чи інших характеристик біологічних процесів, надає інформацію про будову й склад різних органів і систем. Але інтерпретація даних, переважно, залишається якісною, суб'єктивною; зміна характеристик вимірюваного біологічного об'єкта у часі (під час моніторингових обстежень) здебільшого не є лінійною залежністю, що вкрай ускладнює інтерпретацію даних (наприклад, ефективність лікування). Для вирішення цієї проблеми в медичній інженерії та клініках все ширше використовують математичний апарат з нелінійної динаміки. Теорію нелінійної динаміки (теорію хаосу) в медицині використовують для вивчення порушень обмеженої випадковості детермінованих подій та асоціюють з поняттям фрактальної геометрії. Вважають, що прояви особливостей просторово-часового хаосу в організмі під час патологічних процесів відбуваються на різних ієрархічних рівнях. Інформацію про це найчастіше отримують з цифрової форми медичного зображення, за допомогою електронної чи світлової мікроскопії, рентгенівських, ультразвукових, магнітно-резонансних, ізотопних та інших методів.

Метою цього розділу є висвітлення методів оцінювання детермінованого хаосу на прикладі аналізу медичних зображень злоякісних процесів.

### 14.1. Формалізація ознак просторово-часового хаосу медичного зображення

Зазвичай головними цитоморфологічними ознаками злоякісної пухлини є *атипія* та *поліморфізм* величини й форми *неопластичних клітин*, які в процесі свого розвитку (*неопластичної проліферації*) формують різноманітні (гетерогенні) популяції. Стосовно ультразвукової діагностики встановлюється діагноз *малігнізації*, найчастіше – на основі нерівності (іррегулярності), нечіткості, асиметричності контурів тканин або атиповості судинної системи. Крім асиметрії та іррегулярності в контурі клітин, органів чи новоутворень, для злоякісного процесу характерні зміни в структурній дезорганізації (дезінтеграції) у вигляді зміни гетерогенності і фрактальності, як на молекулярному, субклітинному, так і тканинному рівнях.

Отже, можна вважати, що для аналізу детермінованого хаосу медичного зображення злоякісних пухлин можна використати формалізовані ознаки – асиметрію та іррегулярність зовнішніх контурів, а також гетерогенність та фрактальну розмірність клітин і тканин.

## 14.2. Параметр розходження

Однією з продуктивних ідей оцінювання нелінійної динаміки злоякісних процесів виявилася ідея дослідження атракторів – множини, що «притягує» траєкторії кінетики певного біологічного процесу у фазовому просторі. Одним з варіантів оцінювання атракторів є розрахунок кількості можливих фазових станів. Ця кількість визначається площиною, яка відокремлена фазовими траєкторіями системи. Для визначення цієї площини використовують параметр розходження фазових траєкторій. Сформулюємо його означення. Нехай  $\Phi$  – фазова діаграма певного процесу

$$\Phi = \{(x, y) \mid x = \varphi(t); y = \psi(t); t \in [\theta_1, \theta_2]\},$$

де  $\varphi$  і  $\psi$  – неперервно диференційовані функції на відрізку  $[\theta_1, \theta_2]$ .

Припустимо, що  $x_{\min} = \min_{t \in [\theta_1, \theta_2]} \varphi(t)$ ;  $x_{\max} = \max_{t \in [\theta_1, \theta_2]} \varphi(t)$ ;  $y_{\min}(x) = \min_{t \in \varphi^{-1}(x) \cap [\theta_1, \theta_2]} \psi(t)$ ;  $y_{\max}(x) = \max_{t \in \varphi^{-1}(x) \cap [\theta_1, \theta_2]} \psi(t)$ . Параметром розходження  $S(\Phi)$  фазової діаграми  $\Phi$  називають число

$$S(\Phi) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (y_{\max}(x) - y_{\min}(x)) dx. \quad (14.1)$$

Визначення функцій  $y_{\max}(x)$  та  $y_{\min}(x)$ ,  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$  зводиться до знаходження множини-праобразу  $\varphi^{-1}(x)$  елемента  $x$  для всіх  $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ , що може бути пов'язане з певними труднощами. Для наближеного обчислення інтеграла у правій частині формули (14.1) замінимо його інтегральною сумою Рімана

$$S(\Phi) \approx S_{\varepsilon}(\Phi) = \sum_{i=0}^{n-1} (y_{\max}(x_i) - y_{\min}(x_i)) \varepsilon, \quad (14.2)$$

де  $n = [(x_{\max} - x_{\min})/\varepsilon]$ ;  $x_i = x_{\min} + i\varepsilon$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

У цьому разі знаходження обернених значень функції  $\varphi$  необхідно проводити лише у вузлах розбиття  $x_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Фізико-математичною інтерпретацією параметра розходження є площа фігури утвореної кривою, що огинає фазову траєкторію.

Перебором усіх чисел  $y_{(j)}$  знаходимо  $y_{\min}(x_i)$ ;  $y_{\max}(x_i)$ ;  $x_i = x_{\min} + i\varepsilon$ ;  $i = 0; 1; \dots, n$ ;  $n = [(x_{\max} - x_{\min})/\varepsilon]$ .

Одним із прикладів застосування параметра розходження є оцінювання іррегулярності контуру тих чи інших органів і новоутворень. Виділення зони інтересу на медичному зображенні проводять фахівці променевої діагностики чи за допомогою напівавтоматичних методів сегментації зображень. *Зоною інтересу* є область зображення, яка підлягає обробці чи аналізу. Координати точок виділеної зони інтересу цифрового медичного зображення можна попередньо лінійно упорядкувати за допомогою порядкової розгортки. Для побудови фазового портрету дискретного ряду значень використовують формулу

$$z_i = f(z_{i+j}),$$

де  $i = 1, 2, \dots, n-j$  – порядковий номер точки;  $j$  – деяке фіксоване зміщення;  $z_i$  – радіус-вектор координати контуру  $(\sqrt{x_i^2 + y_i^2})$  чи нахил дотичної до контуру в точці  $(x_i, y_i)$ . Якщо аналізу підлягають утворення, контури яких наближаються до кола, наприклад новоутворення, координати контуру доцільно перевести в полярну систему координат відносно центру мас пухлини. На практиці  $j$  набуває певного фіксованого значення, залежно від частоти дискретизації контуру й необхідності аналізу іррегулярності ближнього чи дальнього порядку.

Слід зауважити, що за  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  рекурентна формула для побудови фазового портрету нагадує автокореляційну формулу.

Блок-схему алгоритму для розрахунку параметра розходження фазової діаграми подано на рис. 14.1.

**Апробація алгоритму розрахунку параметра розходження на тестових прикладах.** Адекватність параметра розходження хаосу реального злякисного процесу можна оцінити на тестових прикладах:

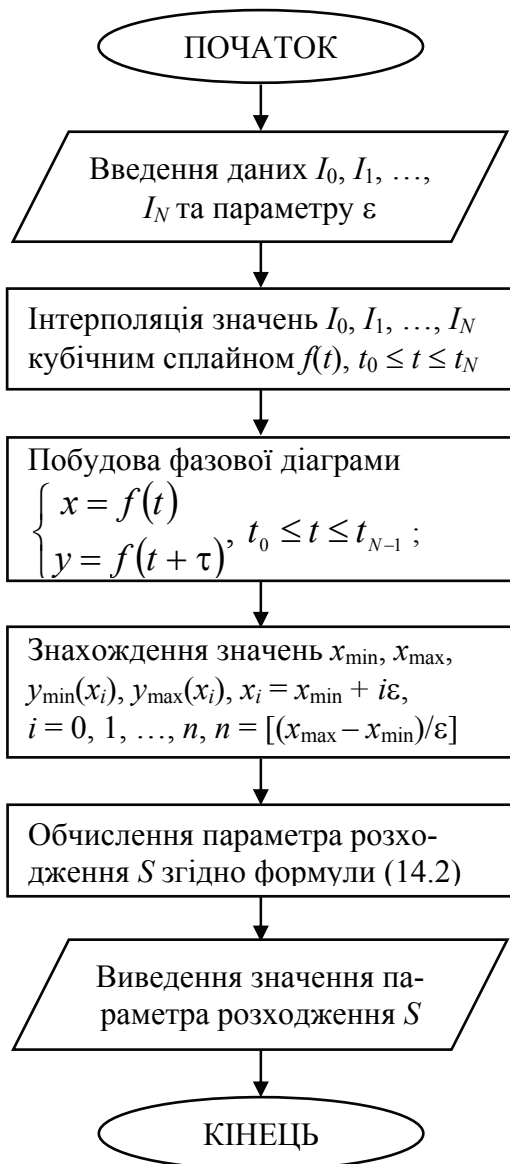


Рис. 14.1. Блок-схема алгоритму розрахунку параметра розходження фазової діаграми

Розходження фазової діаграми

1) вільні гармонічні коливання без тертя і зовнішніх сил описують рівнянням

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де  $x(t)$  – величина вимірюваної величини в момент часу  $t$ ;  $A_0$  – максимальне значення амплітуди;  $\omega$  – власна частота коливань;  $\varphi_0$  – початкова фаза коливань;

2) загасаючі коливання. Амплітуда загасаючих коливань має таку часову залежність:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \varphi_0\right); \quad (14.3)$$

3) квазіперіодичні коливання. За наявності зовнішньої періодичної збурюючої сили можуть виникати комбінаційні коливання, що мають вигляд

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2).$$

Коли частоти  $\omega_1$  і  $\omega_2$  непорівнянні, тобто  $\omega_1/\omega_2$  – ірраціональне число, такі коливання називають *квазіперіодичними*. Квазіперіодичні коливання не є періодичними, однак їх не слід плутати з хаотичними коливаннями;

4) квазіперіодичні коливання із загасанням

$$x(t) = A_1 e^{-\gamma_1 t} \cos\left(\sqrt{\omega_1^2 - \gamma_1^2} t + \varphi_1\right) + A_2 e^{-\gamma_2 t} \cos\left(\sqrt{\omega_2^2 - \gamma_2^2} t + \varphi_2\right);$$

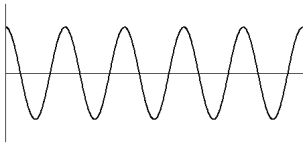
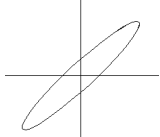
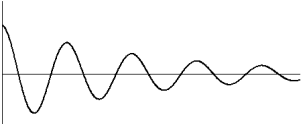

5) хаотичні коливання. Як приклад хаотичних коливань розглянемо рівняння росту популяції або логістичне рівняння

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n).$$

Максимальну амплітуду коливань у всіх випадках обирали приблизно однаковою. Результати апробації наведено в табл. 14.1.

Таблиця 14.1

Апробація алгоритму розрахунку параметра розходження на тестових прикладах

Тест	Тип коливань	Графік процесу	Фазова діаграма	Параметр розходження $S$ , умов. од.
1	Періодичні			9,9
2	Загасаючі періодичні			5,6

Тест	Тип коливань	Графік процесу	Фазова діаграма	Параметр розходження $S$ , умов. од.
3	Квазі-періодичні			17,8
4	Загасаючі квазі-періодичні			8,4
5	Хаотичні			158,5

Проаналізувавши дані, наведені в табл. 14.1, зазначимо, що параметр розходження мав найбільшу величину для тесту хаотичних коливань.

Використовуючи наведений алгоритм розрахунку параметра розходження, зазначимо деякі його обмеження.

Перше обмеження пов'язане з вимогою однозначного визначення  $y_{\min}(x_i)$  та  $y_{\max}(x_i)$ . Так, якщо фазовий портрет має вигляд як на рис. 14.2 *а, в, д* – похибка визначення параметра розходження визначається площиною, яка відображена на рис. 14.2 *б, з, е*.

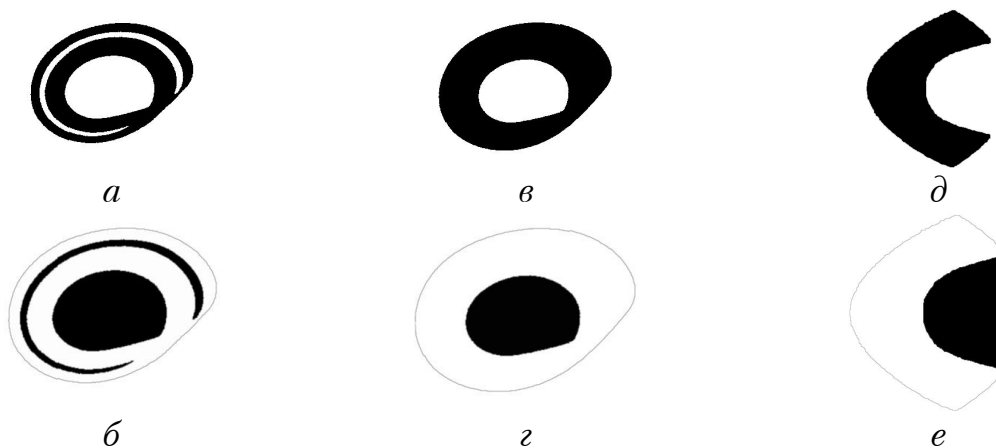


Рис. 14.2. Похибка розрахунку параметра розходження: *а, в, д* – вихідний фазовий портрет; *б, з, е* – відповідні площини, що визначають похибку

Друге обмеження пов'язане з тим, що фазові траєкторії мають перебувати в обмеженому просторі й перетинатися на площині. Якщо фазові траєкторії є такими, що зходяться чи розходяться, то



параметр розходження має дорівнювати нулю, оскільки траєкторії є незамкненими і не перетинаються. Тому наведений алгоритм може мати відносно велику похибку. Так, наприклад, параметр розходження у тесті № 2 (табл. 14.1) має певне кінцеве значення. Залежно від початкових умов для рівняння (14.3) ця похибка може бути досить суттєвою.

Одним із варіантів зняття цих обмежень з практичної точки зору параметр розходження доцільно розраховувати графічно. Після побудови фазового портрету системи, графічне відображення  $y_i = f(y_{i+j})$  переводиться у графічний формат файлу (.bmp, .jpg, .gif тощо) і за допомогою функції «заливки» визначають площу, яка не належить аттрактору. Знаючи загальну площу зображення, легко визначити площину, що належить аттрактору.

### 14.3. Параметри асиметрії

Під час оброблення медичних зображень серед різноманітних параметрів асиметрії найбільшого значення набули асиметрія органа та асиметрія новоутворення. Останній часто називають *параметром форми*.

#### 14.3.1. Асиметрія тіла матки

Відомо, що зображення матки фактично здорової жінки має квазісиметричну грушоподібну форму, а відстань між центрами мас матки та порожнини характеризується відносно малою величиною. Наявність пухлини трофобласту, зазвичай, призводить до порушення квазісиметричної грушоподібної форми, що відображається на збільшенні числового значення відстані між центрами мас  $d$  ультразвукового зображення матки та її порожнини. Насправді розрахунок полягає у визначенні параметра асиметрії ультразвукового зображення матки, який визначають за формулою

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} / p,$$

де  $(x_1, y_1)$  – координати геометричного центру маси зображення порожнини матки;  $(x_2, y_2)$  – координати геометричного центру мас тіла матки за виключенням її порожнини;  $p$  – кількість пікселів на 1 мм зображення (рис. 14.3).

Адекватність досліджуваного параметра асиметрії матки можна заздалегідь перевірити на тестових віртуальних зображеннях, наведених у табл. 14.2. Із тестових випробувань можна зробити висновок, що у віртуальному фантомному зображенні для хворої

на хоріокарциному матки спостерігається збільшення параметра асиметрії на 77 % відносно грушоподібної форми матки фактично здорової жінки.

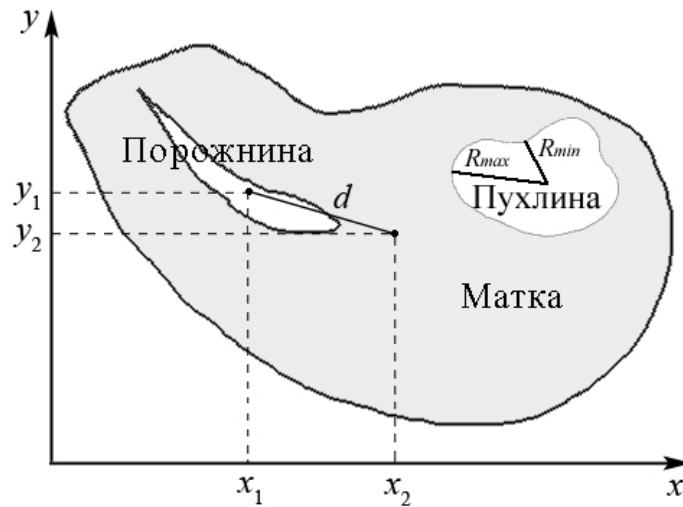


Рис. 14.3. Розрахунок параметрів асиметрії матки та контуру пухлини

Зазначимо, що перевагою цього показника порівняно з іншими, які розглядаються, є те, що він не потребує чіткого виділення контурів пухлини; оператор зазначає тільки зони інтересу порожнини та тіла матки.

Таблиця 14.2

**Тестування параметра асиметрії матки**

Віртуальний діагноз	Тестове зображення	Параметр асиметрії
Фактично здорова жінка		24,5
Хоріокарцинома матки		104,7

Використання розглянутого показника найінформативніше під час моніторингових досліджень в оцінюванні ефективності терапії.

### 14.3.2. Асиметрія новоутворення

Розвиток та ріст майже всіх новоутворень описують, зазвичай, експоненціальними функціями. Однак вплив природних, внутрішніх та медичних факторів на організм і пухлину в цілому призводить до великої кількості різних видів кінетичних кривих (рис. 14.4).

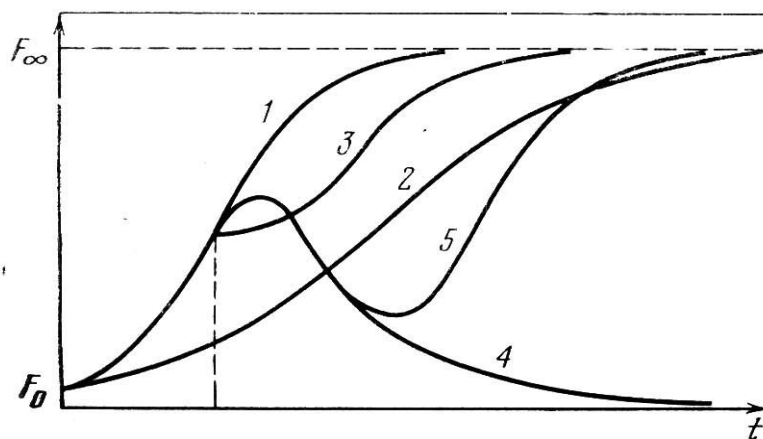


Рис. 14.4. Типи кінетичних кривих пухлинного росту: 1 – контроль; 2 – гальмування при ранній терапії; 3–5 – дія на пухлинний процес з ефектами гальмування, повної та часткової регресії;  $F$  – розмір пухлини ( $F_0$  – початковий;  $F_\infty$  – гранично можливий)

Такі залежності відображають явища гальмування росту пухлин, їх регресії, рецидивів тощо. Аналізуючи велику кількість клінічних та експериментальних даних розвитку пухлин можна побачити, що новоутворення прямує до сферичної форми (на площинних зображеннях – до округлої), якщо немає перешкод для її росту. Але у злякисних пухлин активність клітин до поділу дуже велика і не однакова, тому в процесі свого розвитку злякисні пухлини відхиляються від сферичної форми більше ніж доброякісні новоутворення. Асиметричну форму злякисних новоутворень пояснюють ще і тим, що вони не мають межі як такої. Злякисні клітини «захоплюють нові території», розповсюджуючись у міжклітинному простору по матриксу. Спочатку формується «дифузійний» прошарок, який називають *зоною інвазії*. Поступово, у міру поділу злякисних клітин, здорових стає все менше, і досягнувши деякого критичного значення, на медичних зображеннях можна розпізнати цю ділянку тканин як пухлину. В різних напрямках швидкість поділу злякисних клітин за однакових умов статистично приблизно однакова, але випадковість, накладена на неленійність, призводить до відхилення форми від сферичної. У свою чергу це дає можливість лікарю-діагносту певною мірою визначити ступінь злякисності пухлини за відповідним медичним зображенням.

Параметр асиметрії новоутворення розраховують за формулою (рис. 14.3):

$$d_{tum} = \frac{R_{max}}{R_{min}}.$$

Як вже зазначалось, цей параметр інформативний, якщо на шляху росту пухлини не виникає перешкод, а також коли пухлина достатньо мала відносно органа де вона знаходиться. В іншому разі новоутворення деформується. За наявності деформації параметр асиметрії більше характеризує механічні напруги в тканинах пухлини і оточуючих тканинах. У свою чергу це дає можливість певною мірою передбачувати здатність пухлини до метастазування – чим більша механічна напруга, тим більша ймовірність появи метастазів (рис. 14.5).

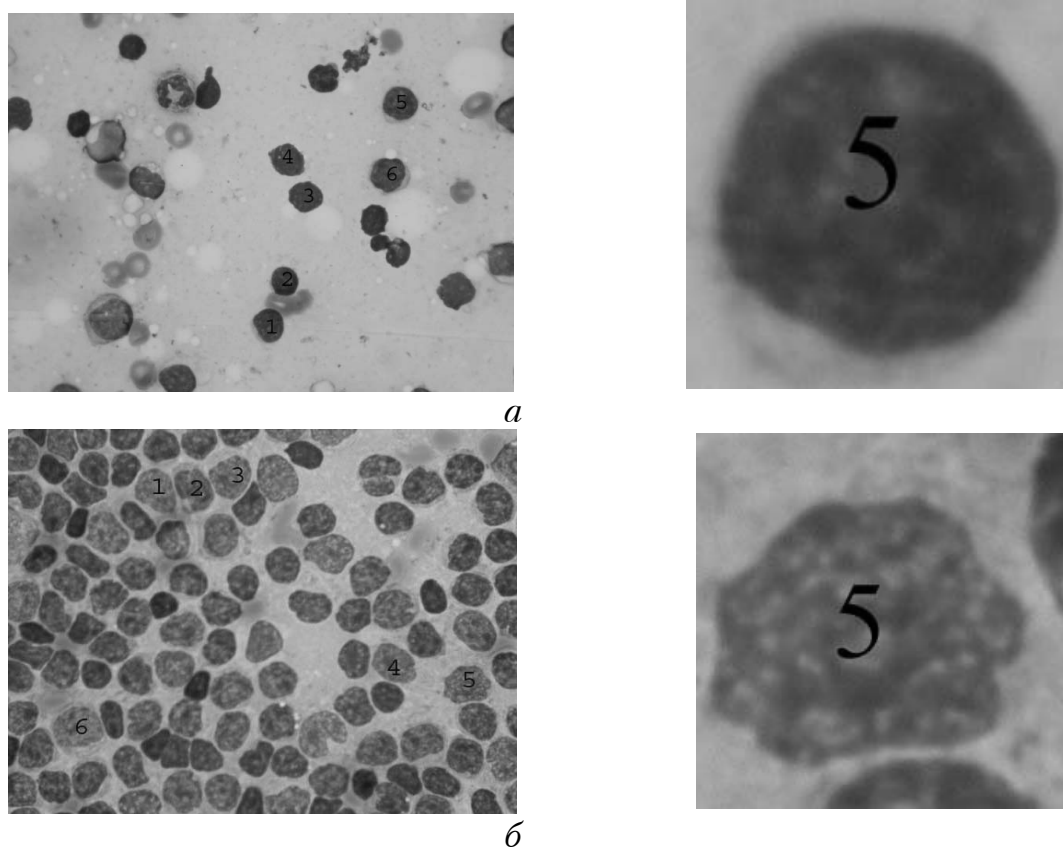


Рис. 14.5. Мікроснімки клітин різних типів лімфом:  
*a* – лімфаденіт (нормальна клітина); *б* – неходжкінська лімфома з крупних В-клітин (злаякісна клітинка)

Параметр асиметрії (параметр форми) інформативний під час диференційної діагностики клітин за даними мікроскопії. В цьому разі його розраховують безпосередньо на окремо взятій клітині.

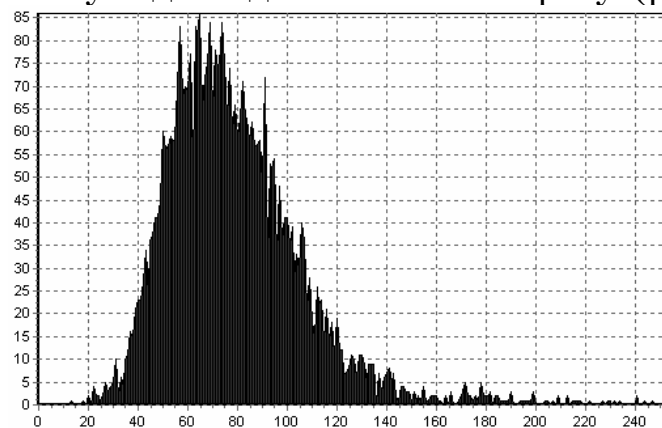
## 14.4. Оцінювання гетерогенності

**Гетерогенність** – неоднорідність структури, ступінь її відмінності від оточуваного середовища. Термін «гетерогенність» дуже часто використовують у медичній практиці, але точного формалізованого визначення на тепер не існує.

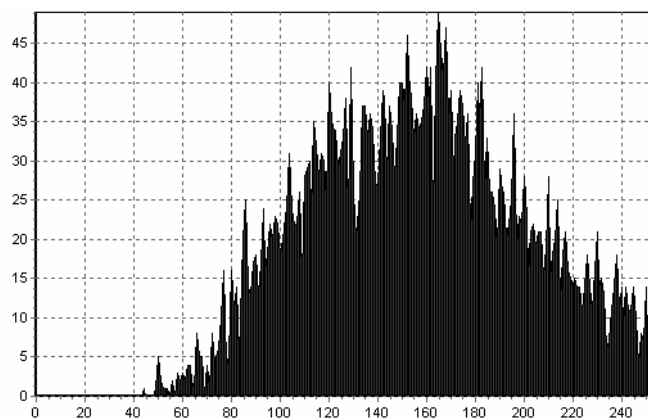
Найчастіше гетерогенність оцінюють за статистичними характеристиками зони інтересу на медичному зображенні. Однак у цьому випадку не враховують структурні особливості візуалізованих даних (клітин, тканин, органів, гістологічних крезів тощо). Цю проблему зазвичай вирішують за допомогою автокореляційного та фрактального аналізів.

### 14.4.1. Статистичні показники

Основні статистичні показники детермінованого хаосу медичного зображення розраховують на основі гістограми розподілення яскравості пікселів у відповідних зонах інтересу (рис. 14.6).



*a*



*б*

Рис. 14.6. Гістограми розподілення яскравості пікселів ультразвукового зображення в зонах інтересу: *a* – умовно здорових тканин; *б* – у тканинах пухлини

Із наведених діаграм отримують середнє арифметичне  $M$ , дисперсію  $D$ , середнє квадратичне відхилення  $\sigma$ , помилку середнього арифметичного  $m$ , коефіцієнт асиметрії  $A$ , ексцес  $E$ , ентропію та енергію.

#### 14.4.2. Автокореляційний аналіз

Гетерогенність структури  $G$ -зображення можна оцінити за допомогою модифікованого коефіцієнта  $r$  просторової автокореляції за Мораном:

$$G = 1 - r ;$$

$$r = \frac{n \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij} (x_i - \bar{x})(x_j - \bar{x})}{\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right) \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n w_{ij}}$$

де  $n$  – кількість точок зображення;  $x_i$  – значення інтенсивності  $i$ -ої точки;  $\bar{x}$  – середнє значення інтенсивності;  $w_{ij}$  – ваговий коефіцієнт, що дорівнює інвертованій відстані між точками  $i$  та  $j$ , тобто  $1/d_{ij}$ .

Модифікація формули Морана полягає у тому, що  $n$  (за практичного використання цієї формули) не охоплює всіх точок зображення, а обмежене деякою ділянкою, що характеризує елемент текстури.

Альтернативними методами розрахунку коефіцієнта просторової автокореляції  $r$  є формула Гіра (див. розд. 16):

$$r = \frac{(n-1) \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (x_i - x_j)^2 \right]}{2 \left( \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (x_i - \bar{x})^2 \right)}$$

#### 14.5. Фрактальний аналіз

Головним для фракталів в універсальному науковому плані є те, що маючи зовнішній дуже складний вигляд вони, насправді, надзвичайно прості, оскільки мають безліч взаємопов'язаних елементів, однакових за структурою, але відмінних один від одного, переважно, своїми розмірами. Про такі фігури часто говорять, що вони мають «масштабну подібність» або «масштабну інваріантність», «самоподібність». Це означає, що якщо збільшити масштаб фрактала, щоб виявилися найменші його деталі, то останні

матимуть таку саму конфігурацію, що і найбільші елементи, які є в структурі фрактала.

Прості фрактали, такі як канторівський пил, сніжинки і ламані Коха, килим Серпинського, криві дракона, криві Пеано та Гільберта і багато інших, мають регулярну геометрично правильну структуру. Кожен фрагмент такого геометрично правильного фрактала точно повторює всю конструкцію в цілому. У разі менш точної транслокації (самоафінності або самоподібності) виникають інші, наприклад випадкові фрактали. Прикладами випадкових фракталів можуть бути прикордонні й берегові лінії, пори у хлібі, дірки в деяких сортах сиру, частинки в порошках тощо.

### 14.5.1. Фрактальна розмірність

Для фракталів характерною ознакою є неціла розмірність, яку називають фрактальною розмірністю:

$$N(\varepsilon)\varepsilon^d = c \Rightarrow d = \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}, \quad (14.4)$$

де  $N(\varepsilon)$  – кількість рівних частин, на які розбивається вихідне зображення, де кожен частину можна вважати копією всього зображення, зменшену в  $1/\varepsilon$  разів;  $c$  – константа.

Структурні властивості біологічних тканин на медичних зображеннях також можна оцінити за допомогою фрактальної геометрії. Найчастіше таке оцінювання проводять саме за фрактальною розмірністю. Зазвичай, під час такого аналізу медичне зображення переводять у бінарний формат, наприклад, за критерієм перевищення деякого порогу яскравості пікселів.

Комп'ютерні алгоритми обчислення розмірності Мінковського  $D$  найчастіше опираються на співвідношення аналогічне (14.4):

$$\log N(\varepsilon) = \log c - d \log \varepsilon.$$

Графік залежності  $\log N(\varepsilon)$  від  $\log \varepsilon$  – це пряма з кутовим коефіцієнтом  $d$ . За  $N(\varepsilon)$  можна використати мінімальну кількість клітин із стороною  $\varepsilon$ , необхідних для покриття фрактала. Для визначення невідомих параметрів  $c$  і  $d$  (хоча значення  $c$  зазвичай немає інтересу) потрібно оцінити  $N(\varepsilon)$  для декількох значень  $\varepsilon$ .

Якщо використовувати клітини тільки двох розмірів  $\varepsilon_1$  та  $\varepsilon_2$ , то невідомі  $c$  і  $d$  можна визначити з системи рівнянь

$$\begin{aligned} \log N(\varepsilon_1) &= \log c - d \log \varepsilon_1; \\ \log N(\varepsilon_2) &= \log c - d \log \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Проте враховуючи, що величини  $N(\varepsilon)$  можна знайти лише приблизно, оцінимо  $N(\varepsilon)$  для більшої кількості різних значень  $\varepsilon$ . У цьому разі отримаємо перевизначену систему (кількість рівнянь більше кількості невідомого), яка, ймовірно, не матиме точного розв'язку. Стандартний прийом у подібній ситуації полягає в мінімізації суми квадратів відхилень (метод найменших квадратів – МНК-прямої). Так, якщо експериментальними даними є набір точок  $(x_i, y_i)$ , де  $i = 1, 2, \dots, n$ , необхідно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{bmatrix},$$

де невідомі  $b$  і  $m$  є коефіцієнтами прямої  $y = mx + b$ .

### 14.5. 2. Yardstick-метод

Рівняння Річардсона–Мандельброта надає математичну основу для розуміння геометричної та просторової структури фракталів:

$$L(\varepsilon) = N(\varepsilon)\varepsilon,$$

де  $L(\varepsilon)$  – довжина ламаної лінії, якою можна покрити об'єкт;  $\varepsilon$  – довжина відрізка ламаної;

$$N(\varepsilon) = l_0^d \varepsilon^{-d} = \left( \frac{l_0}{\varepsilon} \right)^d,$$

де  $N(\varepsilon)$  – кількість відрізків довжини  $\varepsilon$ , потрібних, щоб покрити  $L(\varepsilon)$ ;  $l_0/\varepsilon$  – безрозмірна величина;  $l_0$  – шкала відліку, яка не впливає на визначення  $d$ .

Взявши  $l_0 = 1$ , виразимо з останньої рівності  $d$  і перейдемо до межі за  $\varepsilon \rightarrow 0$ , тоді матимемо

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}, \quad (14.5)$$

де  $d$  – фрактальна розмірність, яка змінюється від 1 до 2, зокрема для кривої Коха  $d = 1,26185$ .

Спочатку обирають відрізок довжини  $\varepsilon$ , а потім початкову точку на контурі і підраховують число  $N(\varepsilon)$  – кількість відрізків довжини  $\varepsilon$ , якими повністю можна покрити контур досліджуваного об'єкта. «Покрити контур» означає, що використовують відрізки сталої довжини  $\varepsilon$ , які наближають контур до багатокутників.



Цю процедуру повторюють для кожної початкової точки на контурі та різних довжин  $\varepsilon$  відрізка, яким покривається контур. Потім будують «найбільш лінійну» ділянку залежності  $\log N(\varepsilon)$  від  $\log \varepsilon$ , на якій будують лінійну апроксимацію методом найменших квадратів – це буде пряма (рис. 14.7). Кутовий коефіцієнт отриманої прямої прямуватиме до фрактальної розмірності цієї клітини

$$d = -\frac{\log N(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

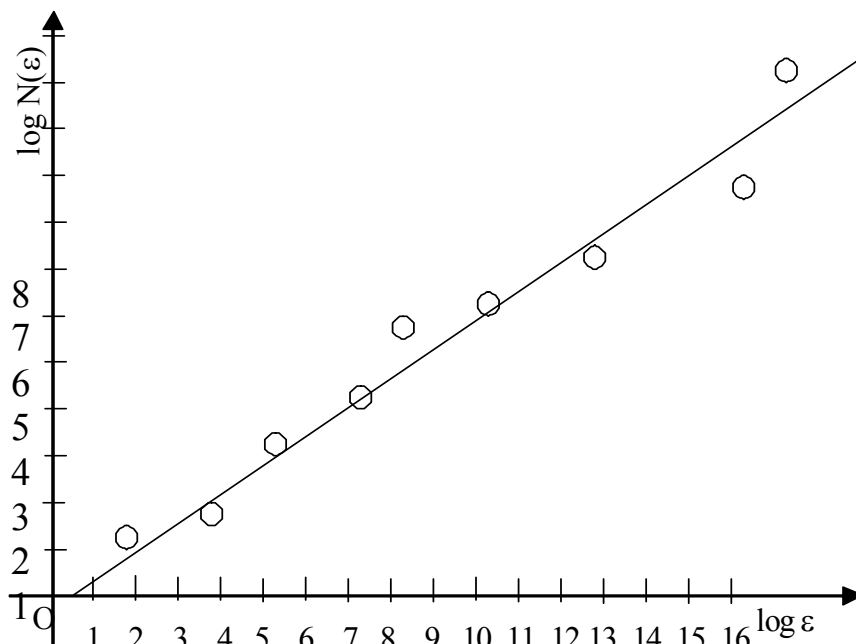


Рис. 14.7. Приклад оцінювання фрактальної ємності

Порівняймо фрактальні розмірності тестових фігур та їх комбінації (рис. 14.8). Для цих фігур було обчислено фрактальну розмірність за  $\varepsilon = 5; 10; 20$ .

Результати обчислення фрактальної розмірності, отримані за допомогою Yardstick-методу наведено в табл. 14.3.

Таблиця 14.3

**Фрактальна розмірність тестових  
фантомних зображень на рис. 14.7**

Номер фігури	Максимальний розмір комірки під час розбивання зображення, пікселів					
	5		10		20	
	Фрактальна розмірність	Дисперсія	Фрактальна розмірність	Дисперсія	Фрактальна розмірність	Дисперсія
1	1,0046	0,0000250	1,0062	0,0000568	1,0159	0,000227
2	1,1728	0,0009390	1,0730	0,0009620	1,0224	0,000790
3	1,0027	0,0000004	1,0027	0,0000035	1,0036	0,000014
4	1,1707	0,0011300	1,0892	0,0008760	1,0634	0,000511

Номер фігури	Максимальний розмір комірки під час розбивання зображення, пікселів					
	5		10		20	
	Фрактальна розмірність	Дисперсія	Фрактальна розмірність	Дисперсія	Фрактальна розмірність	Дисперсія
1+2	1,0859	0,0001500	1,0551	0,0001490	1,0386	0,000176
1+4	1,1526	0,0006340	1,0943	0,0004730	1,0829	0,000272
3+4	1,0692	0,0001670	1,0417	0,0001150	1,0369	0,000065
Середнє значення	1,0941	0,0004351	1,0517	0,0003765	1,0377	0,000294

З отриманих даних видно, що у квадрата і прямокутника, тобто у першої та третьої фігур (рис.14.8), фрактальна розмірність близька до одиниці. Для другої та четвертої фігур – кола та п'ятикутної зірки – фрактальна розмірність дещо більша за одиницю. Отже, фрактальна розмірність залежить від контуру фігури за фіксованого  $\varepsilon$ .

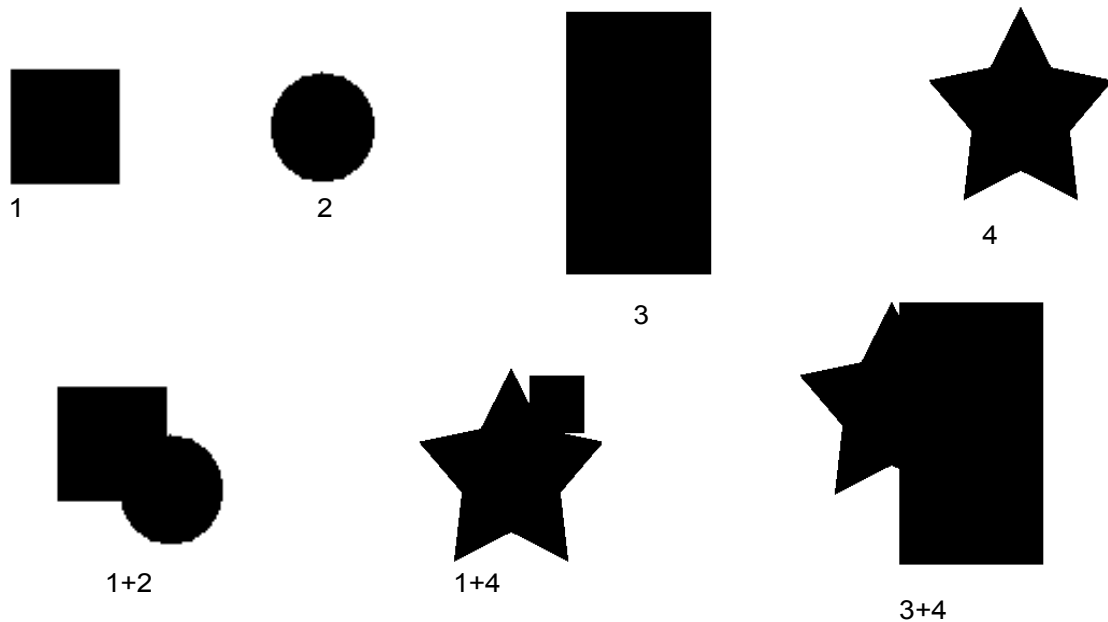


Рис. 14.8. Фігури та комбінації з поєднанням фігур, на яких було проведено тестові дослідження фрактальної розмірності

Розглянемо зміну фрактальної розмірності під час зміни довжини відрізка  $\varepsilon$ . З отриманих даних видно (табл. 14.3), що для першої та третьої фігур фрактальна розмірність зростає зі збільшенням  $\varepsilon$ , а для другої та четвертої фігур (рис. 14.8) фрактальна розмірність зменшується зі збільшенням  $\varepsilon$ . Тобто для менш іррегулярних фігур залежність фрактальної розмірності  $d$  від  $\varepsilon$  є прямо пропорційною, а для інших фігур ця залежність є обернено пропорційною. Це пов'язано

з тим, що під час покривання контуру фігури відрізками, отримуємо багатокутник, який наближається до контуру фігури. Якщо накладати на менш іррегулярний контур фігури, наприклад прямокутник, відрізки за досить малих значень  $\epsilon$ , то в результаті отримаємо майже такий самий прямокутник, а у разі накладання на цю саму фігуру відрізків за більших значень  $\epsilon$ , отримаємо не прямокутник, а багатокутник із більшою кількістю сторін  $i$ , як наслідок, фрактальна розмірність зростиме. Під час накладання відрізків більш іррегулярного контуру фігури – все навпаки. За достатньо малих значень  $\epsilon$  отримаємо багатокутник, який наближається до контуру реальної фігури. У разі збільшення значення  $\epsilon$  у цьому багатокутнику утворюється менше сторін  $i$  і він стає більш опуклим, тобто менш іррегулярним  $i$ , як наслідок, його фрактальна розмірність зменшиться.

Розглянемо тепер фігури, отримані перетином розглянутих вище фігур. Дослідимо зміну їх фрактальних розмірностей. Якщо розглянути фігуру, отриману перетином квадрата і кола (перша і друга фігури на рис. 14.8), то фрактальна розмірність збільшиться, оскільки контур квадрата з малою іррегулярністю доповнився деякою неоднорідністю. Розглянемо як змінюється розмірність четвертої фігури під час перетину з першою та третьою фігурами. Контур четвертої фігури більш іррегулярний порівняно з контуром квадрата і контуром прямокутника. Під час доповнення четвертої фігури першою, фрактальна розмірність дещо зменшиться порівняно з фрактальною розмірністю четвертої фігури. Це пов'язано з тим, що квадрат має менш іррегулярний контур ніж зірка, але оскільки контур четвертої фігури значно більший ніж першої, то розмірність четвертої фігури зменшиться не суттєво. Якщо ж доповнювати четверту фігуру прямокутником з достатньо великим контуром, то розмірність четвертої фігури значно зменшиться (це впливає з вищенаведених прикладів). З цього аналізу окремо розраховують контур кола, який має велику фрактальну розмірність.

Отже, Yardstick-метод можна використовувати для кількісного оцінювання асиметрії (іррегулярності) контурів медичного зображення.

### 14.5.3. Метод Box-counting

Опишемо алгоритм пошуку фрактальної розмірності, який в літературі отримав назву *Box-counting* чи клітинний метод.

Розіб'ємо ділянку, що містить фрактал  $A$ , на квадратні клітини (двовимірний випадок) декількох розмірів. Підрахуємо кількість клітин, необхідних для покриття  $A$  у кожному випадку, і підставимо набуті значення до співвідношення (14.15).

Очевидно, якщо фрактал  $A$  є підмножиною прямої, то замість квадратів потрібно використовувати відрізки. Якщо  $A$  – підмножина тривимірного простору, то квадрати замінюються на куби.

Проведемо деякі дослідження на тестових фантомних зображеннях. Це є необхідним для встановлення певних закономірностей. Також це допоможе виділити класи задач, до яких можна застосовувати методи, пов'язані з оцінюванням фрактальної розмірності «структурного хаосу» медичних зображень, що досліджуються. Наведемо декілька прикладів тестових фантомних зображень,

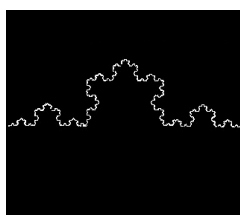


Рис. 14.9.  
Крива Коха

для виявлення закономірностей (беручи значення  $\epsilon$  від 1...10, розмір картинки 400...400 пікселів). Візьмемо як приклади зображення, що містять 50, 2000 довільно розташованих точок; квадрат розміром 100×100 пікселів; повністю заливаний малюнок (рис. 14.9); діагональ та криву Коха. Отримані результати наведено в табл. 14.4.

Таблиця 14.4

**Фрактальна розмірність відносно простих тестових фантомних зображень**

Назва тесту	Фрактальна розмірність	Дисперсія	Середнє квадратичне відхилення
50 точок	0,000	0,000000	0,000
2 000 точок	0,277	0,008470	0,092
Квадрат	1,945	0,000611	0,025
Все біле	2,004	0,000058	0,007
Діагональ	1,002	0,000014	0,004
Крива Коха	1,262	0,010803	0,104


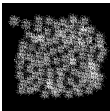
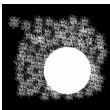
Аналізуючи отримані дані, можна побачити, що деякі приклади мають помилку під час підрахунку. Так, розмірність повністю заповненого рисунка більша ніж два, що в ідеалі неможливо – має дорівнювати двом.

Приклад підрахунку фрактальної розмірності кривої Коха дає результат дуже близький до теоретичної розмірності: теоретично  $\frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,261886\dots$ , фактично  $1,262 \pm 0,104$ , хоча, як бачимо, наявна доволі велика дисперсія.

На перший погляд здається, що фрактальна розмірність зростає зі збільшенням площі об'єкта, тому наведемо приклади в табл. 14.5, які показують, що це не завжди вірно (є багато випадків, коли фрактальна розмірність зростатиме зі збільшенням площі об'єкта, що вивчається).

Таблиця 14.5

**Фрактальна розмірність тестових  
фантомних зображень залежно від площі об'єкта**

Зображення	Фрактальна розмірність	Площа фігури	Дисперсія
	1,951	32 645	0,000135
	1,573	32 807	0,019667
	1,711	47 836	0,006200

Фігури на малюнках 1 та 2 (табл. 14.5) мають приблизно однакову площу (32645 та 32807 відповідно), але при цьому їх фрактальна розмірність суттєво розрізняється. Також можна бачити, що на малюнку 3, що є об'єднанням двох перших, площа значно зростає (47836), але розмірність зменшується порівняно з малюнком 1 та збільшується порівняно з малюнком 2 відповідно на 14 % та 8 %. Також треба зазначити, що на малюнку 1 була отримана найменша дисперсія, а найбільша – на малюнку 2.

Розглянемо наступну групу зображень в табл. 14.6. Як бачимо, тут маємо аналогічну ситуацію як у табл. 14.5.

Наведемо аналіз тестових фантомних зображень, що містять зображення судинної системи фактично здорової людини та пухлини (табл. 14.7). Підрахуємо фрактальну розмірність у кожному з трьох випадків (беручи є від 1...10, розмір картинки 260×260 пікселів).

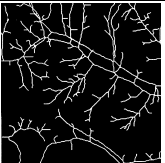
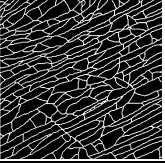
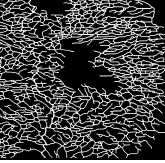
Таблиця 14.6

**Фрактальна розмірність комбінованих  
за масштабом тестових фантомних зображень**

Зображення	Фрактальна розмірність	Дисперсія
	1,876	0,029
	1,823	0,037
	1,789	0,031

Таблиця 14.7

**Фрактальна розмірність тестових фантомних зображень**

Зображення	Назва	Фрактальна розмірність	Дисперсія
	Артерії та вени фактично здорової людини	1,152	0,026
	Підшкірна структура капілярів фактично здорової людини	1,290	0,091
	Структура судинної системи пухлини	1,455	0,123

Проаналізуємо результати, наведені в табл. 14.7. Як бачимо, фрактальна розмірність тестових фантомів структури судинної системи фактично здорової людини менша, ніж у судинної системи пухлини.

Отже, фрактальну розмірність вираховану за допомогою *box-counting* методу можна застосувати для кількісного оцінювання іррегулярності контуру та гетерогенності медичних зображень.

### Завдання

1. Використовуючи лінійну і кубічну сплайн-інтерполяцію, побудувати фазовий портрет функції  $y = f(t)$ , де  $f(t) = \sin(t)$ ;  $t = 0 \div 6\pi$ ;  $\Delta t = 0,01\pi$ .

2. За дискретними значеннями  $y_i = f(t_i)$  побудувати фазові портрети  $y_i = f(y_{i+j})$ , де  $j = 1; 2; 10; 20$ .

3. Додати до кожного значення функції  $y_i = f(t_i)$  випадкове значення в межах від нуля до одиниці. За отриманими значеннями побудувати фазові портрети  $y_i = f(y_{i+j})$ , де  $j = 1; 2; 10; 20$ .

4. Виконати завдання 1–3 для нерівномірної випадкової дискретизації функції  $y = f(t)$ ;  $\Delta t = 0,001\pi \div 0,01\pi$ .

5. Проаналізувати отримані графічні зображення.

## Розділ 15. САМООРГАНІЗОВАНА КРИТИЧНІСТЬ

Під час катастроф експерти, зазвичай, звинувачують у ній яку-небудь рідкісну сукупність обставин або поєднання могутніх механізмів. Коли сильний землетрус стався у Сан-Франциско, геологи пов'язали його з нестабільністю уздовж розлому Сан-Андреас. Коли в «Чорний понеділок» 1987 р. завалився ринку акцій, економісти вказали на дестабілізуючий вплив торгівлі комп'ютерами. Коли за відбитками на скам'янілостях дізналися про загибель динозаврів, одні палеонтологи пов'язали їх зникнення з падінням метеорита, другі – з виверженням вулкана. Ці теорії цілком можуть бути правильними. Але такі великі і складні системи, як земна кора, ринок акцій і екосистема, можуть руйнуватися не тільки під впливом потужного удару, але і внаслідок падіння шпильки. Великі (такі, що складаються з множини взаємодіючих елементів), тобто інтерактивні системи, постійно самоорганізуються, і прагнуть досягти певного критичного стану, за якого навіть незначна подія викликає ланцюгову реакцію, що іноді призводить до катастрофи.

Дослідники традиційно аналізували великі інтерактивні системи так само, як малі впорядковані системи. Відбувалося це, переважно тому, що розроблені для простих систем методи виявилися достатньо успішними. Вчені вважали, що можуть прогнозувати поведінку великої інтерактивної системи вивченням окремих її елементів і мікроскопічних механізмів, що діють всередині. За браком кращої теорії вони припускали, що відгук великої інтерактивної системи пропорційний збуренню, яке діє на неї. Вважалось, що динаміку великих інтерактивних систем можна описати в термінах рівноважного стану, який час від часу піддається впливу певної зовнішньої сили.

За останні декілька десятиліть стало зрозуміло, що багато хаотичних і складних систем не піддаються традиційному аналізу. В 1987 р. було розроблено концепцію для пояснення поведінки складних систем, тобто систем, що містять мільйони елементів, які взаємодіють на малих відстанях. Запропонували теорію *самоорганізованої критичності*. Згідно з цією теорією, багато складних систем природно еволюціонують до критичного стану, в якому незначна подія викликає ланцюгову реакцію, що може вплинути на будь-яку кількість елементів системи. Хоча в складних системах відбувається більше незначних подій ніж катастроф, ланцюгові реакції всіх масштабів є невід'ємною частиною динаміки. Як впливає з теорії критичності, малі події викликають той самий



механізм, що їй великі. Більше того, складені системи ніколи не досягають рівноваги, а натомість еволюціонують від одного метастабільного стану до другого.

Концепція самоорганізованої критичності – холістична теорія (холізм – «філософія цілісності»), яка передбачає, що глобальні характеристики, такі як відносна кількість великих і малих подій, не залежать від мікроскопічних механізмів. Саме тому глобальні характеристики системи не можна зрозуміти, проаналізувавши її частини окремо. Відомо, концепція самоорганізованої критичності – єдина модель, або математичний опис, який привів до холістичної теорії динамічних систем.

Останнім часом експерименти і розрахунки за моделями показали, що багато складних досліджуваних систем в геології, економіці, біології й метеорології виявляють ознаки самоорганізованої критичності. Ці відкриття покращили розуміння еволюції земної кори, ринку акцій, екосистем і багатьох інших складних систем.

Оскільки складні системи містять багато компонентів, а їх поведінка визначається, переважно, кількістю взаємодій, дослідники, ймовірно, не в змозі побудувати математичні моделі, які були б одночасно й абсолютно реалістичними, і піддавалися теоретичному аналізу. Тому вони вимушені вдаватися до простих ідеалізованих моделей, які відображають істотні риси реальних систем. Якщо ці прості моделі чітко застосовують відносно різних модифікацій, то результати розрахунків за ними можна екстраполювати на реальні ситуації (цей підхід успішно застосовують у рівноважній статистичній механіці, де універсальні явища в системах із багатьма степенями вільності можна зрозуміти у процесі вивчення простих моделей).

Парадигмою для самоорганізованої критичності є проста, на перший погляд, система – купа піску. Деякі дослідники моделювали динаміку піщаних куп за допомогою комп'ютерних програм; інші проводили експерименти. Як моделі, так і експерименти мали схожі результати.

Використовуючи створений пристрій, який повільно і рівномірно – по одній піщинці – насипає пісок на круглу підкладку. Спочатку піщинки залишаються поблизу того місця, куди вони впали. Незабаром вони починають нагромаджуватися одна на одну, утворюючи купу з пологим схилом. Час від часу, коли в якомусь місці схил стає дуже крутим, піщинки зісковзують вниз, викликаючи невелику лавину. У процесі додавання піску і збільшенню крутизни схилу, середній розмір лавини збільшується. Деякі піщинки починають звалюватися з краю круга. Купа перестає зростати, коли кількість доданого піску в середньому

компенсується кількістю піску, що звалюється з краю. У цей момент система досягає свого критичного стану.

Коли на купу, що перебуває в критичному стані, падає піщинка, вона може спричинити лавину будь-якого розміру, включаючи «катастрофічну» подію. Проте велику частину часу піщинки падають так, що лавина не утворюється. Виявлено, що навіть найбільша лавина захоплює лише невелику частку піщинок у купі, тому навіть катастрофічна лавина не може привести до значного відхилення крутизни схилу від критичного значення.

Лавина є різновидом ланцюгової реакції, або розгалуженого процесу. Дещо спростивши динаміку лавини, можна визначити головні характеристики ланцюгової реакції й побудувати модель.

На початку сходження лавини одна піщинка зісковзує вниз по схилу в результаті нестабільності на поверхні купи. Ця піщинка зупиниться лише тоді, коли опиниться в стійкому положенні, інакше вона продовжить рух. Якщо вона зіткнеться з піщинками, які майже нестійкі – примусить їх також котитися вниз. Під час цього процесу кожна рухома піщинка може зупинитися або продовжуватиме падати, а також може викликати падіння інших піщинок. Процес припиниться, коли всі активні піщинки зупиняться або скотяться з купи. Для вимірювання розмірів лавини можна просто порахувати загальну кількість піщинок, що скотилися.

Купа зберігає постійну висоту і крутизну тому, що ймовірність припинення активності, в середньому, дорівнює вірогідності відгалуження активності. Отже, ланцюгова реакція підтримує критичний стан.

Якщо форма купи така, що крутизна її схилу менша за критичну (субкритичний стан), то лавина буде менша, ніж за критичного стану купи. Субкритична купа буде зростати, поки не досягне критичного стану. Якщо крутизна схилу більша за критичну (суперкритичний стан), то лавина буде значно більшою за ті, що генеруються критичним станом. Суперкритична купа зменшуватиметься, доки не перебуватиме в критичному стані. Як субкритична, так і суперкритична купа природно тяжіє до критичного стану.

Розглянемо ситуацію, коли замість сухого піску взяти мокрий, або спробувати запобігти лавині за допомогою завад. Спочатку волога купа дає рідкіснішу лавину меншого розміру, ніж така сама суха купа. Через деякий час крутизна схилу вологої купи зростає до більшого значення ніж сухої. У цьому стані волога купа породжує лавину всіх розмірів: вона еволюціонувала до критичного стану. Аналогічну динаміку можна спостерігати для купи з протилавинними завадами.

Загалом, критичний стан стійкий щодо будь-яких малих змін в характеристиках системи.

Піщана купа має дві суперечливі взаємовиняткові властивості: ця система нестійка в багатьох різних місцях і разом з тим її критичний стан абсолютно стійкий. З одного боку – конкретні властивості, такі як локальний рельєф купи, постійно змінюються через лавину. З другого – статистичні властивості системи, такі як розподіл розмірів лавини, залишаються незмінними.

Спостерігач, який вивчає певну частину купи, може легко виявити механізми, що спричиняє падіння піску, і навіть передбачити виникнення лавини у найближчому майбутньому. Для локального спостерігача велика лавина залишиться непередбачуваною, тому що вона є наслідком еволюції купи в цілому. Незалежно від локальної динаміки, лавина у будь-якому разі виникатиме з відносно незмінною частотою. Критичність є глобальною властивістю піщаної купи.

Незважаючи на те, що пісок додається до купи з постійною швидкістю, кількість піску, зсипаного з купи, з часом значно змінюється. Якщо намалювати графік цієї величини залежно від часу, то побачимо хаотичний сигнал із відбитками всієї тривалості (рис. 15.1). Такі сигнали відомі як шум мерехтіння, або флікер-шум, або шум  $1/f$ . Як відомо, шум мерехтіння вказує на те, що на динаміку системи впливають минулі події. І навпаки, білий, або випадковий шум означає, що кореляції між поточною динамікою і минулими подіями немає.

Шум мерехтіння надзвичайно поширений у природі. Він спостерігається в активності Сонця, випромінюванні галактик, струмі, що проходить через резистор, і в потоці води. Розповсюдженість шуму мерехтіння – це одна із загадок у фізиці. Теорія самоорганізованої критичності пропонує досить загальну інтерпретацію: шум мерехтіння є суперпозицією сигналів усіх амплітуд і тривалості сигналів, які виникають, коли система, що перебуває в критичному стані, породжує ланцюгові реакції всіх амплітуд і тривалостей.

Було побудовано багато комп'ютерних моделей, що демонструють самоорганізовану критичність. Ці моделі допомогли зрозуміти динаміку землетрусів, екосистем і турбулентності в рідинах.

Моделювання землетрусів було найвдалішим. У 1956 р. виявилось, що кількість сильних землетрусів пов'язано з кількістю слабших (це правило відоме як закон Гутенберга–Ріхтера). Протягом року кількість землетрусів, які вивільняють певну енергію  $E$ , пропорційні одиниці, що ділиться на  $E$  у степені  $b$ , де показник  $b$  дорівнює приблизно 1,5. Цей показник універсальний тому, що він не залежить від географічного району. Звідси випливає, що сильні

землетруси трапляються набагато рідше, ніж слабші. Наприклад, якщо в районі щороку відбувається один землетрус з енергією 100 (у певних одиницях), то там же щорічно відбуватиметься приблизно 1000 землетрусів з енергією 1.

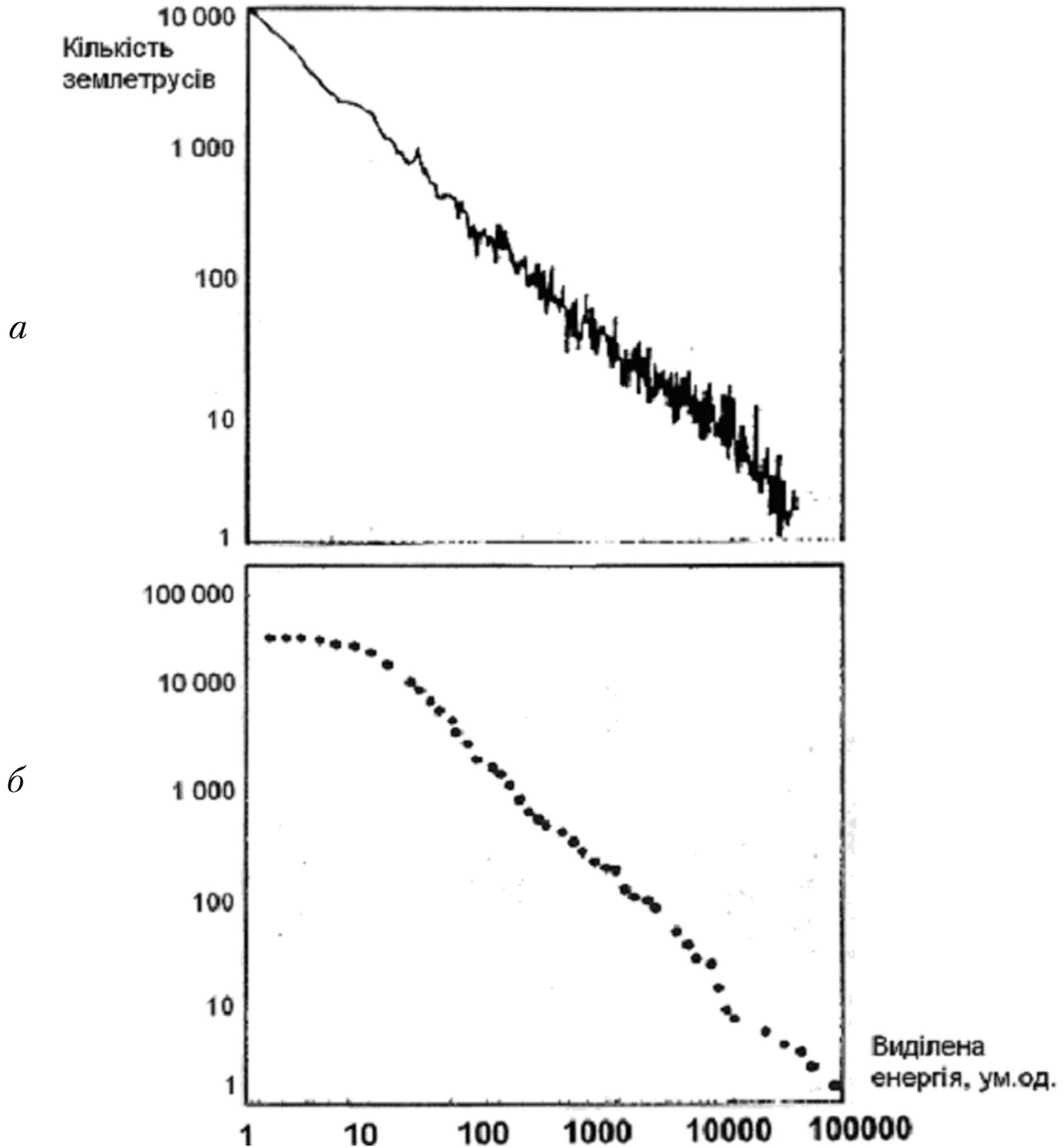


Рис. 15.1. Енергія, яка виділяється під час землетрусів:  
*a* – розрахунок; *б* – експеримент

Через те, що кількість слабших землетрусів тісно пов'язані з кількістю сильних, можна припустити, що малі й великі події є наслідком одного і того самого механічного процесу. Вважається, що ступеневий розподіл свідчить про самоорганізовану критич-

ність. Проте для того, щоб перевірити теорію, треба було зрозуміти, як можна імітувати процес, що викликає землетруси.

Зазвичай вважають, що землетруси виникають через механізм злипання – прослизання: блоки земної кори злипаються, а потім ковзають відносно інших блоків, створюючи розломи. Коли один блок ковзає відносно іншого, напруга знімається і розповсюджується на сусідні райони.

Теорія самоорганізованої критичності дає простий прогноз динаміки піщаної купи: коли на купу падає одна піщинка, вона зазвичай викликає скочування невеликої кількості піщинок, але часто породжує і велику лавину. Для перевірки цього прогнозу нещодавно провели експеримент.

Найважчою проблемою було створення пристрою, який повільно додавав би до купи піску по одній піщинці. На лабораторному стенді встановили мотор із регульованою швидкістю обертання вала і закріпили на валу колбу на 250 мл, до якої була прикріплена капілярна трубка завдовжки 23 см із внутрішнім діаметром 2 мм. Колбу заповнювали піском і нахиляли її приблизно на 2° нижче горизонту, щоб піщинки прослизали в капілярну трубку, але не пролітали крізь неї.

Під час обертання колби навколо осі зі швидкістю близько 60 об/хв піщинки шикувалися в капілярній трубці і рухалися ланцюжком до її кінця. Регулюючи кут нахилу колби і швидкість обертання мотора, можна було налаштувати апарат так, щоб кожні 15 с падала одна піщинка. Отвір капілярної трубки знаходився приблизно на відстані 10 см над чашкою аналітичних терезів.

Терези мали точність 0,0001 гр і допускали зважування до 100 гр. Одна піщинка важила приблизно 0,0006 гр. Купа з діаметром в основі 4 см важила близько 15 гр.

Як підкладку для піщаних куп використовували круглі пластини діаметром від 1 до 8 см. Кожна пластина була прикріплена до стержня завдовжки 2,5 см і діаметром 0,5 см. Стержень, у свою чергу, спирався на пластину діаметром 4 см. Увесь вузол, що нагадував котушку, знаходився на чаші терезів. Стержень був оточений металевим ободом, який не давав змоги піску, що зсипається з купи, потрапляти на чашу терезів; тим самим терези вимірювали тільки вагу купи.

Самі терези були екрановані. Щоб пісок не здували повітряні потоки, всю конструкцію встановили на масивному столі, що не допускав вібрацій. Для збору всього апарата було витрачено близько 10 год.

У перших експериментах використовувалися частинки оксиду

алюмінію, але незабаром виявилось, що пісок з пляжів Лонг-Айленда був не гірший. Пісок готували підсушуючи в печі та фільтруючи піщинки спочатку через крупне, а потім через дрібне сито. Відбиралися піщинки, що проходили через крупне сито (вісім перехресних дротів на сантиметр) але затримувалися дрібним ситом (10 перехресних дротів на сантиметр).

Заповнивши колбу піском, дослідники насипали пробну купу на круглу підкладку. Щоб забезпечити усадку піщаної купи до її природної форми, скидали піщинки на купу безперервно протягом декількох годин. Потім спостерігали схід лавини вниз по купі. Коли пісок падав з країв пластини, – вимірювали флуктуації маси купи.

Для управління мотором і контролем за вагами використовували персональний комп'ютер. Коли комп'ютер виявляв зміну маси купи, порівняну з масою піщинки, він зупиняв обертання колби і, тим самим, подачу піску. Після того, як терези заспокоювалися, комп'ютер знов реєстрував масу. Потім він запускав двигун для продовження процесу.

Система була увімкненою протягом двох тижнів, висипавши на 4 см пластини більше ніж 35 000 піщинок. Спостерігали лавину різних розмірів. Під час додавання від однієї до декількох тисяч піщинок зміна маси купи коливалася в діапазоні від однієї до декількох сотень мас піщинок. Такий результат вказував на те, що купа піску самоорганізовувалася до критичного стану.

Проте, коли дослідники збільшили діаметр підкладки піщаної купи, узявши пластину діаметром 8 см, виявилось, що купа породжує тільки велику лавину (масою близько 4 г), тому було зроблено висновок, що купи цього розміру не мають самоорганізовану критичність. Натепер залишається незрозумілим, чому тільки малі купи природно еволюціонують до критичного стану.

Теорія самоорганізованої критичності не тільки пояснює еволюцію землетрусів, але й описує розподіл їх епіцентрів. Упродовж більш ніж десяти років дослідники знали, що степеневі закони можуть описувати розподіл таких об'єктів як гори, хмари, галактики і вихори в турбулентних рідинах. Кількість об'єктів всередині, наприклад, сфера радіуса  $r$  пропорційна  $r^D$  у степені, що є деякою константою.

Такий розподіл об'єктів називають фракталом, який описує і розподіл епіцентрів землетрусів. Хоча фрактали трапляються в природі всюди, дослідники нещодавно почали розуміти динаміку, яка їх створювала. Пропонуємо розглядати фрактали як миттєві зрізи критичних самоорганізованих процесів. Фрактальні структури

і шум мерехтіння є, відповідно, просторовими і тимчасовими «відбитками» самоорганізованої критичності.

Прогнозування землетрусів все ще залишається важким завданням. Стійкість земної кори, мабуть, вельми чутлива до початкових умов системи. Іноді на розвиток землетрусу можуть вплинути умови далекі від його епіцентру.

Для оцінювання точності прогнозів динамічної системи, необхідно знати з деякою точністю початкові умови, а також правила динаміки. У нехаотичних системах, таких як Земля, що рухається по орбіті навколо Сонця, невизначеність залишається постійною: можна визначити положення Землі на момент через мільйон років майже з тією ж точністю, з якою можна знати теперішнє її положення.

У хаотичних системах несуттєва початкова невизначеність збільшується з часом експоненціально. Більш того, під час спроби прогнозувати на більш далеке майбутнє, об'єм інформації, який необхідно зібрати про початкові умови, також збільшується експоненціально. Це експоненціальне зростання, зазвичай, перешкоджає довгостроковим прогнозам.

Для перевірки точності прогнозів описаної моделі землетрусів, провели дві імітації критичного стану. Ці імітації відрізняються наявністю малої випадкової сили, що діє на кожен блок і є малою невизначеністю відносно початкових умов. Під час запуску цих двох моделей невизначеність із часом зростає, але набагато повільніше, ніж в хаотичних системах. Невизначеність зростає за степеневим, а не за експоненціальним законом. Система еволюціонує на межі хаосу. Ця поведінка, названа слабким хаосом, є результатом самоорганізованої критичності.

Слабкий хаос істотно відрізняється від повністю хаотичної поведінки. Повністю хаотичні системи характеризуються інтервалом часу, виходити за межі якого під час прогнозування неможливо. У слабохаотичних системах такої характеристики немає, і тому вони допускають довгострокове прогнозування.

Оскільки виявлено, що всі критичні самоорганізовані системи є слабохаотичними, то вважатимемо, що слабкий хаос дуже поширений в природі. Було б, звичайно, цікаво дізнатися, чи дійсно неточність прогнозів землетрусів, економічних прогнозів і прогнозів погоди зростає з часом за степеневим, а не експоненціальним законами?

Наприклад, якщо погода – явище хаотичне і 100 обсерваторій збирають достатньо інформації для прогнозу погоди на два дні наперед, то 1000 обсерваторій могли б забезпечити прогноз на чотири дні наперед. Якщо ж погода – слабохаотичне явище, то 1000

обсерваторій могли б забезпечити прогноз на 20 днів наперед.

Замінивши поняття і скориставшись уявою, модель купи піску або землетрусу можна трансформувати для багатьох ситуацій. Було, наприклад, показано, що потік автомобілів на шосе описують шумом мерехтіння. Рух з поперемінним рухом з місця і зупинкою можна розглядати як критичну лавину, що розповсюджується потоком автомобілів.

Системи з великою кількістю взаємодіючих елементів природно еволюціонують до критичного стану, в якому незначна подія може призвести до катастрофи. Явище самоорганізованої критичності пояснює динаміку землетрусів, ринків і екосистем.



## Розділ 16. СТОХАСТИЧНІ МЕТОДИ

### 16.1. Флуктуації в реальних вимірюваннях

Викладений аналіз оснований на детермінованому, причинному описі, поданому рівняннями хімічної кінетики. Проте є багато випадків, для яких такий опис може виявитися неадекватним. Головна причина цього полягає в тому, що у макроскопічних системах саме існування багатьох степенів вільності автоматично припускає виникнення флуктуації. Позначимо число степенів вільності через  $N$ . У типових системах з не дуже розрідженими фазами порядок величини  $N$  становить  $10^{23}$ . Макроскопічний опис цих систем ґрунтується на використанні обмеженої кількості змінних  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , причому  $n \ll N$ . Такими змінними можуть бути, наприклад хімічні потенціали або концентрації, температура, тиск тощо. У макроскопічному стані завжди відбуваються швидкі переходи між різними атомними станами. Це призводить до відхилень макроскопічних змінних від визначених стандартних значень, що відповідають результатам експериментальних спостережень з використанням макроскопічних приладів. Ці відхилення у вигляді випадкових подій і є флуктуаціями. Після виникнення макроскопічної флуктуації система поводить себе згідно з відповідними феноменологічними законами.

Флуктуації, хоча і є вимірними величинами, мають залишатися малими порівняно з макроскопічними величинами. У межах статистичної механіки це можна строго довести для систем, що перебувають у стані термодинамічної рівноваги, за винятком точок фазового переходу типу точки перетворення рідини в пару. У цих випадках малі флуктуації (за наявності критичної точки) або кінцеві флуктуації (за наявності фазових переходів першого роду, пов'язаних з утворенням зародків нової фази й метастабільністю) підсилюються, досягають макроскопічного рівня й призводять до виникнення нової фази в системі. Така картина відповідає макроскопічним перетворенням з різкими змінами певних термодинамічних величин. Крім того, вихідна стандартна фаза стає нестійкою. У критичній області поблизу нестійкості поведінка системи має виражений когерентний характер, що часто супроводжується виникненням довгохвильових флуктуацій або втратою просторової симетрії.

Раніше зазначалося, що в нелінійних системах, далеких від термодинамічної рівноваги, також можуть виникати різні переходи й нестійкості. Тому необхідна теорія флуктуації поблизу сильно

нерівноважних станів, що доповнить макроскопічний опис, особливо поблизу нестійкостей систем. Мета полягає в тому, щоб проаналізувати роль флуктуації під час спонтанного виникнення розподілів у дисипативних структур. Розглянемо тільки внутрішні флуктуації, тобто флуктуації, що виникають у самій системі.

## 16.2. Особливості стохастичного опису

Теорія флуктуації є розділом статистичної механіки. Нехай  $\rho(\{r_i\}, \{p_i\}, t)$  – густина ймовірності розподілу  $N$  частинок, що утворюють систему у просторі координат  $r_i$ , й імпульсів  $p_i$ . Якщо функція  $\rho$  відома, то мікроскопічний стан системи вважають визначеним. Розглянемо сукупність змінних  $\{a_i\}$ , що визначають макроскопічний стан тієї самої системи. У загальному випадку маємо  $a_i = a_i(\{r_i\}, \{p_i\})$ . Нехай  $P(\{a_i\})\{da_i\}$  – ймовірність того, що система перебуває в такому макроскопічному стані, у якому всі змінні  $a_i$  перебувають в інтервалі від  $\{a_i\}$  до  $\{a_i + da_i\}$ . Цю ймовірність виражають через функцію  $\rho$  так:

$$P(\{a_i\}, t)\{da_i\} = \int_{(a_i, a_i+da_i)} \{dr_i\} \{dp_i\} \rho(\{r_i\}, \{p_i\}, t). \quad (16.1)$$

Якщо розкласти  $P$  поблизу деякого стандартного стану  $\{a_i^0\}$ , то рівність (16.1) може дати ймовірність різних флуктуації поблизу цього стану.

Для системи, що перебуває у стані термодинамічної рівноваги, функція  $\rho$  відома, і рівність (16.1) може бути відправною точкою для побудови теорії флуктуації. Однак для нерівноважних систем застосування співвідношення (16.1) ускладнене, оскільки складно визначити вид функції  $\rho$ . З цієї причини застосовують метод, проміжний між макроскопічним описом і підходом, характерним для статистичної механіки. Основна ідея цього методу, відомого за назвою стохастичної теорії, полягає у тому, що обумовлені флуктуаціями зміни змінних  $a_i$  розглядають як випадкові, або ймовірнісні процеси, для яких не характерна однозначна залежність від часу. Отже, спостереження за різними елементами з ансамблю досліджуваних систем дає різні функції  $a_i(t)$ , тому необхідно розглядати відповідні розподіли ймовірностей, такі як:

- 1)  $P_1(\{a\}, t)\{da\}$  = ймовірність знаходження  $\{a\}$  в інтервалі  $\{a\}, \{a + da\}$  у момент часу  $t$ ;
- 2)  $P_2(\{a_1\}t_1; \{a_2\}t_2) \{da_1\}\{da_2\}$  = ймовірність знаходження  $\{a\}$  в інтервалі  $\{a_1\}, \{a_1+da_1\}$  у момент часу  $t_1$  і в інтервалі  $\{a_2\}, \{a_2+da_2\}$  у момент часу  $t_2$ ,

де

$$\sum_{\{a_i\}} P_i(\{a_1\}t_1; \dots; \{a_j\}t_j) = 1; \quad P_j \geq 0; \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Доцільно характеризувати розподіл ймовірностей за допомогою декількох «типових величин». Найбільш важливою з таких величин є математичне сподівання, або середнє значення. Його визначають за формулою

$$\langle a_k \rangle_t = \sum_{\{a\}} a_k P_1(\{a\}, t).$$

За визначенням  $\langle a_k \rangle$  не залежить від значення флуктуації. З'ясуємо, наскільки вони великі відносно середніх значень. У розгляд введемо математичні сподівання комбінацій випадкових змінних другого та вищих порядків наприклад як

$$\langle a_k a_l \rangle_t = \sum_{\{a\}} a_k a_l P_1(\{a\}, t) \quad \text{і т. д.} \quad (16.3)$$

Після розкладання  $a_k$  поблизу середнього значення  $\langle a_k \rangle$  у формулі (16.3) можна перейти до дисперсій, визначених співвідношеннями

$$\langle \delta a_k \delta a_l \rangle = \langle (a_k - \langle a_k \rangle)(a_l - \langle a_l \rangle) \rangle \quad \text{і т. д.}$$

Зокрема отримаємо такі формули:

$$\langle (\delta a_k)^2 \rangle = \langle a_k^2 \rangle - \langle a_k \rangle^2;$$

$$\langle \delta a_k \delta a_l \rangle = \langle a_k a_l \rangle - \langle a_k \rangle \langle a_l \rangle \quad \text{і т. д.}$$

Уявлення про розподіл ймовірностей відоме зі статистики й теорії ігор. Звернемо увагу на те, що існує кілька розподілів, які трапляються у великій кількості завдань, від генетики й економіки до теорії ігор. Існує три основних розподіли, зв'язок між якими розглянуто в теорії ймовірностей: а) *біноміальний*; б) *пуассонівський*; в) *нормальний* або *гаусовий*.

Біноміальний і пуассонівський розподіли типові для завдань, що містять схему Бернуллі, тобто незалежні події, що повторюються (або випробування), у кожному з яких можливі тільки два результати, причому ймовірність того або іншого результату від випробування до випробування не змінюється. Зазвичай позначають ці ймовірності як  $p$  та  $q$  і використовують встановлену термінологію теорії ігор, пов'язуючи  $p$  з успіхом, а  $q$  з невдачею. Очевидно,  $p \geq 0$ ;  $q \geq 0$  і  $p + q = 1$ .

У завданнях з біноміальним розподілом зазвичай розглядають лише повну кількість успіхів, що виникають у послідовності  $n$  випробувань Бернуллі, безвідносно до їх порядку. Можна показати,

що ймовірність того, що  $n$  випробувань призведуть до  $k$  успіхів і  $(n - k)$  невдач ( $0 \leq k \leq n$ ) становить

$$P_k(k, n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Середнє значення й дисперсія, характерні для цього розподілу, виражаються відповідно так:

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &= np, \\ \langle \delta k^2 \rangle &= np(1-p). \end{aligned}$$

Припустимо, що обрали довільний інтервал часу  $t$  і розділили його на підінтервали  $1/n$ . Якщо в якомусь конкретному підінтервалі міститься хоча б одна з випадкових подій, то назвемо такий випадок успіхом. Розглянемо послідовність випробувань Бернуллі з однаковою ймовірністю  $p_n$  успіхів. Повна кількість таких випробувань є найближча до  $nt$  цілого. Введемо таке  $\lambda$ , що за  $n \rightarrow \infty$ ,

$$p_n \approx \frac{\lambda t}{n}.$$

Тоді можна показати, що за  $n \rightarrow \infty$  ймовірність виявлення рівно  $k$  успіхів під час випробувань записують розподілом

$$P_p = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Середнє значення й дисперсія кількості успіхів становитимуть відповідно

$$\begin{aligned} \langle k \rangle &= \lambda t, \\ \langle \delta k^2 \rangle &= \lambda t = \langle k \rangle. \end{aligned} \tag{16.4}$$

Гаусовий розподіл виникає в граничних випадках у результаті застосування закону великих чисел.

### 16.3. Закон великих чисел

Якщо  $\{a_k\}$  – послідовність взаємно незалежних і однаково розподілених випадкових змінних, і якщо існує математичне сподівання  $\langle a_k \rangle = \langle a \rangle$ , то для кожного  $\varepsilon > 0$  за  $n \rightarrow \infty$  справедливе співвідношення

$$P \left\{ \left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - \langle a \rangle \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0.$$

Інакше кажучи, ймовірність того, що незважене середнє  $(a_1 + \dots + a_n)/n$  відрізняється від справжнього середнього значення на

величину, меншу будь-якого заздалегідь заданого  $\varepsilon$ , прямує до одиниці.

**Центральна гранична теорема.** Припустимо, що крім середнього значення існує дисперсія  $\langle (\delta a_k)^2 \rangle = \sigma^2$ , тоді для кожного заданого  $\beta$  за  $n \rightarrow \infty$  використовують співвідношення

$$P = \left\{ \frac{a_1 + \dots + a_n - n\langle a \rangle}{\sigma n^{1/2}} < \beta \right\} \rightarrow \Phi(\beta), \quad (16.5 \text{ а})$$

де  $\Phi(\beta)$  – нормальна функція розподілу,

$$\Phi(\beta) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\beta} dy e^{-(1/2)y^2}. \quad (16.5 \text{ б})$$

Підінтегральну функцію в рівності (16.5 б) називають гаусовою густиною ймовірності. Зазначимо, що якщо виконуються умови застосовності центральної граничної теореми, то порядок величини дисперсії щодо середнього значення визначається автоматично. Насправді, нехай  $A$  – деяка екстенсивна випадкова змінна:

$$\begin{aligned} A &= a_1 + \dots + a_n; \\ \langle A \rangle &= n \langle a \rangle, \end{aligned}$$

де  $n$  характеризує розмір системи. Відповідно до співвідношення (16.5 а) дисперсія  $\langle \delta A \rangle$  обмежена величиною порядку  $\sigma^2 n$ , тобто

$$\langle \delta A^2 \rangle \propto \langle A \rangle$$

Інакше кажучи, порядок величини найбільш імовірної флуктуації  $\delta A$  пов'язаний з  $\langle A \rangle$  співвідношенням

$$\delta A \propto \langle A \rangle^{1/2} \propto n^{1/2}.$$

Отже, зі збільшенням розміру системи, відносна роль флуктуацій зменшується:

$$\frac{\delta A}{\langle A \rangle} \approx \frac{\delta A}{n} \propto \frac{1}{n^{1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Такий результат маємо і у разі біноміального й пуассонівського розподілів розглянутих вище.

Розглянемо тепер випадок, коли відношення  $\delta A / \langle A \rangle$  прямує до нуля повільніше, ніж  $n^{-1/2}$ , залишається постійним або навіть прямує до нескінченності за  $n \rightarrow \infty$ . У цьому разі вже не можна говорити про чіткий поділ масштабів макроскопічних середніх і флуктуації. Отже, стан системи вже не можна характеризувати середнім значенням  $\langle a \rangle$  або  $\langle A \rangle$ . Інакше кажучи, припустиме законом великих чисел ототожнення середньої арифметичної великої кількості випадкових значень і ймовірного середнього не

зовсім осмислене. У таких випадках говорять про порушення закону великих чисел. Ця ситуація характерна для фазових переходів у рівноважних системах, а також для нерівноважних нестійкостей, що призводять до виникнення дисипативних структур.

Зауважимо, що тоді, коли у разі пуассонівського розподілу середнє значення й дисперсія пов'язані співвідношенням (16.4), за наявності процесу, що описується гаусовим розподілом, середнє значення й дисперсія фігурують як дві незалежні величини.

У стохастичних завданнях, пов'язаних з хімічними реакціями, трапляється переважно пуассонівський розподіл.

#### 16.4. Марковські процеси

У попередньому розділі розглянуто, переважно, незалежні випробування, для яких спільна ймовірність послідовності подій має властивість мультиплікативності. У теорії марковських процесів припускається розгляд таких випадків, коли результат певного випробування може залежати від результату попереднього випробування. Для цього вводять умовні ймовірності  $W_2(\{a_1\}t_1|\{a_2\}t_2)$ , а також нові ймовірності, пов'язані з  $P_i$  в (16.2) так:

$$\begin{aligned} P_1 &= W_1, \\ P_2(\{a_1\}t_1; \{a_2\}t_2) &= W_2(\{a_1\}t_1|\{a_2\}t_2) \times P_1(\{a_1\}, t); \\ \sum_{\{a_1\}} W_2(\{a_1\}t_1|\{a_2\}t_2) &= 1; \quad W_2 \geq 0 \text{ і т. д.} \end{aligned} \quad (16.6)$$

Сукупність чисел, що задовольняють співвідношення (16.6), визначають стохастичну матрицю.

За визначенням процес називають *марковським*, якщо умовна ймовірність  $W_2$  містить всю необхідну інформацію про процес. Інакше кажучи, пам'ять системи обмежена одним кроком, або, у більш загальному випадку, невеликою кількістю кроків. У теорії ймовірності такі процеси трапляються дуже часто. Як найпростіший приклад можна розглянути завдання про випадкові блукання. У момент часу 0 частка перебуває в початковому положенні  $z$ , а в моменти часу 1, 2, 3, ... (або через  $\Delta t$ ;  $2\Delta t$ ; ..., де  $\Delta t = t_i + 1 - t_i$ ) вона переміщується на одиничну відстань у позитивному або негативному напрямках з ймовірністю  $p$  і  $q$  відповідно, залежно від того, що було результатом відповідного випробування – успіх або невдача. Можна розглядати необмежені або обмежені випадкові блукання. Для обмежених випадкових блукань процес завершується під час першого ж досягнення часткою точок 0 або  $a$ , дія яких еквівалентна поглинаючим екранам. Матриця умовних ймовірностей для

таких блукань має вигляд

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . & . & q & 0 & p \\ 0 & . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Інакше кажучи, у кожному із внутрішніх станів (тобто для точок, відмінних від 0 і  $a$ ) можливі переходи праворуч або ліворуч у сусідній стан:

$$W_2(i, t = n | i + 1, t = n + 1) = p;$$

$$W_2(i, t = n | i - 1, t = n + 1) = q.$$

Однак у станах 0 або  $a$  неможливі ніякі переходи – потрапивши в один із цих станів, система залишається в ньому назавжди. Незважаючи на свою простоту, цю модель реалістично описує рух важкої частинки в рідині, що складається з легких частинок. Цей рух називають *броунівським*.

Інакше кажучи, таке саме завдання виникає тоді, коли гравець, що виграє або програє певну суму грошей з ймовірностями відповідно  $p$  та  $q$ . Якщо гравець має початковий капітал  $z$ , а його партнер –  $(a - z)$ , то гра буде тривати, поки капітал гравця або зменшиться до нуля, або збільшиться до  $a$ , тобто доти, поки один із двох гравців не збанкрутує. Це класичний приклад руйнування еквівалентний деяким завданням популяційної генетики, у яких розглядають зникнення мутанта або виду в системі конкуруючих популяцій. Аналогічні завдання вивчають під час дослідження хімічних реакцій з автокаталітичними стадіями. Ще одним прикладом марковських процесів може бути модель Еренфеста. Нехай  $N$  об'єктів (наприклад  $N$  куль) розподілені між двома ящиками  $A$  і  $B$ . Припустимо  $t_2 - t_1 = \Delta t = 1$ . У момент  $t = n$  одну кулю випадково перекладають з одного ящика в другий. Нехай відповідний стан системи визначається кількістю куль у ящику  $A$ , і припустимо, що в момент  $t = n$  у ящику  $A$  є рівно  $k$  куль ( $k \leq N$ ). Тоді ймовірність досягнення в момент  $t = n + 1$  наступного стану, у якому в ящику  $A$  буде  $(k - 1)$  або  $(k + 1)$  куль, залежить лише від кількості куль в  $A$  за  $t = n$ . Отже, розглянута послідовність подій визначає марковський процес. З другого боку, перехід  $k \rightarrow k - 1$  відповідає тому, що куля була витягнута з ящика  $A$ , а перехід  $k \rightarrow k + 1$  – тому, що куля була витягнута з ящика  $B$ . Відповідні умовні ймовірності мають

такий вигляд:

$$\begin{aligned} W_2(k, t = n | k - 1, t = n + 1) &= \frac{k}{N}; \\ W_2(k, t = n | k + 1, t = n + 1) &= 1 - \frac{k}{N}; \\ W_2 &= 0 \text{ (у інших випадках)}. \end{aligned} \quad (16.7)$$

У наведених вище прикладах розглянуто спеціальні типи марковських процесів, у яких ймовірності переходів залежать від  $t_1$  і  $t_2$  тільки через різницю  $\Delta t = t_1 - t_2$ . Такі процеси називають *стаціонарними* марковськими процесами. Використовуючи наведені визначення, для такого процесу можна записати рівняння відносно  $P_2$ , яке називають *рівнянням Чепмена–Колмогорова*:

$$P_2(\{a_1\}; \{a_2\}, t) = \sum W_2(\{a\} | \{a_2\}, \Delta t) \times P_2(\{a_1\}; \{a\}, t - \Delta t) \quad (16.8)$$

для будь-яких значень  $\Delta t$  з інтервалом  $0 \leq \Delta t \leq t$ .

Вважатимемо, що змінні  $\{a\}$  є дискретними. У цьому разі говорять про марковський ланцюг. Для неперервних змінних (наприклад, внаслідок просторових залежностей) суму в рівнянні (16.8) варто замінити інтегралом. Зазначимо також, що в силу визначення  $W_2$  (16.6) рівняння (16.8) нелінійне відносно значення  $P_2$ . Це рівняння можна перетворити до еквівалентного вигляду, в якому невідомою функцією буде  $W_2$ .

Нехай  $\Delta t$  у рівнянні (16.8) визначає тривалість елементарної події, тоді  $W_2(\Delta t)$  є ймовірність того, що за час  $\Delta t$  система зробить один перехід зі стану  $\{a\}$  у стан  $\{a_2\}$ . Оскільки розглядаємо неперервні в часі процеси, зручніше використати ймовірності переходу в одиницю часу. Для цього припустимо  $k = \{a\}$ ,  $l = \{a_2\}$  і введемо такі значення:

$$\omega_{kl} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W_2(k | l, \Delta t)}{\Delta t},$$

що дорівнює ймовірності переходу в одиницю часу між двома різними станами ( $k \neq l$ );

$$-\omega_{kk} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - W_2(k | k, \Delta t)}{\Delta t},$$

що дорівнює ймовірності переходу в одиницю часу зі стану  $k$ .

Очевидно, що

$$\begin{aligned} \omega_{kl} &\geq 0; & (k \neq l); & & \omega_{kk} &\leq 0; \\ \sum_l \omega_{kl} &= 0. \end{aligned}$$



Крім того, використавши рівність (16.6), можна записати

$$\sum_l \omega_{kl} = 0.$$

У припущенні зазначалось, що значення  $\omega_{kl}$  існують і скінченні, тому легко отримати рівняння для ймовірностей  $P_1(\{a\}, t) = P\{k, t\}$ , підсумувавши рівняння (16.8) за  $\{a_1\}$  і розклавши  $P(k, t - \Delta t)$  у ряд Тейлора поблизу  $P(k, t)$ . Після цього безпосередньо отримуємо

$$\frac{dP(k, t)}{dt} = \sum_l \omega_{lk} P(l, t) = \sum_{l \neq k} [\omega_{lk} P(l, t) - \omega_{kl} P(k, t)]. \quad (16.9)$$

Отже, зміна  $P$  у часі обумовлена конкуренцією між «накопичувальними» членами, що відповідають переходам  $l \rightarrow k$ , і членами, що відбивають «втрати» під час переходів  $k \rightarrow l$ . Наразі називатимемо співвідношення (16.9) *фундаментальним рівнянням*. Це рівняння відіграє достатньо важливу роль.

Як простий приклад розглянемо спочатку рівняння Чепмена–Колмогорова (16.8) для моделі Еренфеста. З виразу (16.7) після підсумовування за всіма переходами, що приводять до зміни кількості куль  $k$  в одному з ящиків, маємо

$$P(k, t + \Delta t) = \left(1 - \frac{k-1}{N}\right) P(k-1, t) + \frac{k+1}{N} P(k+1, t), \quad (16.10)$$

де  $k = 1, \dots, N-1$ ,  
та

$$P(0, t + \Delta t) = \frac{1}{N} P(1, t);$$

$$P(N, t + \Delta t) = \frac{1}{N} P(N-1, t).$$

У розглянутій моделі  $\Delta t$  дорівнює одиниці. Якщо в граничному випадку  $\Delta t \rightarrow 0$  розкласти ліву частину рівняння (16.10) у ряд за ступенями  $\Delta t$ , то можна показати, що для перетворення цього рівняння у фундаментальне потрібно його поділити на  $\Delta t$  і встановити зміст величин  $(\Delta t)^{-1}(k+1)/N$  у межах  $\Delta t \rightarrow 0$ . Робити це не можна доти, доки для ймовірностей переходів виразу (16.7) не будуть уведені додаткові обмеження.

Повертаючись до рівняння (16.9), можна зробити висновок, що завдання про флуктуації в межах марковських процесів зводяться до побудови й розв'язку такого рівняння у кожний момент часу, що відповідає розглянутому завданню. Структура розв'язку значно залежить від двох чинників. Перший з них є макроскопічний стандартний, поблизу якого відбуваються флуктуації. Зокрема показано, що значний вплив на флуктуації мають зовнішні впливи, що

підтримують систему на віддалі від рівноваги. Другий – вид ймовірностей переходу. У розглянутих вище прикладах, моделі про випадкові блукання й модель Еренфеста ймовірності переходів були або постійними, або лінійно залежними від випадкових змінних функцій. Такі властивості характерні для деяких хімічних ігор. Проте, зазвичай вони мають набагато складніший характер, оскільки визначаються ймовірностями переходів, які є нелінійними функціями випадкових змінних. Нелінійність призводить до нових важливих особливостей порівняно зі звичайними прикладами типу броунівського руху. У кожному разі стохастичне трактування дозволяє отримати додаткову інформацію для порівняння з макроскопічним описом. Під час виконання певних умов макроскопічний опис зводиться до вивчення математичного сподівання стохастичної змінної, тоді як стохастичний опис дозволяє обчислювати дисперсії й інші важливі характеристики.

Дотепер припускали, що за випадковими змінними  $\{a_i\}$ , процес є марковським. Насправді це залежить від вибору змінних і природи процесів, описуваних макроскопічними рівняннями руху. Як приклад розглянемо дифузію  $N$ -колоїдних частинок в об'ємі  $V$ , де кожна частинка здійснює броунівський рух. Локальна густина розподілу  $\rho$ , як відомо, задовольняє закон дифузії Фіка. Припустимо, що для відповідного стохастичного опису в якості змінних обрано координати й імпульси броунівських частинок або число  $X_{\Delta V}(i)$  броунівських частинок в елементі об'єму  $\Delta V$ , що мають імпульси в інтервалі від  $p_i \dots p_i + dp_i$ . Один із класичних результатів теорій ймовірностей полягає в тому, що розглянутий випадковий процес є гаусовим марковським процесом. Зовсім інша ситуація виникає тоді, коли за випадкову змінну розглядають кількість частинок  $X_{\Delta V}$  в елементі об'єму  $\Delta V$  незалежно від їх швидкостей. Можна показати, що відповідний випадковий процес не є марковським. Крім цього, отримати замкнене рівняння відносно  $P(X_{\Delta V}, t)$ , очевидно, неможливо, оскільки залежність цієї величини від ймовірності розподілу координат і швидкостей окремих частинок дуже складна.

### 16.5. Граничний випадок рівноваги

Коротко розглянемо властивості флуктуації в рівноважних системах віддалених від точок фазових переходів. В наш час це питання про рівноважні флуктуації вирішене повністю. Однією з причин цього є те, що в рівноважному стані низка термодинамічних потенціалів досягає екстремальних значень, а саме ентропія максимальна

у замкнутій системі, вільна енергія мінімальна за постійних температури й об'єму тощо.

Розглянемо як термодинамічні потенціали пов'язані з імовірностями флуктуації, спочатку випадок єдиної змінної  $X$ , що описує склад системи. Припустимо, що ця змінна є екстенсивною, і що розглянута ізотермічна система з'єднана з більшим зовнішнім резервуаром, що підтримує відповідний хімічний потенціал  $\mu$  постійним. Відповідно до статистичної механіки, рівноважний стан описують великим канонічним розподілом, який запишемо у такому вигляді:

$$P_{eq} = \exp\left[\beta\Phi(\bar{\mu}, \beta, V)\right] \exp\left\{\beta\left[\bar{\mu}X - E(X)\right]\right\}, \quad (16.11)$$

де  $\Phi$  – узагальнений термодинамічний потенціал;  $\beta$  – зворотна температура (в одиницях сталої Больцмана  $kT$ );  $E$  – внутрішня енергія, що залежить від  $X$  і таких змінних як координати, імпульси та внутрішні енергії частинок.

З рівності (16.11) методом додавання по координатам, імпульсам і внутрішнім станам частинок, що перебувають в об'ємі  $V$ , можна знайти розподіл імовірностей для  $X$ :

$$\begin{aligned} P_{eq}(X) &= A \int \rho_{eq} \{dr_i\} \{dp_i\} = \\ &= A \exp\left[\beta(\Phi + \bar{\mu}X)\right] \int \exp\left[-\beta E(X)\right] \{dr_i\} \{dp_i\}, \end{aligned}$$

де  $A$  – множник нормування. Інтеграл за координатами й імпульсами пов'язаний з вільною енергією  $F(X, \beta, V)$ , що відповідає цьому значенню  $X$  екстенсивної змінної. Отже,

$$P_{eq}(X) = A \exp\left\{\beta\left[\Phi(\bar{\mu}, \beta, V) + \bar{\mu}X - F(X, \beta, V)\right]\right\}. \quad (16.12)$$

Зазначимо, що використовувана в термодинаміці як вільна енергія функція  $F$  відрізняється від величини  $F(X, \beta, V)$  у співвідношенні (16.12). Перша пов'язана з термодинамічним потенціалом  $\Phi$ ,

$$\Phi = \bar{F} - \bar{\mu}\bar{X},$$

де  $X$  – спостережуване в системі макроскопічне значення  $X$ ; та  $F$ ;  $\bar{F} = F(X)$ . Співвідношення (16.12) набуває вигляду

$$P_{eq}(X) = A \exp\left\{-\beta\left[F - \bar{F} - \bar{\mu}(X - \bar{X})\right]\right\}. \quad (16.13)$$

Формально застосувавши до  $F$  відомі термодинамічної тотожності, отримуємо

$$(\Delta F)_{TV} \equiv F - \bar{F} = \mu\Delta X = \mu(X - \bar{X}) = -T(\Delta S)_{EV},$$

де  $\Delta S$  обчислюють за постійних енергії й об'єму, а не за постійних

$T$  і  $V$ . Отже, внаслідок наявності члена  $\mu(X - \bar{X})$  у співвідношенні (16.13) під час розкладання  $F$  (або  $S$ ) поблизу макроскопічного значення членів першого порядку в  $\Delta F$  (або  $\Delta S$ ) немає. Якщо цю внутрішню різницю ентропії позначити  $\Delta_i S$ , то можна записати

$$P_{eq}(X) \propto \exp\left[\frac{1}{k_B}(\Delta_i S)\right]. \quad (16.14)$$

Причиною того, що  $\Delta_i S$  є лише частиною  $\Delta S$  – обумовлено внутрішніми флуктуаціями. Систематичні зовнішні збурювання, що змінюють величину  $X$ , впливають тільки на члени першого порядку. Відповідно до умов маємо  $\Delta_i S < 0$ .

Співвідношення (16.14) відображає відому формулу Ейнштейна, що описує розподіл імовірностей флуктуації. Хоча ми розглядали лише флуктуації змінних, що описують склад системи, у разі більш загальних умов можна отримати такий самий вираз, що описує флуктуації інших екстенсивних термодинамічних величин. Зазначимо, що замість відкритої системи, що перебуває в контакт з резервуаром, можна застосувати отримані результати для обчислення ймовірностей флуктуації всередині малого об'єму  $\Delta V$  великої ізольованої системи з об'ємом  $V$ . В останньому випадку підсистема з об'ємом  $V - \Delta V$ , що оточує підсистему з об'ємом  $\Delta V$ , служить як резервуар маси й тепла.

У разі малих флуктуацій поблизу рівноважного стану в розкладанні правої частини співвідношення (16.14) можна враховувати тільки перші ненульові члени. У цьому разі отримуємо таку формулу:

$$P_{eq}(X) \propto \exp\left[\frac{1}{2k_B}(\delta^2 S)_e\right],$$

де  $1/2(\delta^2 S)_e$  – надлишкова ентропія. Такий розподіл імовірностей можна безпосередньо узагальнити на випадок декількох флуктуаційних змінних. Повертаючись до співвідношення для  $\delta^2 S$ , отримаємо

$$P_{eq}(\{X_i\}) \propto \exp\left[-\frac{1}{2k_B T} \sum_{ij} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial X_i}\right)_{eq} \delta X_i \delta X_j\right], \quad (16.15)$$

де  $X_i$  – кількість частинок компонентів 1, ...,  $n$ ;  $\delta X_i = X_i - \bar{X}_{eqi}$ . Як зазначалося, квадратична форма в показнику експоненти визначена позитивно. Отже, у рівноважному стані розподіл флуктуації є гаусовим. Точка максимуму розподілу  $X_i$ , пов'язана з найбільш імовірним станом системи, а також середні значення  $\langle X_i \rangle$  збігаються й визначають макроскопічні значення  $\bar{X}_{eqi}$ :

$$\langle X_i \rangle_{eq} = X_i^m = \bar{X}_{eqi}, \quad (16.16)$$

Крім того, якщо розглядати  $\delta X_i$  як неперервні змінні, то за допомогою безпосередніх обчислень можна показати, що середньоквадратичне відхилення, або дисперсія флуктуації має такий вигляд:

$$\langle \delta X_i \delta X_j \rangle_{eq} = k_B T \left( \frac{\partial \mu}{\partial X} \right)_{eqij}^{-1}, \quad (16.17)$$

де  $(\partial \mu / \partial X)^{-1}$  – матриця, зворотна матриці  $(\partial \mu_i / \partial X_j)_{eq}$ . У випадку розрідженої системи замість  $\mu$  можна підставити його вираз, у результаті отримуємо

$$\langle \delta X_i \delta X_j \rangle_{eq} = \langle X_i \rangle_{eq} \delta_{ij} = \bar{X}_{eq} \delta_{ij}. \quad (16.18)$$

Отже, у цьому разі дисперсія має пуассонівський вигляд. У граничному випадку розведеного розчину це впливає безпосередньо з рівнянь (16.11) і (16.12). Маємо

$$P_{eq}(X) \propto \frac{e^{\beta \theta}}{X!} \left\{ \int dr_i dp_i \exp[\beta(\mu - \varepsilon_i)] \right\}^X,$$

де за допомогою множника  $1/X!$  враховується нерозрізненість часток. Відповідно до визначення хімічного потенціалу

$$\int dr_i dp_i \exp[\beta(\mu - \varepsilon_i)] = \langle X \rangle_{eq} = \bar{X}_{eq};$$

$$P_{eq}(X) = A \frac{\langle X \rangle_{eq}^X}{X!}. \quad (16.19)$$

З умови нормування випливає, що  $A = e^{-\langle X \rangle}$ . Отже, співвідношення (16.19) визначає пуассонівський розподіл із середнім значенням  $\langle X \rangle$ , що відповідно до рівняння (16.16) дорівнює макроскопічному, рівноважному значенню  $X$ .

Можлива також інша інтерпретація співвідношень (16.15)–(16.18). Насамперед з рівності (16.18) випливає, що величина  $\langle (\delta X_i)^2 \rangle^{1/2} / X_{ieq}$ , що є відносною величиною флуктуації, близька за порядком до величини

$$\frac{\langle (\delta X_i)^2 \rangle_{eq}^{1/2}}{\bar{X}_{i,eq}} \propto \frac{1}{\bar{X}_{i,eq}^{-1/2}}. \quad (16.20)$$

У макроскопічній системі величина  $X_{i,eq} \rightarrow \infty$  (16.20) стає надзвичайно малою. Інакше кажучи, у цьому разі між макроскопічним і флуктуаційним описами є чітке розмежування. Цьому відповідає також те, що максимум розподілу ймовірностей (16.15) розташовано за макроскопічного значення  $X_{i,eq}$ . Отже, флуктуації, що відповідають значним відхиленням від макроскопічного значення, приводять до малої ймовірності конфігурацій системи. Всі ці положення майже

еквівалентні твердженню про стійкість стану рівноваги системи за умови позитивної визначеності квадратичної форми, утвореної на основі матриці коефіцієнтів  $(\partial \mu_i / dX_i)_{eq}$ , тобто за умови  $\Delta_i S < 0$ . Ця умова порушується лише тоді, коли система перебуває поблизу точки переходу, що призводить до поділу різних фаз.

Теорія флуктуації основана на термодинаміці рівноважних процесів і статистичній механіці. Ці результати можна було б отримати з фундаментального рівняння (16.9) у найзагальнішому випадку рівноважної системи, за умови, якщо зроблений адекватний вибір випадкових змінних і ймовірності переходів  $\omega_{kl}$  побудовані так, що вони правильно відбивають рівноважні умови. Вирішальну роль тут відіграє принцип детальної рівноваги. Відповідно до цього принципу, кожна елементарна стадія в системі типу хімічної реакції здійснюється з тією самою ймовірністю, що й зворотна їй стадія, яка впливає із прямої оборотності часу.

### 16.6. Флуктуації в нерівноважних системах

Успішне застосування теорії флуктуації Ейнштейна для рівноважних систем свідчить про те, що узагальнення цієї теорії на нерівноважні системи може ґрунтуватися на аналогічних ідеях:

- використання відповідного потенціалу, що узагальнює поняття термодинамічного потенціалу у разі дуже нерівноважних систем;
- використання екстенсивних випадкових змінних, що належать до системи в цілому.

Це може бути обґрунтоване тим, що в основі співвідношення (16.16)–(16.18) містять універсальну залежність від об'єму системи ( $V$ )

$$\langle (\delta X)^2 \rangle = \alpha V; \quad \alpha = \text{const},$$

звідки впливає властивість пропорційності між дисперсіями й об'ємами систем різних розмірів.

Ці дослідження було розпочато з вивчення простих прикладів, які насамперед підтвердили можливість побудови теорії нерівноважної флуктуації, основаної на використанні надлишкової ентропії  $\delta^2 S$ . Вивчення нелінійних систем призвело до несподіваного висновку про те, що ці ідеї застосовують лише в спеціальних випадках. Розглянемо можливість визначення потенціалу, за допомогою якого задавалася б ймовірність якої-небудь флуктуації. Як зазначалося, такий потенціал знайти не вдається, за винятком систем з однією змінною й систем, що перебувають в межах лінійності необоротних процесів. Для таких систем можна показати, що

потрібна функція має вигляд

$$P \propto \exp(\Delta\pi),$$

де  $\Delta\pi$  – надлишок вільної енергії, який також називають *кінетичним потенціалом*.

За наявності нестійкостей  $\Delta\pi$  має декілька властивостей, аналогічно виразу Ландау–Гінзбурга, що визначає вільну енергію в критичній області рівноважного фазового переходу другого роду. Всі ці результати не використовують у системах, що мають більше однієї змінної й перебувають у дуже нерівноважних умовах; крім того, немає можливих способів їх узагальнення на такі системи.

Розглянемо проблему вибору випадкових змінних. Як у рівновазі, так і у випадку сукупності нерівноважних одномолекулярних реакцій найзагальнішого вигляду було показано, що коректний опис флуктуації можливий за допомогою екстенсивних величин, що належать системі в цілому. У випадку нелінійних реакцій, що проходять далеко від рівноваги, був отриманий результат, відповідно до якого дисперсія флуктуації змінюється якісно у міру збільшення довжини флуктуації. Дрібномасштабні флуктуації, що впливають лише на область із розмірами порядку середньої довжини вільного пробігу, можна описати безпосереднім узагальненням теорії Ейнштейна. Єдина відмінність від рівноважного випадку полягає у тому, що параметри у виразі для розподілу ймовірностей (рівняння (16.15)) обчислюють у нерівноважному стандартному стані. У цьому разі виникає така сама ситуація, як і в кінетичній теорії газів під час введення поняття про локальну рівновагу. Отримана функція розподілу описує нерівноважність системи, проте має такий самий вигляд, як і у випадку рівноважності. Відмінність полягає у тому, що внаслідок нерівноважності змінні, що характеризують стан, можуть змінюватись як у часі, так і в просторі.

На відміну від дрібномасштабних поведінка крупномасштабних флуктуацій, які охоплюють макроскопічні об'єми, що можна порівняти з об'ємом системи, мають чіткий нерівноважний характер. За наявності нерівноважності такі флуктуації можуть підсилюватися й переводити систему в новий стан, відмінний від початкового. Також не вдалося встановити прості універсальні закони флуктуації, що відповідають розподілу пуассонівського типу.

Конкретніший опис флуктуації в нерівноважних системах обов'язково повинен бути локальним, що дозволяє розглянути флуктуації різного масштабу й їх просторову кореляцію.

## Розділ 17. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТІ

### 17.1. Ймовірнісна модель експерименту зі скінченною кількістю результатів

Розглянемо експеримент, де всі можливі результати описуються скінченною кількістю результатів  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$ , при цьому не суттєва природа цих результатів, важливо лише те, що їх кількість  $N$ -скінченна.

Результати  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N$  називатимемо *елементарними подіями*, а їх сукупність  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  – скінченим простором елементарних подій чи простором результатів.

Зазвичай експериментаторів цікавить не конкретний результат досліджень, а те чи належить цей результат до тієї чи іншої підмножини всіх результатів. Всі підмножини  $A \subseteq \Omega$ , для яких за умовами експерименту можлива відповідність одного з двох типів: «результат  $\omega \in A$ » чи «результат  $\omega \notin A$ » називають *подіями*.

Виходячи з деякої заданої системи множин, що є подіями, можна створювати нові події, які відповідають конструкціям висловлень з логічними зв'язками «чи», «та» і «не», що мовою теорії множин відповідає операції «об'єднання», «перетину» та «доповнення».

Якщо  $A$  та  $B$  – дві множини, то під їх *об'єднанням*, яке позначають  $A \cup B$ , мають на увазі множину, що складається з точок, які входять чи в  $A$ , чи в  $B$ :

$$A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ або } \omega \in B\}.$$

Мовою теорії ймовірності  $A \cup B$  – подія, яка полягає в тому, що відбулася або подія  $A$ , або подія  $B$ .

*Перетином* двох множин  $A$  та  $B$ , що позначають  $A \cap B$ , чи  $AB$ , є множина, що складається з точок, які входять і в  $A$ , і в  $B$ :

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ і } \omega \in B\}.$$

Подія  $A \cap B$  полягає в тому, що одночасно відбулася і подія  $A$ , і подія  $B$ .

Якщо  $A$  – деяка множина  $\Omega$ , то під її *доповненням*, яке позначають  $\bar{A}$ , мають на увазі множину точок  $\Omega$ , що не входить в  $A$ .

Якщо через  $B \setminus A$  позначають *різницю* множин  $B$  та  $A$ , тобто множину точок, що входить у  $B$  та не входить у  $A$ , то  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ . Мовою теорії ймовірності  $\bar{A}$  – це подія, яка полягає в тому, що подія  $A$  не відбувається.



Якщо множини  $A$  та  $\bar{A}$  не мають спільних точок, то множина  $A \cap \bar{A}$  є порожньою. Для порожньої множини використовують позначення  $\emptyset$ . У теорії ймовірності множину  $\emptyset$  називають *неможливою* подією, а множину  $\Omega$  – *необхідною*, чи *достовірною* подією.

Якщо розглядати деяку систему  $\mathcal{A}_0$  множин  $A \subseteq \Omega$ , то за допомогою теоретично-множинних операцій  $\cup$ ,  $\cap$  та  $\setminus$  можна з елементів  $\mathcal{A}_0$  побудувати нову систему множин, які також є подіями.

Приєднуючи до цих подій достовірну та неможливу події  $\Omega$  та  $\emptyset$ , отримуємо систему множин  $\mathcal{A}$ , яка є *алгеброю*, тобто такою системою підмножин множини  $\Omega$ , що

–  $\Omega \in \mathcal{A}$ ;

– якщо  $A \in \mathcal{A}$ ,  $B \in \mathcal{A}$ , то множини  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  також належать  $\mathcal{A}$ .

Діаграми Ейлера-Венна для різних варіантів взаємодії множин показано на рис. 17.1–17.4.

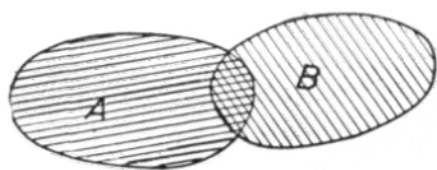


Рис. 17.1. Об'єднання  $A \cup B$  множин  $A$  та  $B$  включає всі елементи  $A$  та  $B$

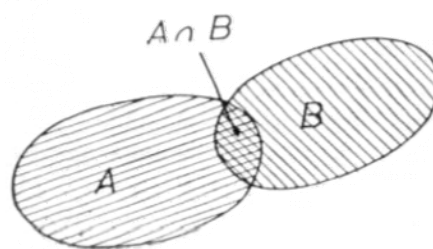


Рис. 17.2. Перетин  $A \cap B$  множин  $A$  та  $B$

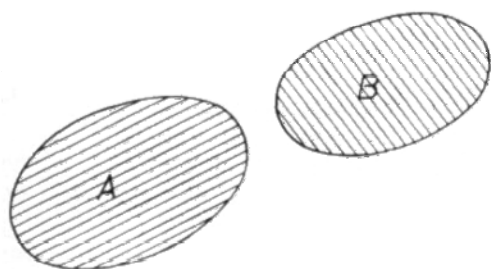


Рис. 17.3. Множини, що не перетинаються, не мають спільних елементів

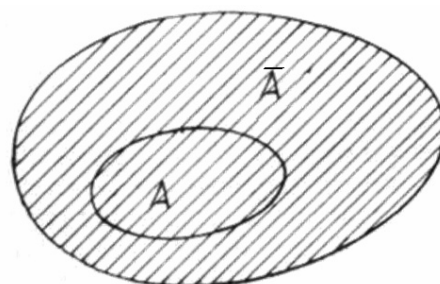


Рис. 17.4. Множина розкладена на  $A$  та додаткову множину  $\bar{A}$

Кожній елементарній події (результату)  $\omega_i \in \Omega, i = 1, \dots, N$  можна приписати деяку «вагу», що позначають  $p(\omega_i)$ , та називають *ймовірністю* результату  $\omega_i$ , який вважатимемо таким, що задовольняє

такі умови:

а)  $0 \leq p(\omega_i) \leq 1$  (невід'ємність);

б)  $p(\omega_1) + p(\omega_2) + \dots + p(\omega_N) = 1$  (нормування).

Ймовірність  $P(A)$  будь-якої події  $A \in \mathcal{A}$  визначають за формулою

$$P(A) = \sum_{\{i: \omega_i \in A\}} p(\omega_i).$$

Із визначення ймовірності випливають такі властивості:

1)  $P(\emptyset) = 0$ ;

2)  $P(\Omega) = 1$ ;

3)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ;

4) якщо  $A \cap B = \emptyset$ , то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ ;

5)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ .

Отже, трійка  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , де  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ ,  $\mathcal{A}$  – деяка алгебра підмножин  $\Omega$ ,  $P = \{P(A); A \in \mathcal{A}\}$ , визначає *ймовірнісну модель* чи *ймовірнісний простір*, експерименти з кінцевим простором результатів  $\Omega$  та алгеброю подій  $\mathcal{A}$ .

## 17.2. Деякі класичні моделі та розподілення

Нехай монету підкидають  $n$  разів та результат спостережень записують у вигляді набору  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , де  $a_i = 1$  у разі появи герба (успіх), та  $a_i = 0$  у разі появи решки (невдача).

Простір усіх результатів має структуру

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, a_2, \dots, a_n), a_i = 0, 1\}.$$

Припишемо кожній елементарній події  $\omega_i$  ймовірність

$$p(\omega) = p^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i},$$

де  $p$  та  $q$  – невід'ємні числа,  $p + q = 1$ .

Простір  $\Omega$  разом із системою  $\mathcal{A}$  всіх підмножин та ймовірностями

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega), \quad A \in \mathcal{A},$$

визначає ймовірнісну модель, що описує  $n$ -кратне підкидання монети.

Якщо  $n = 1$ , коли простір елементарних результатів складається лише з двох точок  $\omega = 1$  (успіх) та  $\omega = 0$  (невдача), ймовірність  $p(1) = p$  називають імовірністю успіху.

Розглянемо ймовірнісну модель, яка описує  $n$ -кратне підкидання монети, при цьому можна отримати результат  $n$ -незалежних випробувань із ймовірністю успіху, на кожному кроці рівною  $p$ .

Введемо до розгляду події

$$A_k = \{\omega : \omega = (a_1, \dots, a_n), a_1 + a_2 + \dots + a_n = k\}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

які означають, що відбудеться з точністю  $k$  успіхів.

Ймовірність події  $P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ , причому  $\sum_{k=0}^n P(A_k) = 1$ .

Набір ймовірностей  $P(A_0), \dots, P(A_n)$  називають *біноміальним розподілом* (кількість успіхів у виборці об'єму  $n$ ). Цей розподіл відіграє виключно важливу роль в теорії ймовірності, виникаючи в різноманітних ймовірнісних моделях.

Позначимо  $P_n(k) = P(A_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Біноміальні розподіли для випадку  $p = \frac{1}{2}$  («симетрична» монета) та  $n = 5, 10, 20$  показано на рис. 17.5

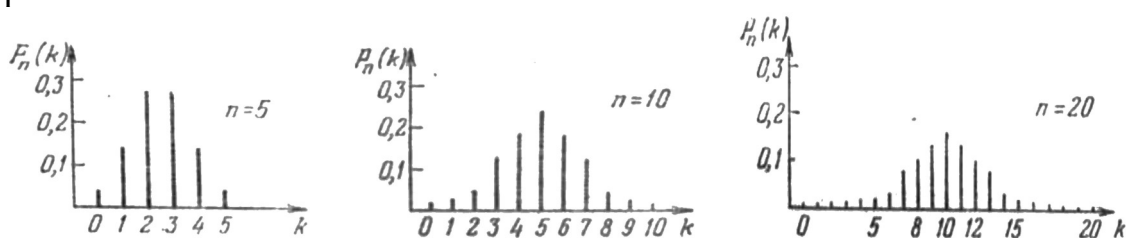


Рис. 17.5. Графіки біноміальних ймовірностей  $P_n(k)$  для  $n = 5, 10, 20$

Розглянемо модель, яка описує випадкове блукання деякої частинки. Нехай частинка виходить з нуля та через одиницю часу робить крок на одиницю вгору чи вниз (рис. 17.6).

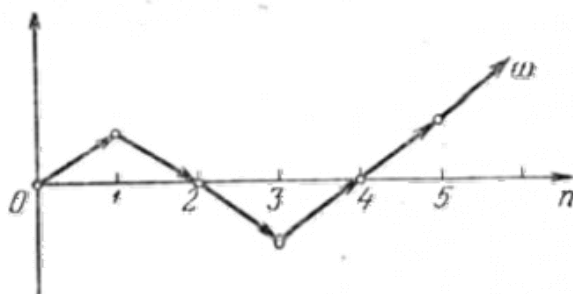


Рис. 17.6. Варіант траєкторії частинки за  $n$  кроків

Отже, за  $n$  кроків частинка може переміститись максимум на  $n$  одиниць вгору чи  $n$  одиниць вниз. Кожну траєкторію  $\omega$  руху частинки можна повністю описати набором  $(a_1, \dots, a_n)$ , де  $a_i = \pm 1$ ,

якщо на  $i$ -му кроці частинка зсувається вгору та  $a_i = -1$ , якщо зсувається вниз. Припишемо кожній траєкторії  $\omega$  «вагу»  $p(\omega) = p^{v(\omega)} q^{n-v(\omega)}$ , де  $v(\omega)$  – число  $+1$  у послідовності  $\omega = (a_1, \dots, a_n)$ , тобто

$$v(\omega) = \frac{a_1 + \dots + a_n + n}{2},$$

а невід’ємні числа  $p$  та  $q$  такі, що  $p + q = 1$ .

Оскільки  $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ , то набір імовірностей  $p(\omega)$  разом з простором  $\Omega$  траєкторій  $\omega = (a_1, \dots, a_n)$  та його підмножинами визначає ймовірнісну модель руху частинки за  $n$  кроків.

Визначимо ймовірність події  $A_k$ , що за  $n$  кроків частинка опиниться в точці з ординатою рівною  $k$ . Цій вимозі задовольняють всі траєкторії  $\omega$ , для яких  $v(\omega) - (n - v(\omega)) = k$ , (кількість успіхів – кількість невдач =  $k$ ), тобто

$$v(\omega) = \frac{k + n}{2}.$$

Кількість таких траєкторій становить  $C_n^{v(\omega)} = C_n^{\frac{k+n}{2}}$ . Це означає, що

$$P(A_k) = C_n^{\frac{k+n}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}}.$$

У симетричному випадку  $\left(p = q = \frac{1}{2}\right)$ , коли ймовірність окремої траєкторії становить  $2^{-n}$ ,

$$P(A_k) = C_n^{\frac{n+k}{2}} 2^{-n}.$$

Розглянемо асимптотику цих імовірностей за великих  $n$ . Якщо кількість кроків дорівнює  $2n$ , то з властивостей біноміальних коефіцієнтів випливає, що серед імовірностей  $P(A_k)$ ,  $|k| \leq 2n$ , максимальною вважається ймовірність:

$$P(A_k) = C_{2n}^n 2^{-2n},$$

$$\left[ \begin{array}{l} C_m^n = C_m^{m-n}, \quad n = m - n, \quad n = \frac{m}{2}, \quad \max C_m^{\frac{m}{2}} \\ C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} \end{array} \right].$$

Із формули Стірлінга

$$\left[ n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \exp\{\omega(n)\}, \frac{1}{12\left(n + \frac{1}{2}\right)} < \omega(n) < \frac{1}{12n} \right]$$

за  $n \rightarrow \infty$ ,  $n! = \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ , випливає:

$$C_{2n}^n = \frac{2n(2n-1)\dots(2n-n+1)}{n!} = \frac{2n\dots(n+1)(n!)}{n!(n!)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

$$C_{2n}^n \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n} e^{-2n} (2n)^{2n}}{2\pi n e^{-2n} n^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n}.$$

За великих  $n$

$$P(A_0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Виникнення біноміального розподілу під час руху частинки за  $2n$  кроків показано на рис. 17.7 (на відміну від рис. 17.6, часова вісь направлена вгору).

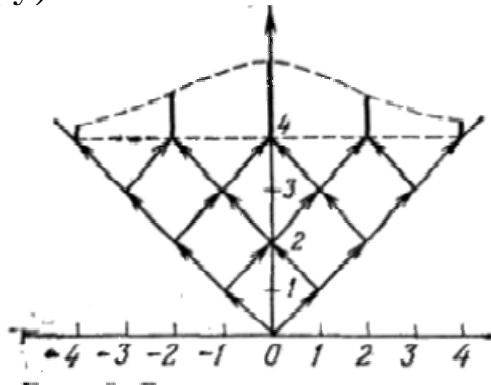


Рис. 17.7. Виникнення біноміального розподілу

З рис. 17.7 видно, що більшу ймовірність мають ті випадки, які з'являються у результаті декількох початкових умов.

### 17.3. Умовні ймовірності. Незалежність

Нехай  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – кінцевий ймовірнісний простір;  $A$  – деяка подія (тобто  $A \in \mathcal{A}$ ). Умовною ймовірністю події  $B$  за умови події  $A$  з  $P(A) > 0$  (позначається  $P(B|A)$ ) називають величину

$$\frac{P(AB)}{P(A)},$$

тобто поняття умовної ймовірності дозволяє відповісти на запитання: яка ймовірність того, що виникне подія  $B$ , за умови, що виникла подія  $A$ ?

У разі класичного способу задання ймовірностей

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}, \quad P(AB) = \frac{N(AB)}{N(\Omega)}, \quad \text{тобто} \quad P(B|A) = \frac{N(AB)}{N(A)}.$$

Із визначення випливають такі властивості умовних ймовірностей:

- 1)  $P(A|A) = 1$ ;
- 2)  $P(\emptyset|A) = 0$ ;
- 3)  $P(B|A) = 1, \quad B \supseteq A$ ;
- 4)  $P(B_1 + B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A)$ .

Для підрахунку ймовірностей складних подій з використанням умовних ймовірностей використовують формулу повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|B_i)P(B_i).$$

Зокрема, якщо  $0 < P(A) < 1$ , то

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(A|\bar{A})P(\bar{A}),$$

$P(AB) = P(B|A)P(A)$  – формула множення ймовірностей.

Припустимо, що події  $A$  та  $B$  такі, що  $P(A) > 0$  та  $P(B) > 0$ . Тоді справедлива формула

$$P(AB) = P(A|B)P(B).$$

З наведених формул множення ймовірностей випливає формула *Баєса*:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

Якщо події  $A_1, \dots, A_n$  утворюють розбиття  $\Omega$ , то справедливою є *теорема Баєса*:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}.$$

У статистичних застосуваннях події  $A_1, \dots, A_n$  ( $A_1 + \dots + A_n = \Omega$ ) часто називають *гіпотезами*, а  $P(A_i)$  – *апріорною* (*a priori* – перед дослідом) ймовірністю гіпотези  $A_i$ . Умовну ймовірність  $P(A_i|B)$  розглядають як *апостеріорну* (*a posteriori* – після дослідю) ймовірність гіпотези  $A_i$  після настання події  $B$ .

Якщо  $A$  і  $B$  – дві події, то вважаємо, що подія  $B$  не залежить від події  $A$ , за умови, що відбулась подія  $A$ , і це не впливає на ймовірність здійснення події  $B$ . Інакше кажучи,  $B$  не залежить від  $A$ , якщо

$$P(B|A) = P(B).$$

Оскільки

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

то для незалежних подій або статистично незалежних

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Дві алгебри подій  $\mathcal{A}_1$  та  $\mathcal{A}_2$  називають незалежними або статистично незалежними, якщо незалежними є будь-які дві множини  $A_1$  та  $A_2$ , що належать відповідно  $\mathcal{A}_1$  та  $\mathcal{A}_2$ .

#### 17.4. Випадкові величини та їх характеристики

Будь-яку числову функцію  $\xi = \xi(\omega)$ , визначену на скінченному просторі елементарних подій  $\Omega$ , називають простою випадковою величиною.

Поняття випадкової величини визначає величини, що підлягають «вимірюванню» у випадкових експериментах.

Найпростішим прикладом випадкової величини  $\xi$  є індикатор певної множини  $A \in \mathcal{A}$ ,

$$\xi = I_A(\omega), \quad \text{де} \quad I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

Під час роботи з випадковими величинами, які описують певні показники, виникає питання про те, з якими ймовірностями ця випадкова величина приймає певні значення. З цього погляду цікавим є не розподіл імовірностей  $P$  на  $(\Omega, \mathcal{A})$ , а розподіл імовірностей на множині значень випадкової величини.

Нехай  $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ , де різними числами  $x_1, \dots, x_m$  вичерпуються всі значення  $\xi$ .

Позначимо  $\mathcal{X}$  сукупність всіх підмножин множини  $X$ , і нехай  $B \in \mathcal{X}$ . Множину  $B$  можна трактувати як деяку подію, коли простір наслідків є  $X$  – множина значень  $\xi$ .

Розглянемо на множині  $(X, \mathcal{X})$  ймовірність, що індукується випадковою величиною  $\xi$  за формулою

$$P_\xi(B) = P\{\omega : \xi(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{X}.$$

Значення таких імовірностей повністю визначається так:

$$P_{\xi}(x_i) = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}, \quad x_i \in X.$$

Набір чисел  $\{P_{\xi}(x_1), \dots, P_{\xi}(x_m)\}$  називають *розподілом імовірностей* випадкової величини  $\xi$ .

Наприклад, випадкову величину  $\xi$ , що приймає два значення – одиницю та нуль, з ймовірністю успіху –  $p$  та невдачі –  $q$ , називають *бернулівською*, і для неї

$$P_{\xi}(x) = p^x q^{1-x}, \quad x = 0, 1.$$

*Біноміальною випадковою величиною*  $\xi$  називають випадкову величину, яка приймає  $n + 1$  значення  $0, 1, \dots, n$  з імовірністю

$$P_{\xi}(x) = C_n^x p^x q^{n-x}; \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

Нехай  $x \in R^1$ . Функцію  $F_{\xi}(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}$  – називають *функцією розподілу* випадкової величини  $\xi$ :

$$F_{\xi}(x) = \sum_{i: x_i \leq x} P_{\xi}(x_i).$$

Якщо вважати, що  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$  та припустити  $F_{\xi}(x_0) = 0$ , то

$$P_{\xi}(x_i) = F_{\xi}(x_i) - F_{\xi}(x_{i-1}); \quad i = 1, \dots, m.$$

Графіки на рис. 17.8 пояснюють  $P_{\xi}(x)$  та  $F_{\xi}(x)$  для біноміальної випадкової величини.

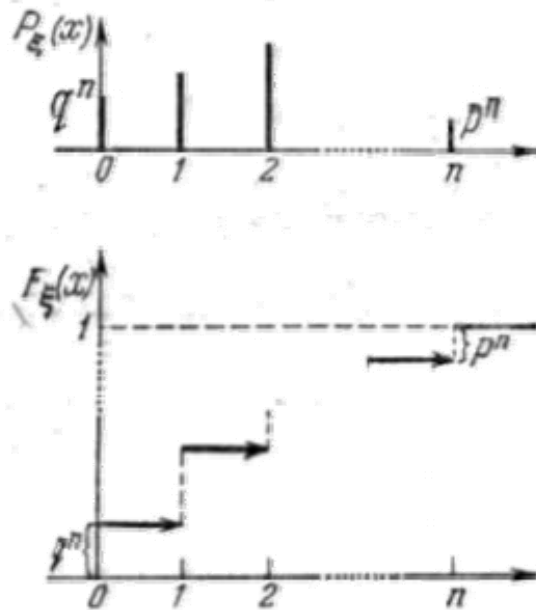


Рис. 17.8. Графіки  $P_{\xi}(x)$  та  $F_{\xi}(x)$  для біноміальної випадкової величини



Функція розподілу  $F_\xi = F_\xi(x)$  має такі властивості:

1)  $F_\xi(-\infty) = 0$ ;  $F_\xi(+\infty) = 1$ ;

2)  $F_\xi(x)$  неперервна справа ( $F_\xi(x+) = F_\xi(x)$ ) та кусково-постійна.

Випадкові величини  $\xi_1, \dots, \xi_r$  називають *незалежними (незалежними в сукупності)*, якщо для будь-яких  $x_1, \dots, x_r \in X$ :

$$P\{\xi_1 = x_1, \dots, \xi_r = x_r\} = P\{\xi_1 = x_1\} \dots P\{\xi_r = x_r\}.$$

Математичним сподіванням чи середнім значенням випадкової величини  $\xi = \sum_{i=1}^k x_i I(A_i)$  називають число

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{i=1}^k x_i P(A_i).$$

Оскільки  $A_i \{\omega: \xi(\omega) = x_i\}$  та  $P_\xi(x_i) = P(A_i)$ , то

$$\mathbf{M}\xi = \sum_{i=1}^k x_i P_\xi(x_i).$$

Основні властивості математичних сподівань:

1. Якщо  $\xi \geq 0$ , то  $\mathbf{M}\xi \geq 0$ .

2.  $\mathbf{M}(a\xi + b\eta) = a\mathbf{M}\xi + b\mathbf{M}\eta$ , де  $a$  та  $b$  – сталі.

3. Якщо  $\xi \geq \eta$ , то  $\mathbf{M}\xi \geq \mathbf{M}\eta$ .

4.  $|\mathbf{M}\xi| \leq \mathbf{M}|\xi|$ .

5. Якщо  $\xi$  та  $\eta$  незалежні, то  $\mathbf{M}\xi\eta = \mathbf{M}\xi\mathbf{M}\eta$ .

6.  $(\mathbf{M}|\xi\eta|)^2 \leq \mathbf{M}\xi^2\mathbf{M}\eta^2$  (нерівність Коші-Буняковського).

7. Якщо  $\xi = I(A)$ , то  $\mathbf{M}\xi = P(A)$ .

Наприклад, якщо  $\xi$  – бернулівська випадкова величина, що приймає значення одиниці та нуля з ймовірністю  $p$  та  $q$ , тоді

$$\mathbf{M}\xi = 1P\{\xi = 1\} + 0P\{\xi = 0\} = p,$$

а якщо  $\xi_1, \dots, \xi_n$  –  $n$  бернулівських випадкових величин з  $P\{\xi_i = 1\} = p$ ,  $P\{\xi_i = 0\} = q$ ,  $p + q = 1$ , тоді

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,$$

$$\mathbf{M}S_n = np.$$

Дисперсією випадкової величини  $\xi$  (позначають як  $\mathbf{D}\xi$ ) називають величину  $\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2$ .

Величину  $\sigma = +\sqrt{\mathbf{D}\xi}$  називають стандартним відхиленням. Оскільки

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 &= \mathbf{M}(\xi^2 - 2\xi\mathbf{M}\xi + (\mathbf{M}\xi)^2) = \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2; \\ \mathbf{D}\xi &= \mathbf{M}\xi^2 - (\mathbf{M}\xi)^2. \end{aligned}$$

З визначення дисперсії маємо:

$$1. \mathbf{D}(a + b\xi) = b^2\mathbf{D}\xi; \quad a \text{ і } b - \text{сталі.}$$

$$\mathbf{D}(a) = 0; \quad \mathbf{D}(b\xi) = b^2\mathbf{D}\xi.$$

$$2. \mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{M}((\xi - \mathbf{M}\xi) + (\eta - \mathbf{M}\eta))^2 = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta + 2 \cdot \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta).$$

Позначимо  $\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta)$ . Цю величину називають *коваріацією* випадкових величин  $\xi$  та  $\eta$ . Якщо  $\mathbf{D}\xi \geq 0$ ,  $\mathbf{D}\eta \geq 0$ , то величину

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbf{D}\xi\mathbf{D}\eta}}$$

називають *коефіцієнтом кореляції* випадкових величин  $\xi$  та  $\eta$ .

Якщо  $\xi$  та  $\eta$  незалежні, то  $(\xi - \mathbf{M}\xi)$  та  $(\eta - \mathbf{M}\eta)$  також незалежні і за п'ятою властивістю математичних сподівань

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)(\eta - \mathbf{M}\eta) = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)\mathbf{M}(\eta - \mathbf{M}\eta) = 0;$$

$$\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta);$$

$$\mathbf{D}(\xi + \eta) = \mathbf{D}\xi + \mathbf{D}\eta.$$

Наприклад, якщо  $\xi$  – бернулівська випадкова величина, яка набуває значення одиниці та нуля з імовірностями  $p$  і  $q$ , то

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi - \mathbf{M}\xi)^2 = \mathbf{M}(\xi - p)^2 = (1-p)^2 p + p^2 q = pq.$$

Якщо  $\xi_1, \dots, \xi_n$  – послідовність незалежних бернулівських випадкових величин, і якщо  $S_n = \xi_1, \dots, \xi_n$ , то  $\mathbf{D}S_n = npq$ .

## 17.5. Нерівність Чебишева

Нехай  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  – деякий ймовірний простір і  $\xi = \xi(\omega)$  невід'ємна випадкова величина. Тоді згідно з *нерівністю Чебишева* для будь-якого  $\varepsilon > 0$

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{M}\xi}{\varepsilon}.$$

Ця нерівність впливає з того, що

$$\xi = \xi I(\xi \geq \varepsilon) + \xi I(\xi < \varepsilon) \geq \xi I(\xi \geq \varepsilon) \geq \varepsilon I(\xi \geq \varepsilon),$$

де  $I(A)$  – індикатор множини  $A$ . Тому за властивостями математичного сподівання  $\mathbf{M}\xi \geq \varepsilon \mathbf{M}I(\xi \geq \varepsilon) = \varepsilon P(\xi \geq \varepsilon)$ , що і доводить нерівність Чебишева.

Тому, якщо  $\xi$  – довільна випадкова величина, то для  $\varepsilon > 0$

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{M}|\xi|}{\varepsilon};$$

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} = P\{\xi^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{\mathbf{M}\xi^2}{\varepsilon^2};$$

$$P\{|\xi - \mathbf{M}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{M}|\xi - \mathbf{M}\xi|}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}.$$

Скористаємося останньою нерівністю, взявши  $\frac{S_n}{n} = \xi$ , тоді

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathbf{D}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbf{D}S_n}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{npq}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{pq}{\varepsilon^2 n} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

Звідси видно, що за великих  $n$  імовірність відхилення частоти успіхів  $\frac{S_n}{n}$  від його ймовірності  $p$  більше ніж за  $\varepsilon$ , яка достатньо мала.

## 17.6. Розподіл Пуассона

Нехай  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Припустимо, що  $p$  є функцією від  $n$ ,  $p = p(n)$ . Нехай  $p(n) \rightarrow 0$  за  $n \rightarrow \infty$ , причому так, що  $np(n) \rightarrow \lambda$ , де  $\lambda > 0$ . Тоді згідно з *теоремою Пуассона* для будь-яких  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Цей вираз отримуємо з рівняння

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left[\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k \left[1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k},$$

але

$$n(n-1)\dots(n-k+1)\left[\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} [\lambda + o(1)]^k \rightarrow \lambda^k;$$

$n \rightarrow \infty;$

$$i \quad \left[1 - \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda}; n \rightarrow \infty.$$

Пуассонівський розподіл  $P_n(k)$  для різних значень  $p$  показано на рис. 17.9.

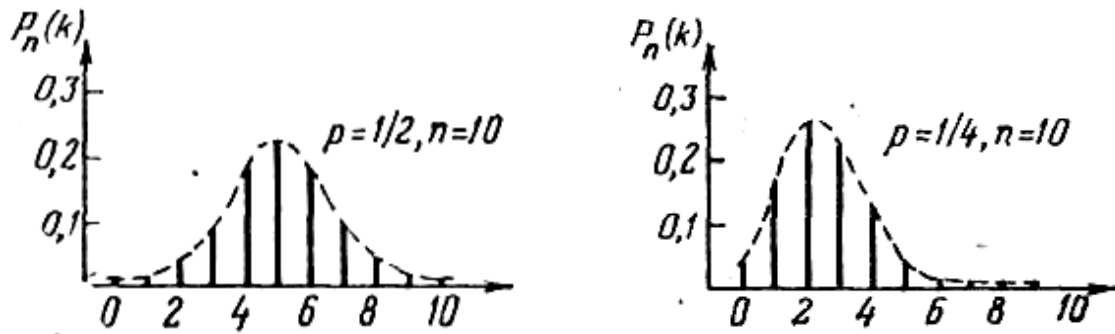


Рис. 17.9. Пуассонівський розподіл для різних величин  $p$

Зі зменшенням імовірності  $P$  розподіл  $P_n(k)$  збільшує асиметрію

### 17.7. Гаусівський розподіл імовірностей

Функцію  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$  називають *нормальним* або *гаусівським розподілом* імовірностей на числовій прямій з нормальною або гаусівською густиною

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \quad x \in R^1.$$

Нормальний розподіл належить до важливого типу розподілів, що виникають в теорії ймовірності. Його виняткова роль пояснюється насамперед тим, що за достатньо загальних припущень розподіл суми великої кількості незалежних випадкових величин (не обов'язково бернулівських) добре апроксимується нормальним розподілом.

Розглянемо деякі властивості функцій  $\varphi(x)$  та  $\Phi(x)$ , графіки яких наведені на рис. 17.10 та рис. 17.11.

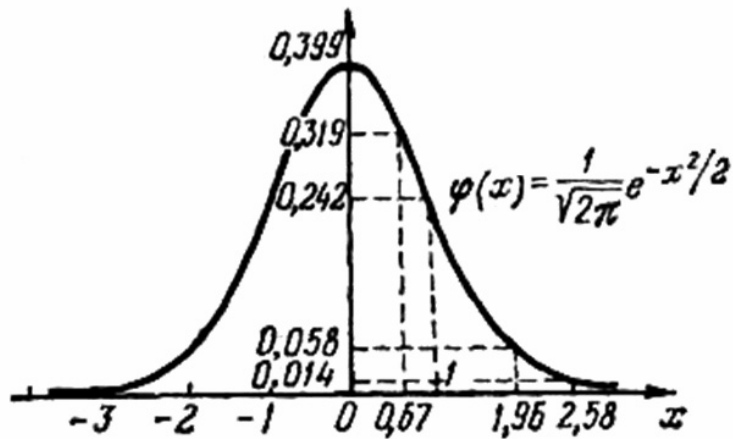


Рис. 17.10. Графік густини  $\varphi(x)$  нормального розподілу  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ .

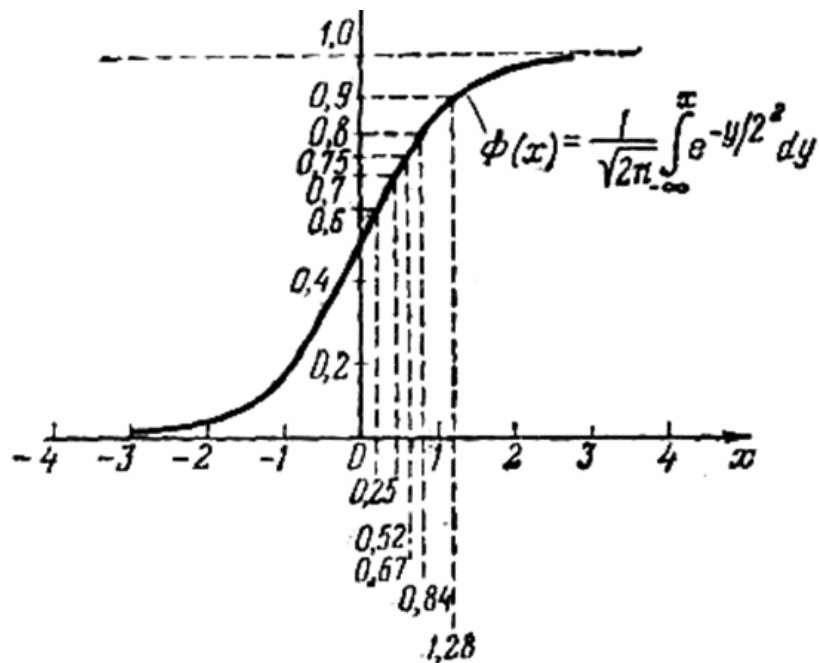


Рис. 17.11. Графік функції  $\Phi(x)$  нормального розподілу  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ .

Функція  $\varphi(x)$  є симетричною дзвонуватою кривою, яка зменшується зі зростанням  $|x|$  дуже швидко так:

$$\varphi(1) = 0,24197;$$

$$\varphi(2) = 0,053991;$$

$$\varphi(3) = 0,004432.$$

Максимум цієї кривої досягається в точці  $x=0$  і становить  $(2\pi)^{-1/2} \approx 0,399$ .

Крива  $\Phi(x)$  зі зростанням  $x$  швидко наближається до одиниці:

$$\Phi(1) = 0,841345;$$

$$\Phi(2) = 0,977250;$$

$$\Phi(3) = 0,998650.$$

## 17.8. Ланцюги Маркова

Припустимо, що  $\Omega = \{\omega : \omega = (x_0, x_1, \dots, x_n), x_i \in X\}$ , де  $X$  – деяка кінцева множина. Нехай задані невід’ємні функції  $p_0(x), p_1(x, y), \dots, p_n(x, y)$  такі, що

$$\sum_{x \in X} p_0(x) = 1;$$

$$\sum_{y \in X} p_k(x, y) = 1; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Для кожного результату  $\omega = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  припустимо, що

$$p(\omega) = p_0(x_0)p_1(x_0, x_1) \dots p_n(x_{n-1}, x_n).$$

Вибірка чисел  $p(\omega)$  разом із простором  $\Omega$  і системою всіх його підмножин обумовлює деяку ймовірнісну модель, яку називають *моделлю випробувань, зв’язаних у ланцюг Маркова*.

Розглянемо випадкові величини  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$  з  $\xi_i(\omega) = x_i$ .

$$P(\xi_0 = a) = p_0(a);$$

$$P(\xi_0 = a_0, \xi_1 = a_1, \dots, \xi_k = a_k) = p_0(a_0)p_1(a_0, a_1) \dots p_k(a_{k-1}, a_k).$$

Існує така властивість умовних імовірностей:

$$P\{\xi_{k+1} = a_{k+1} \mid \xi_k = a_k, \dots, \xi_0 = a_0\} = \frac{P\{\xi_{k+1} = a_{k+1}, \dots, \xi_0 = a_0\}}{P\{\xi_k = a_k, \dots, \xi_0 = a_0\}} =$$

$$= \frac{p_0(a_0)p_1(a_0, a_1) \dots p_{k+1}(a_k, a_{k+1})}{p_0(a_0)p_1(a_0, a_1) \dots p_k(a_{k-1}, a_k)} = p_{k+1}(a_k, a_{k+1}).$$

Аналогічно знаходимо рівність  $P\{\xi_{k+1} = a_{k+1} \mid \xi_k = a_k\} = p_{k+1}(a_k, a_{k+1})$ .

Тоді можна записати  $P\{\xi_n = a_n, \dots, \xi_{k+1} = a_{k+1} \mid \xi_0, \dots, \xi_k\} = P\{\xi_n = a_n, \dots, \xi_{k+1} = a_{k+1} \mid \xi_k\}$ .

Ця рівність допускає наочну інтерпретацію. Вважатимемо, що  $\xi_k$  – положення частки у «теперішньому»,  $(\xi_0, \dots, \xi_{k-1})$  – у «минулому» і  $(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$  – у «майбутньому». Тоді останнє рівняння означає, що за фіксованого «минулого»  $(\xi_0, \dots, \xi_{k-1})$  і «теперішнього»  $\xi_k$ , «майбутнє»  $(\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$  залежить лише від «теперішнього»

$\xi_k$ , і не залежить від того, як частка потрапила в  $\xi_k$ , тобто не залежить від «минулого».

Нехай

$B = \{\xi_n = a_n, \dots, \xi_{k+1} = a_{k+1}\}$ ;  $H = \{\xi_k = a_k\}$ ;  $\Pi = \{\xi_{k-1} = a_{k-1}, \dots, \xi_0 = a_0\}$ ,  
тоді

$$P(B|H\Pi) = P(B|H) \text{ і } P(B\Pi|H) = P(B|H)P(\Pi|H).$$

Інакше кажучи, за фіксованого «теперішнього», «майбутнє» і «минуле» є незалежними.

### Завдання

1. Визначити структуру просторово-елементарних подій, пов'язаних із вибором із поверненням  $n$  куль з урни, що містить  $M$  різних куль.

2. В урні лежить  $M$  куль, серед яких  $m$  «щасливих». Яка ймовірність витягти другою кулею «щасливу», якщо невідомо, якою була перша (вибір без повернення об'єму  $m = 2$  і всі випадки рівноймовірні)?

3. Позначимо  $C(n, \varepsilon) = \left\{ \omega : \left| \frac{S_n(\omega)}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right\}$ . Яка кількість типових реалізацій і «вага»  $p(\omega)$  кожної типової реалізації?

4. За марковським однокроковим процесом визначити ймовірність того, що модель збереже свій стан протягом рівно  $d$  днів.

5. Нехай простір результатів  $X = \{0, 1, 2\}$  і матриця перехідних ймовірностей

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Накреслити граф, відповідний цій матриці.

6. Вивчити марковський багатокроковий процес.

## Розділ 18. ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

### 18.1. Основні поняття

Сімейство випадкових величин, індексом якого служить часовий параметр  $t$ , називають *випадковим або стохастичним процесом*. Більш точно визначення формулюються так: сімейство  $\{X_t; t \in \theta\}$  дійсних випадкових величин, тобто  $X_t: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow (R, \mathfrak{B})$ , називають випадковим процесом або випадковою функцією з множиною  $\theta$  допустимих значень індексу  $t$  і множиною станів  $R$ . Випадкові процеси позначимо через  $X_t$ , а детерміновані функції часу –  $X(t)$ . Якщо випадкова величина є функцією, що відображає простір елементарних подій у дійсні числа, то випадковий процес можна розглянути як функцію двох аргументів: індексу  $t$  й елементарної події  $\omega$ , тобто як  $X_t(\omega)$ . Якщо зафіксувати перший аргумент час, і дозволити  $\omega$  набувати будь-яких значень із простору елементарних подій, то за визначенням  $X_t(\cdot)$  – випадкова величина. Якщо зафіксувати  $\omega$ , тобто вибрати елементарну подію, яка відповідає одиночному спостереженню за випадковим процесом і дозволити параметру  $t$  приймати будь-які значення із множини  $\theta$ , то  $X(\omega)$  – дійсно значима функція на часовій осі. Таку функцію  $X(\omega)$  називають реалізацією або вибірковою траєкторією випадкового процесу  $X_t$ .

Випадкова величина характеризується функцією розподілу, а пара випадкових величин – спільною функцією розподілу. Випадковий процес, що є сімейством випадкових величин, характеризується ієрархією функцій розподілу

$$F(x, t) = P[X_t \leq x];$$

$$F(x_1, t_1; x_2, t_2) = P[X_{t_1} \leq x_1; X_{t_2} \leq x_2],$$

де  $t_1 \in \theta$  та  $x_1 \in R$ .

Система функцій розподілу має такі властивості:

1. Симетрія: якщо  $i_1, \dots, i_n$  – будь-яка перестановка чисел  $1, \dots, n$ , то  $F(x_{i_1}, t_{i_1}; \dots; x_{i_n}, t_{i_n}) = F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$ ;

2. Сумісність: якщо  $m < n$  та  $t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n \in \theta$ , то

$$F(x_1, t_1; \dots; x_m, t_m; \dots; \infty, t_{m+1}; \dots; \infty, t_n) = F(x_1, t_1; \dots; x_m, t_m).$$

Це означає, що нижчі члени ієрархії можна отримати з вищих. Для густини ймовірності, що визначаються співвідношенням

$$F(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dx'_1 \dots \int_{-\infty}^{x_n} dx'_n p(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n),$$



умова сумісності відповідає виключенню змінних  $(x_{m+1}, \dots, x_n)$  інтегруванням за ними:

$$p(x, t_1; \dots; x_m, t_m) = \int_R dx'_{m+1} \dots \int_R dx'_n p(x'_1, t_1; \dots; x'_n, t_n).$$

Фундаментальна теорема А. Н. Колмогорова встановлює, що пряме та зворотне твердження для будь-якої ієрархії функцій розподілу, що задовольняє умови симетрії, існує ймовірнісний простір  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , на якому визначений випадковий процес  $X_t$ , який має функції цієї ієрархії своїми функціями розподілу.

Випадковий процес називають стаціонарним, якщо вся його скінченновимірна густина ймовірності інваріантна відносно зсувів за часом, тобто

$$p(x, t_1; \dots; x_m, t_m) = p(x_1, t + \tau; \dots; x_m, t_m + \tau).$$

Зокрема зі стаціонарності випадкового процесу випливає, що його одновимірна густина ймовірності взагалі не залежить від часу:

$$p(x, t) = p_s(x).$$

Як наслідок математичне сподівання (якщо воно існує) стаціонарного випадкового процесу постійне

$$\mathbf{M}(X_t) = \int_R xp(x, t)dx = \int_R xp_s(x)dx = m.$$

Двовимірна густина ймовірності  $p(x_1, t_1; x_2, t_2)$  залежить лише від різниці часу  $t_2 - t_1$ :

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, t_1; t_2 - t_1).$$

Коваріацію, яку часто в теорії випадкових процесів називають кореляційною функцією  $C_x(t, s)$ , визначають за формулою

$$\begin{aligned} C_x(t, s) &= \text{cov}[X_t, X_s] = \mathbf{M}\{[X_t - \mathbf{M}X_t][X_s - \mathbf{M}X_s]\} = \\ &= \iint_R (x_1 - m)(x_2 - m)p(x_1, t; x_2, s)dx_1dx_2 \end{aligned}$$

і залежить лише від інтервалу часу  $t - s$ :

$$C_x(t, s) = C_x(|t - s|) \text{ (якщо } C_x \text{ існує)}.$$

Коваріація в теорії ймовірності – це міра *лінійного взаємозв'язку* двох випадкових подій одного процесу, які відбуваються в одній ймовірності.

## 18.2. Броунівський рух: вінерівський процес

**Броунівський рух** – це швидкий, безупинний, дуже нерегулярний рух невеликої частинки, що перебуває в рідині у підвішеному стані. Хаотичний рух підвішеної частинки підтримується її зіткненнями з молекулами оточуючої рідини.

Через тепловий рух молекул в оточуючій рідині броунівська частинка витримує за короткий часовий проміжок величезну кількість зіткнень – приблизно  $10^{21}$  за секунду. Оскільки частинка набагато важча за молекули рідини, дія кожного зіткнення окремо настільки мала, що нею можна знехтувати, але якщо кількість безупинних зіткнень велика, з'являється видимий у мікроскоп ефективний рух. Зауважимо, що кожне зіткнення відбувається незалежно від інших. Із урахуванням цього будується математична модель броунівського руху, відомого також як вінерівський процес. Розглянемо рух частинки лише в одному просторовому вимірі, тобто на прямій. Оскільки просторові компоненти руху незалежні, узагальнення у випадку багатовимірного руху відбувається автоматично. Дискретним аналогом такого процесу може служити модель випадкового блукання. Положення частинки розглядається лише в дискретні моменти часу  $t = k\Delta t$ , кратні  $\Delta t$ .

Зміна положення відбувається так, що знаходячись у точці  $x$ , частинка незалежно від попередньої поведінки, переходить з рівними ймовірностями в одну з сусідніх точок  $x + \Delta x$  або  $x - \Delta x$ , причому зміщення  $\Delta x$  одне й те саме для всіх точок. У межах, коли  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  отримаємо *безперервне* випадкове блукання, характерне для фізичного процесу броунівського руху.

Позначимо  $\xi(t)$  положення частинки у момент часу  $t$ . Нехай в початковий момент часу  $t = 0$  частинка перебувала у точці  $x = 0$ . Під час дискретного блукання за час  $t$  вона зробить  $n = \frac{t}{\Delta t}$  кроків.

Позначимо  $\xi_{kп}$  зміщення частинки на  $k$ -му кроці ( $\xi_{kп} = \pm\Delta x$  з рівними ймовірностями);  $\xi(t) = \sum_{k=1}^n \xi_{kп}$  – сума незалежних однаково розподілених випадкових величин  $\xi_{kп}$ ,  $k = 1, \dots, n$ .

Якщо вважати, що  $\xi(0) = 0$ , то

$$\xi(s+t) = [\xi(s) - \xi(0)] + [\xi(s+t) - \xi(s)], \quad s, t \geq 0.$$

В описаній моделі випадкового блукання величини  $\xi(s) - \xi(0)$  та  $\xi(t+s) - \xi(s)$  є незалежними, причому розподіл імовірностей приросту  $\xi(t+s) - \xi(s)$  такий самий, як і приріст  $\xi(t) - \xi(0)$ , тому дисперсію  $D\xi(t+s)$  можна записати за допомогою рівності

$$D\xi(t+s) = D[\xi(s) - \xi(0)] + D[\xi(t+s) - \xi(s)] = D\xi(s) + D\xi(t).$$

Видно, що дисперсія  $D\xi(t)$  (як функція від  $t$ ) зі зростанням  $t$  змінюється лінійно, тому маємо

$$\mathbf{D}\xi(t) = \sigma^2 t, \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

де  $\sigma^2$  деяка постійна, яку називають *коефіцієнтом дифузії*.

З другого боку дисперсія, зміщена за час  $t$ , або за  $n = \frac{t}{\Delta t}$  кроків є

$$\mathbf{D}\xi(t) = (\Delta x)^2 \frac{t}{\Delta t}.$$

Вважатимемо постійним відношенням  $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2$ .

Згідно з центральною граничною теоремою маємо, що в межах за  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta x = \sigma\sqrt{t} \rightarrow 0$ :

$$P\left\{x' \leq \frac{\xi(t)}{\sigma\sqrt{t}} \leq x''\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Аналогічна формула справедлива і для приросту на будь-якому інтервалі.

Отже, процес броунівського руху є сімейством випадкових величин  $\xi(t)$ ,  $t \geq 0$ , таких, що  $\xi(0) = 0$  і приросту  $\xi(t) - \xi(s)$ ,  $t \geq s \geq 0$ . Вони мають нормальний розподіл ймовірностей з нульовим середнім і відповідною дисперсією  $\sigma^2(t-s)$ , причому для будь-яких інтервалів, що не перетинаються  $(s_k, t_k)$ , прирости  $\Delta_k \xi = \xi(t_k) - \xi(s_k)$ ,  $k = 1, \dots, n$  є незалежними величинами.

У дискретній моделі за будь-якого фіксованого значення  $\xi(s) = a$  рух частинки після моменту  $s$  (у якому вона перебувала в точці  $a$ ) не залежить від її поведінки до цього моменту. Припускаючи, що ця властивість характерна і для *безперервного* процесу броунівського руху, знайдемо розподіл ймовірностей випадкової величини  $\tau_a$  – *моменту першого досягнення* броунівською частинкою точки  $x = a$ . Вважатимемо, що  $a > 0$  і знайдемо ймовірність  $P\{\tau_n \leq t\}$ .

У момент часу  $t$  частинка може виявитися правіше точки  $a$  лише за умови, що в деякий момент часу  $\tau_a \leq t$  частинка знаходилась у цій точці (частинка не може «перескочити» через точку  $a$ ). Це означає, що подія  $\{\xi(t) \geq a\}$  знаходиться в події  $\{\tau_a \leq t\}$ , отже

$$P\{\xi(t) \geq a \mid \tau_a \leq t\} = \frac{P\{\xi(t) \geq a\}}{P\{\tau_a \leq t\}}.$$

З міркувань симетрії випливає, що ймовірність перебуватиме до моменту часу  $t$  правіше від початкової точки  $a$ ,  $a = 1/2$ .

Отже,  $P\{\xi(t) \geq a \mid \tau_\alpha \leq t\} = \frac{1}{2}$ , і, вважаючи, що коефіцієнт дифузії  $\sigma^2 = 1$ , отримуємо

$$F_{\tau_\alpha}(t) = P\{\tau_\alpha \leq t\} = 2P\{\xi(t) \geq a\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a-t}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad t > 0.$$

Диференціюючи функцію розподілу за часом  $t$ , знайдемо відповідну густину ймовірності

$$p_{\tau_\alpha}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, \quad 0 \leq t < \infty,$$

при цьому  $p_{\tau_\alpha}(t) = 0$  за  $t < 0$ , оскільки  $\tau_\alpha \geq 0$ .

Знаючи розподіл величини  $\tau_x$ , момент досягнення точки  $x$ , можна знайти розподіл ймовірностей величини *максимального зміщення* броунівської частинки за фіксований час  $t$ :

$$P\left\{\max_{0 \leq s \leq t} \xi(s) \geq x\right\} = P\{\tau_\alpha \leq t\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{xt^{-1/2}}^{\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2t}} du,$$

і величина  $\xi = \max_{0 \leq s \leq t} \xi(s)$  має густину ймовірності

$$p_{\xi(x)} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad 0 \leq x \leq \infty.$$

Таке рівняння називають *подвоєним нормальним законом* розподілу ймовірності ( $P\{\xi > x\} = 2P\{\xi(t) \geq x\}$ ).

### 18.3. Кінетичне рівняння

Знайдемо ймовірність того, що частинка після  $n + 1$  кроку виявиться у положенні  $m$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ . Позначимо ці ймовірності як  $P\{m; n + 1\}$ , щоб після  $n + 1$  кроку опинитися точно в точці  $m$ , після  $n$  кроків частинка має бути або в точці  $m - 1$ , або в точці  $m + 1$ . У ці точки частинка потрапляє з ймовірністю  $P(m - 1; n)$  або з ймовірністю  $P(m + 1; n)$ . Якщо частинка переходить з кроку  $m - 1$  в  $m$  з ймовірністю переходу  $\omega(m, m - 1) = p$ , а з кроку  $m + 1$  в  $m$  з ймовірністю переходу  $\omega(m, m + 1) = q$ , то ймовірність потрапляння частинки у точку  $m$  після  $n + 1$  кроків можна визначити з виразу

$$P\{m, n + 1\} = \omega(m, m - 1)P\{m - 1, n\} + \omega(m, m + 1)P\{m + 1, n\}.$$

Цей вираз справедливий у загальному випадку за умови, що

$$p + q = \omega(m, m - 1) + \omega(m, m + 1) = 1.$$

З обох частин виразу ймовірності  $P\{m, n+1\}$  віднімемо ймовірність  $P\{m, n\}$  і розділимо на проміжок часу  $\tau$ , отримаємо

$$\frac{P\{m; n+1\} - P\{m; n\}}{\tau} = \frac{\omega(m, m-1)}{\tau} P\{m-1; n\} + \frac{\omega(m, m+1)}{\tau} P\{m+1; n\} - \frac{\omega(m, m-1 + \omega(m, m+1))}{\tau} P\{m; n\}.$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} \frac{\omega(m, m \pm 1)}{\tau} &= \tilde{\omega}(m, m \pm 1); \\ t &= n\tau; \\ P\left(m; \frac{t}{\tau}\right) &= P(m; n) = \tilde{P}(m; t). \end{aligned}$$

Апроксимуємо різницю в лівій частині виразом часової похідної

$$\frac{P(m; n+1) - P(m; n)}{\tau} \approx \frac{dP}{dt}.$$

Вираз набуде вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}\{m; t\}}{dt} &= \tilde{\omega}(m, m-1)\tilde{P}(m-1; t) + \tilde{\omega}(m, m+1)\tilde{P}(m+1; t) - \\ & - [\tilde{\omega}(m, m-1) + \tilde{\omega}(m, m+1)]\tilde{P}(m; t). \end{aligned}$$

Це рівняння називають *кінетичним рівнянням*.

Стаціонарний стан, у якому ймовірність  $P$  не залежить від часу, може підтримуватись, якщо відносно будь-якої точки  $m$  за одиницю часу відбувається одна і та сама кількість переходів зліва і справа.

Цю рівність називають *принципом детальної рівноваги*, яку записують у вигляді

$$\tilde{\omega}(m, m')P\{m', n\} = \tilde{\omega}(m', m)P\{m, n\}.$$

#### 18.4. Кола Маркова

Розглянемо сімейство цілочислових випадкових величин  $\xi(t)$ ,  $t \geq 0$ , залежних від параметра  $t$  часу. Вважатимемо «систему», можливі стани якої позначаються цілими числами  $i = 0, \pm 1, \dots$  й інтерпретуватимемо  $\xi(t)$  як стан системи у момент часу  $t$ . Тоді величини  $\xi(t)$ ,  $t \geq 0$ , описують випадковий процес переходів системи з одного стану другий.

Нехай перехід системи зі стану  $\xi(s)$  в стан  $\xi(t)$ ,  $t \geq s$ , за фіксованого  $\xi(s) = i$ , не залежить від  $\xi(u)$ ,  $u \leq s$ , точніше, що умова поширення ймовірності величини  $\xi(t)$  за будь яких  $\xi(u_1) = i_1, \dots, \xi(u_n) = i_n$ ,

$\xi(u_s) = i$  не залежить від  $\xi(u_1), \dots, \xi(u_n), u_1 < \dots < u_n < s$ .

$$\begin{aligned} P\{\xi(t) = j \mid \xi(u_1) = i_1, \dots, \xi(u_n) = i_n, \xi(s) = i\} &= P\{\xi(t) = j \mid \xi(s) = i\} = \\ &= p_{ij}(t-s), \quad t > s, i, j = 0, \pm 1, \dots, \end{aligned}$$

у рівнянні маємо на увазі *однорідність* розглянутого процесу. Це свідчить про те, що умови ймовірності  $P\{\xi(t) = j \mid \xi(s) = i\}$  не залежать від розташування моментів  $s, t$  на осі часу, а залежить тільки від проміжку  $t - s$ .

Випадковий процес  $\xi(t) \geq 0$  такого типу називають *однорідним марковським процесом із рахунковою кількістю станів*.

Умовну ймовірність  $p_{ij}(t-s)$  називають *перехідною ймовірністю* (ймовірнісного переходу зі стану  $\xi(s) = i$  у стан  $\xi(t) = j$ ).

Для будь-яких величин  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_m), s < t_1 < \dots < t_m$ , і  $\xi(u_1), \dots, \xi(u_n), u_1 < u_1 < \dots < s$ , маємо:

$$\begin{aligned} &P\{\xi(t_m) = j_m \mid \xi(u_1) = i_1, \dots, \xi(u_{m-1}) = j_{m-1}\} = \\ &= P\{\xi(t_m) = j_m \mid \xi(t_{m-1}) = j_{m-1}\} = p_{j_{m-1}j_m}(t_m - t_{m-1}), \\ &P\{\xi(t_{m-1}) = j_{m-1} \mid \xi(t_m) = j_m \mid \xi(u_1) = i_1, \dots, \xi(t_{m-2}) = j_{m-2}\} = \\ &= P\{\xi(t_{m-1}) = j_{m-1} \mid \xi(t_m) = j_m \mid \xi(t_{m-2}) = j_{m-2}\} = \\ &= p_{j_{m-2}j_{m-1}}(t_{m-2} - t_{m-1}) p_{j_{m-1}j_m}(t_m - t_{m-1}), \\ &P\{\xi(t_1) = j_1, \dots, \xi(t_m) = j_m \mid \xi(u_1) = i_1, \dots, \xi(s) = i\} = \\ &= P\{\xi(t_1) = j_1, \dots, \xi(t_m) = j_m \mid \xi(s) = i\} = \\ &= p_{ij_1}(t_1 - s) p_{j_1j_2}(t_2 - t_1) \dots p_{j_{m-1}j_m}(t_m - t_{m-1}). \end{aligned}$$

Умовний розподіл величин  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_m)$  за фіксованого  $\xi(s) = i$  не залежить від величин  $\xi(u), u \leq s$ , і в цьому випадку вважають, що *поведінка випадкового марковського процесу після моменту  $s$  за відомого стану  $\xi(s)$  не залежить від його поведінки у минулому*.

Сумісний розподіл імовірної величини

$$\xi(s), \xi(t_1), \dots, \xi(t_m), s < t_1 < \dots < t_m$$

визначають як

$$P\{\xi(s) = i, \xi(t_1) = j_1, \dots, \xi(t_m) = j_m\} = p_j(s) p_{ij_1}(t_1 - s) \dots p_{j_{m-1}j_m}(t_m - t_{m-1}),$$

якщо  $s = 0$  і заданий початковий розподіл  $p_i^0 = p_i(0)$ , то

$$p_i^0 = P\{\xi(0) = i\}; \quad i = 0, \pm 1, \dots,$$

визначає сумісність розподілу ймовірностей всіх величин  $\xi(t), t \geq 0$ .

Перехідна ймовірність однорідного марковського процесу  $\xi(t), t \geq 0$ , задовольняє таку рівність

$$p_{ij}(t+s) = \sum p_{ik}(s)p_{kj}(t);$$

$$i, j = 0, \pm 1, \dots$$

Коли параметр  $t$  змінюється дискретно,  $t = 0, 1, \dots$ , марковський процес називають *ланцюгом Маркова* – це ланцюг переходів  $\xi(0) \rightarrow \xi(1) \rightarrow \dots$  з одного стану в наступний.

Позначимо  $p_{ij}$  ймовірність переходу за один крок  $p_{ij} = p_{ij}(1)$  і нехай  $p_j(n) = P\{\xi(n) = j\}$  – ймовірність перебуває у стані  $j$  через  $n$  кроків. Рекурентні співвідношення для ймовірності  $p_j(n), j = 0, 1, \dots$  такі:

$$p_i^0 = p_j(0); \quad p_i(n) = \sum p_k(n-1)p_{kj}; \quad n = 1, 2, \dots,$$

що для початкового розподілу вигляду  $p_i^0 = 1, p_k^0 = 0$ , для  $k \neq i$ , дає таке відношення між перехідними ймовірностями  $p_{ij}(n)$ :

$$p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & \text{за } j = i \\ 0 & \text{за } j \neq i \end{cases};$$

$$p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(n-1)p_{kj}, \quad n = 1, 2, \dots$$

## 18.5. Дифузійні процеси

Нехай маємо процес броунівського руху  $\xi(t), t \geq 0$ , з початковим значенням  $\xi(0) = 0$ . Приріст  $\xi(t) - \xi(s), t > s$ , не залежить від величин  $\xi(u) = \xi(u) - \xi(0), u \leq s$ , і має гаусівський розподіл ймовірності з густиною

$$P_{t-s}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} e^{-y^2/2\sigma^2(t-s)}; \quad -\infty < y < \infty,$$

тому умовний розподіл величини  $\xi(t)$  за фіксованого  $\xi(s) = x$  не залежить від величини  $\xi(u), u \leq s$ , тобто за будь-яких  $\xi(u_1) = x_1, \dots, \xi(u_n) = x_n, \xi(s) = x, u_1 < \dots < u_n < s$  умовний розподіл ймовірностей величини  $\xi(t)$  не залежить від  $\xi(u_1), \dots, \xi(u_n)$ :

$$P = \{y' \leq \xi(t) \leq y'' \mid \xi(u_1) = x_1, \dots, \xi(u_n) = x_n, \xi(s) = x\} =$$

$$= P\{y' \leq \xi(t) \leq y'' \mid \xi(s) = x\} = \int_{y'}^{y''} p(s, x, t, y) dy;$$

$$-\infty < y' \leq y'' < \infty,$$

де  $p(s, x, t, y) = p_{t-s}(x - y), -\infty < y < \infty$ , є умовною густиною ймовірності величини  $\xi(t)$  за фіксованого  $\xi(s) = x$ . Якщо виконується ця властивість, то процес називають *марковським процесом* з перехідною густиною  $p(s, x, t, y)$ .

Спільною умовою розподілу ймовірностей будь-яких величин  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_m), t_1 < \dots < t_m$ , за фіксованого значення  $\xi(s) = x$  задається густиною вигляду  $p(s, x, t, y) \dots p(t_{m-1}, y_{m-1}, t_m, y_m), -\infty < y_1, \dots, y_m < \infty$ .

За заданого розподілу ймовірності величина  $\xi(s)$  з густиною  $p(s, x)$ , сумісна густина величин  $\xi(s), \xi(t_1), \dots, \xi(t_m)$  визначається як добуток  $p(s, x) p(s, x, t, y) \dots p(t_{m-1}, y_{m-1}, t_m, y_m), -\infty < x, y_1, \dots, y_m < \infty$ .

Перехідна густина  $p(s, x, t, y)$  як функція змінних  $(s, x, t, y)$  задовольняє таку рівність:

$$p(s, x, t, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, u, z) p(u, z, t, y) dz.$$

Цю рівність називають *рівнянням Колмогорова–Чепмена*, у правій частині якого стоїть сумісна густина величин  $\xi(u), \xi(t)$  (за умови  $\xi(s) = x$ ), й інтегрування по  $z$  дає відповідну умовну густину величини  $\xi(t)$ , яка вказана у лівій частині рівності

$$\left[ p_{t_3, t_1}(q_3, q_1) = \iint p_{t_3, t_2}(q_3, q_2) p_{t_2, t_1}(q_2, q_1) d^m q_2 \right].$$

Розглянемо марковський випадковий процес із перехідною густиною  $p(s, x, t, y)$  що задовольняє такі умови:

1. Нехай прирости  $\Delta\xi(t) = \xi(t + \Delta t) - \xi(t)$  малі тоді, коли  $P\{|\Delta\xi(t)| > \varepsilon \mid \xi(t) = x\} = p(t, x, t + \Delta t, y) dy = 0(\Delta t)$  для будь-якого фіксованого  $\varepsilon > 0$ ;

2. Припустимо, що величини

$$\Delta\xi(t)_\varepsilon = \begin{cases} \Delta\xi(t), & \text{якщо } |\Delta\xi(t)| \leq \varepsilon \\ 0, & \text{якщо } |\Delta\xi(t)| > \varepsilon, \end{cases}$$

які відрізняються від  $\Delta\xi(t)$  лише з ймовірністю  $0(\Delta t)$  задовольняється таким співвідношенням:

$$\mathbf{M}[\Delta\xi(t)_\varepsilon \mid \xi(t) = x] = \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x) p(t, x, t + \Delta t, y) dy = a(t, x) \Delta t + 0(\Delta t);$$

3. Для цього випадку  $\mathbf{M}[\Delta\xi(t)_\varepsilon^2 \mid \xi(t) = x] = \int_{|y-x| \leq \varepsilon} (y-x)^2 p(t, x, t + \Delta t, y) dy = b(t, x) \Delta t + 0(\Delta t)$ , де  $\frac{0(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$  за  $(\Delta t) \rightarrow 0$  рівномірно у кожному скінченному інтервалі  $t_0 \leq t \leq t_1$ .

Процес, який задовольняє ці умови називають *дифузійним*, а залежні від  $(t, x)$  коефіцієнти  $a(t, x)$  та  $b(t, x)$  у головних членах асимптотичних розкладів називають коефіцієнтами *зносy* та *дифузії*.

Найпростішим прикладом процесів описаного типу є броунівський рух, який відповідає постійним коефіцієнтам  $a = 0, b = \sigma^2$ .



Якщо перехідна густина ймовірності  $p(s, x, t, y)$  має похідні  $\frac{\partial p}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x}$  та  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$  неперервні за  $x$ , і рівномірно у в кожному скінченному інтервалі  $y' \leq y \leq y''$ , то вона задовольняє диференціальне рівняння

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a(s, x) \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{2} b(s, x) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

яке називають *оберненим рівнянням Колмогорова*. Якщо існують неперервні похідні  $\frac{\partial}{\partial t} p(s, x, t, y)$ ,  $\frac{\partial}{\partial y} [a(t, y) p(s, x, t, y)]$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(t, y) p(s, x, t, y)]$ ,

то перехідна густина  $p(s, x, t, y)$  задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} [a(t, y) p(s, x, t, y)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(t, y) p(s, x, t, y)],$$

яке називають *прямим рівнянням Колмогорова*.

## 18.6. Стаціонарні випадкові процеси

Випадковий процес  $\xi(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , називають *стаціонарним у вузькому розумінні*, якщо розподіл ймовірностей будь-яких величин  $\xi(t_1), \dots, \xi(t_n)$  такий самий як і величин  $\xi(t_1 + \tau), \dots, \xi(t_n + \tau)$ , «зрушених» у часі  $\tau$ .

Процес  $\xi(t)$ ,  $\mathbf{M}|\xi(t)|^2 < \infty$ , називають *стаціонарним у широкому розумінні*, якщо його середнє значення  $\mathbf{M}\xi(t)$  не залежить від  $t$ , а кореляційна функція  $R(t, s) = \mathbf{M}\xi(t)\overline{\xi(s)}$  залежить лише від різниці  $t - s$ :

$$\mathbf{M}\xi(t)\overline{\xi(s)} = R(t - s).$$

Нехай маємо *стаціонарний процес із неперервним спектром*. Розглянемо випадковий процес  $\xi(t)$ , що допускає *спектральне перетворення*

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda), \quad -\infty < t < \infty,$$

де  $\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi_0(\mu) d\eta(\mu)$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$ ;

де  $d\eta(\lambda)$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$ , – деякий стандартний білий шум;  $\varphi_0(\lambda)$  – деяка функція, що інтегрується в квадраті  $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_0(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$ . За визначенням

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) d\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda) \varphi_0(\lambda) d\eta(\lambda),$$

для будь-якої функції  $\varphi(\lambda)$ , що задовольняє умову

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_0(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda < \infty, \text{ де } f(\lambda) = |\varphi_0(\lambda)|^2.$$

Тоді маємо

$$\mathbf{M}\xi(t) = 0;$$

$$\mathbf{M}\xi(t)\overline{\xi(s)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(t-s)} f(\lambda) d\lambda.$$

Отже,  $\xi(t)$  – стаціонарний процес із кореляційною функцією

$$R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda,$$

що збігається з перетворенням Фур'є функції  $f(\lambda)$ ;  $f(\lambda)$  називають *спектральною густиною* стаціонарного процесу  $\xi(t)$ .

У свою чергу, спектральна густина  $f(\lambda)$  однозначно визначається перетворенням Фур'є  $R(t)$  і, зокрема, коли кореляційна функція  $R(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ , що інтегрується:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} R(t) dt.$$

Стаціонарний випадковий процес

$$\xi_{\Delta}(t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$$

за малого інтервалу  $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$  приблизно є гармонічним коливанням частоти  $\lambda$ ,  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ , а його середня енергія становить

$$\mathbf{M}|\xi_{\Delta}(t)|^2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) d\lambda.$$

Сумарна енергія стаціонарного процесу  $\xi(t)$  становить

$$\mathbf{M}|\xi(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\lambda.$$

Отже, спектральна густина  $f(\lambda)$  характеризує розподіл енергії розглянутого процесу  $\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda)$  за складовими вигляду

$$\xi_{\Delta}(t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda), \text{ залежно від частотного інтервалу } \Delta = (\lambda_1, \lambda_2).$$

Розглянемо стаціонарний випадковий процес вигляду

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t-s) d\eta(s),$$

що встановлюється з часом на виході «стійкої» лінійної системи з ваговою функцією  $\omega(t)$  під час впливу на неї стандартного білого шуму  $d\eta(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ .

Визначивши сімейство величин  $\Delta\eta$ , які залежать від відповідних інтервалів  $\Delta = (\lambda, \mu)$  дійсної прямої, припустивши, що

$$\Delta\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu t} - e^{-i\lambda t}}{-it} d\eta(t).$$

Функція

$$e_{\Delta}(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-i\mu t} - e^{-i\lambda t}}{-it}; \quad -\infty < t < \infty$$

є перетворенням Фур'є індикатора  $\chi_{\Delta}(u)$  інтервалу  $\Delta = (\lambda, \mu)$ ,

$$\chi_{\Delta}(u) = \begin{cases} 1 & \text{за } u \in \Delta \\ 0 & \text{за } u \notin \Delta, \end{cases}$$

а саме

$$e_{\Delta}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} \chi_{\Delta}(u) du;$$

$$\mathbf{M} |\Delta\eta|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e_{\Delta}(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{\Delta}(u)|^2 du = \frac{1}{2\pi} (\mu - \lambda)$$

і для будь-яких інтервалів  $\Delta_1, \Delta_2$ , що не перетинаються,

$$\mathbf{M}[\Delta_1 \bar{\eta} \Delta_2 \eta] = 0.$$

Отже,  $d\eta(\lambda)$ ,  $-\infty < \lambda < \infty$ , є перетворенням Фур'є білого шуму  $d\eta(t)$ ,  $-\infty < t < \infty$ .

Нехай  $Y(\lambda)$  – інтегрована в квадрат функція з перетворенням Фур'є

$$c(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} Y(\lambda) d\lambda, \quad -\infty < t < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c(t)|^2 < \infty.$$

Маємо таку рівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Y(\lambda) d\eta(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t) d\eta(t).$$

Нехай існує стаціонарний процес  $\xi(t)$  на виході лінійної системи з ваговою функцією  $\omega(t)$ . *Спектральною характеристикою* називають функцію  $Y_0(t)$ , пов'язану з  $\omega(t)$  перетворенням Фур'є

$$\omega(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Y_0(\lambda) d\lambda.$$

Взявши  $Y(\lambda) = e^{i\lambda t} Y_0(\lambda)$  та  $c(s) = \omega(t - s)$ , тоді

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t-s) d\eta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} Y_0(\lambda) d\eta(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda).$$

Отже, маємо такий результат стаціонарного процесу:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(t-s) d\eta(s),$$

який допускає спектральне перетворення

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\Phi(\lambda),$$

при цьому його спектральна густина  $f(\lambda) = |Y_0(\lambda)|^2$ , де  $Y_0(\lambda)$  – відповідна спектральна характеристика.

### 18.7. Випадкові процеси в лінійних системах

Систему називають лінійною, якщо під дією «зовнішніх збуджень»  $y(s)$ ,  $t_0 \leq s \leq t$ , її стан у момент часу  $t$  (у стані спокою в момент  $t_0$ ) визначають

$$x(t) = \int_{t_0}^t \omega(t, s) y(s) ds,$$

де  $\omega(t, s)$  – вагова функція, що описує поведінку системи,  $t \geq s \geq t_0$ , яку вивели зі стану спокою одиничним імпульсом  $\delta(t - s)$ .

Розглянемо поведінку лінійної системи з ваговою функцією  $\omega(t, s)$  під дією хаотичних збуджень, що швидко змінюються.

Вважатимемо, що на систему діють випадкові імпульси вигляду  $\Delta\eta(t_k)\delta(t - t_k)$ , які виникають у вказані моменти часу  $t_k$ , де  $\Delta\eta(t_k)$ ;  $k = 1, 2, \dots$  – випадкові величини,  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$  – проміжок часу до появи наступного імпульсу.

У результаті дії на виході системи буде випадковий процес  $\xi(t)$ ,  $t \geq t_0$  такого вигляду:

$$\xi(t) = \sum_{t_0 \leq t_k \leq t} \omega(t, t_k) \Delta\eta(t_k).$$

Розглянемо випадкові процеси цього типу, які отримують у межах за  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta\eta(t_k) \rightarrow 0$ ; їх можна описати *стохастичним інтегралом*

$$\xi(t) = \int_{t_0}^t \omega(t, s) d\eta(s).$$

Математичний опис таких рівнянь наведено в наступних розділах.

## Розділ 19. СТОХАСТИЧНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

### 19.1. Використання білого шуму

Випадковий процес характеризують трьома основними елементами: характером просторових станів, множиною допустимих значень індексних параметрів, які тривіальні (наприклад вісь часів), і функціональною залежністю між випадковими змінними. Функціональна залежність між випадковими величинами, які створюють випадковий процес, для широкого класу задач має різке розмежування часових масштабів: стан середовища змінюється у багато разів швидше за макроскопічний стан системи. Різниця часових масштабів призводить до розгляду випадкових процесів із надзвичайно короткою пам'яттю, що призводить до поняття білого шуму – повністю випадкового процесу, який набуває за будь-яких  $t$  незалежних значень. Проте з білим шумом слід оперувати досить обережно і враховувати його незвичні властивості.

Хоча гаусівський білий шум дуже нерегулярний, він надзвичайно корисний для моделюванні швидких флуктуаційних явищ. Це не дивно, якщо врахувати його властивості: немає безперервних траєкторій, нескінченної повної енергії (враховуючи це, зрозуміло, що білий шум не трапляється в природі). Проте, досліджуючи спектри теплового шуму в електричному опорі, сили, які діють на броунівську частинку, та флуктуації клімату, можна стверджувати, що білий шум є дуже хорошим наближенням. У будь-якому разі частоти у багато разів вищі за характерну частоту системи, не мають істотно впливати на макроскопічні властивості системи, яка діє через інерцію, тобто фільтр низьких частот. Для практичних цілей, шуми з дуже великою ефективною шириною смуги не мають відрізнятися від білого шуму.

Макроскопічна система, яка перебуває в середовищі, що швидко флуктує, в ідеалізації  $\delta$ -корельованого зовнішнього шуму описується стохастичним диференціальним рівнянням

$$\dot{X}_t = h(X_t) + \lambda g(X_t) + \sigma g(X_t) \xi_t = f_\lambda(X_t) + \sigma g(X_t) \xi_t.$$

Ймовірність того, що система буде перебувати в деякий майбутній момент часу  $t + h$  у стані  $y$ , має залежати тільки від  $x$  системи в теперішній час і від стаціонарної ймовірності  $P_s(Z)$ , що описує середовище, але не від передісторії.

Рівняння такого типу слід розв'язувати обережно. Видно, що  $X_t$  успадковує доволі нерегулярні особливості поведінки гаусівського

білого шуму  $\xi_t$  і свідомо не може стати звичайною функцією. Якщо скористатися тим, що  $\xi_t$  похідна (у сенсі узагальнених функцій від вінерівського процесу), і записати рівняння у вигляді

$$dX_t = f_\lambda(X_t)dt + \sigma g(X_t)W_t,$$

де  $W_t$  – зміщення броунівської частинки з деякої довільної початкової точки вінерівського процесу, то  $\xi_t = W_t$  у сенсі узагальнених функцій.

Отримані рівняння описують лише звичайні процеси. Можна сподіватися, що поняття « $X_t$  є розв'язком зведеного рівняння», яке можна сформулювати у межах теорії звичайних випадкових процесів, якщо функція  $g(x)$  достатньо «гладка», як зазвичай буває у практичних задачах. Розглянемо основні «складові частини» і результати теорії стохастичних диференціальних рівнянь (СДР).

### 19.1.1. Стохастичні інтеграли

Нехай є сімейство випадкових величин  $\Delta\eta$ , яке залежить від відповідних скінченних інтервалів  $\Delta = (s, t]$  на відрізку  $(a, b]$  дійсної прямої так, що для зміщених інтервалів  $\Delta_1 = (s, t]$ ,  $\Delta_2 = (t, u]$  виконується рівність  $\Delta\eta = \Delta_1\eta + \Delta_2\eta$ ,  $\Delta = (s, u]$  (властивість адитивності).

Вважатимемо, що випадкові величини  $\Delta_1\eta$  та  $\Delta_2\eta$  відповідають будь-яким інтервалам, які не перетинаються,  $\Delta_1 = (s_1, t_1]$  і  $\Delta_2 = (s_2, t_2]$  є некорельовані

$$\mathbf{M}[\Delta_1\eta - \mathbf{M}\Delta_1\eta][\Delta_2\eta - \mathbf{M}\Delta_2\eta] = 0,$$

причому для будь-якого  $\Delta = (s, t]$ :

$$\mathbf{M}\Delta\eta = \alpha(t - s); \quad \mathbf{D}\Delta\eta = \beta^2(t - s),$$

де  $\alpha, \beta$  – деякі сталі.

Сімейство випадкових величин описаного типу називають «*білим шумом*» і позначають  $d\eta(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ ; *стандартним білим шумом* вважатимемо випадкові величини з параметрами  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ .

Поряд із дійсними величинами розглядатимемо також і комплексні величини. Дисперсію такої величини  $\eta$  визначимо як

$$\mathbf{D}\eta = \mathbf{M}|\eta - \mathbf{M}\eta|^2$$

і вважатимемо  $\eta_1, \eta_2$  *некорельованими*, якщо

$$\mathbf{M}(\eta_1 - \mathbf{M}\eta_1)(\eta_2 - \mathbf{M}\eta_2) = 0,$$

де риска означає комплексно спряжене значення.

Для фінітної кусково-постійної функції  $Y(t)$ ,  $a < t \leq b$ , що перетворюється в нуль поза кінцевим інтервалом  $(a_1, b_1)$ , на якому вона набуває лише скінченної кількості значень:

$$Y(t) = Y_k; \quad t_k < t \leq t_{k+1}; \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (a_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b_1),$$

стохастичний інтеграл визначимо за формулою

$$\int_a^b Y(t) d\eta(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \Delta_k \eta,$$

де  $\Delta_k = (t_k, t_{k+1})$ .

Для стандартного білого шуму ( $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ )  $\mathbf{M} \int_a^b Y(t) d\eta(t) = 0$ .

Відповідно послідовність стохастичних інтегралів

$$\xi_n = \int_a^b Y_n(t) d\eta(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

буде задовольняти умову

$$\|\xi_n - \xi_m\|^2 = \int_a^b |Y_n(t) - Y_m(t)|^2 dt \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty,$$

й відповідно існуватиме величина  $\xi$ , гранична для фундаментальної послідовності  $\xi_n$ . Цю граничну величину  $\xi$  називають стохастичним інтегралом від відповідної функції  $Y(t)$ :

$$\int_a^b Y(t) d\xi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b Y_n(t) d\eta(t).$$

Нехай  $d\eta(t)$ ,  $a < t \leq b$ , довільний білий шум, який має параметри  $(\alpha, \beta)$ .

Сімейство величин

$$\Delta\eta^0 = \frac{1}{\beta} [\Delta\eta - \alpha(t-s)], \quad \Delta = (s, t)$$

породжується стандартним білим шумом. Для будь-якої функції  $Y(t)$ , що задовольняє умову,

$$\int_a^b |Y_n(t) - Y(t)|^2 dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$\int_a^b |Y(t)| dt < \infty.$$

Припустимо, що

$$\int_a^b Y(t) d\eta(t) = \alpha \int_a^b Y(t) dt + \beta \int_a^b Y(t) d\eta(t).$$

Для визначеного таким чином стохастичного інтеграла основні формули змінюються:

$$\mathbf{M} \int_a^b Y(t) d\eta(t) = \alpha \int_a^b Y(t) dt;$$

$$\mathbf{M} \left[ \int_a^b Y(t) d\eta(t) \right] \left[ \int_a^b \Psi(t) d\eta(t) \right] = |\alpha|^2 \int_a^b Y(t) dt \int_a^b \overline{\Psi(t)} dt + |\beta|^2 \int_a^b Y(t) \overline{\Psi(t)} dt.$$

Для випадку, коли  $d\eta(t)$ ,  $t > t_0$  – нормальний білий шум, то для дійсної функції  $\omega(t, s)$  величини

$$\xi(t) = \int_a^b \omega(t, s) d\eta(s)$$

мають нормальний (гаусівський) розподіл ймовірностей.

Такий розподіл визначають відповідними середніми величинами

$$a(t_k) = \mathbf{M} \xi(t_k), \quad k = 1, \dots, n$$

і кореляційною матрицею з компонентами

$$R(t_k, t_j) = \mathbf{M} [\xi(t_k) - a(t_k)] [\xi(t_j) - a(t_j)], \quad k, j = 1, \dots, n.$$

### 19.1.2. Стохастичні інтеграли та диференціали

Стохастичні інтеграли та диференціали являють собою спеціальний розділ теорії дифузійних процесів: диференційне та інтегральне числення, основане на броунівському русі. Зазвичай це аналіз гладких функцій, з тією відмінністю, що під час обчислення диференціала гладкої функції  $f$  від одновимірної броунівської траєкторії  $t \rightarrow b(t)$  слід брати два члена степенного розкладання та замінити  $db^2$  на  $dt$ :

$$df(b) = f'(b)db + \frac{1}{2} f''(b)db^2 = f'(b)db + \frac{1}{2} f''(b)dt,$$

або, те що те саме:

$$\int_0^t f'(b)db = f'(b)|_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t f''(b)dt.$$

Це числення має нові риси – експонентою виступає  $e^{b-t/2}$  замість звичайної  $e^b$ . Головна перевага такої заміни полягає у тому, що будь-яку гладку дифузю  $t \rightarrow X(t)$  можна розглядати як неупереджувальний функціонал від броунівської траєкторії, оскільки  $X$  є розв'язком СДР

$$dx = e(X)db + f(X)dt$$

із гладкими коефіцієнтами  $e$  та  $f$ . Останнє рівняння задає дуже



складне нелінійне перетворення простору траєкторії, яке можна назвати *явним*. Але воно достатньо конкретне та гнучке, щоб дати можливість зрозуміти численні важливі властивості  $X$ .

### 19.1.3. Визначення стохастичного інтеграла

Довжина броунівської траєкторії  $b(t) : t \leq 1$  нескінченна, а інтеграл вигляду  $\int_0^t e db$  не можна визначити, беручи за основу стандартні процедури. Вінер обійшов ці труднощі, поклавши за визначенням

$$\int_0^1 e(t) db = -\int_0^1 e' dbt$$

для не випадкових функцій  $e = e(t)$  ( $e \leq t$ ), рівних 0 у точці  $t = 1$ .

Іто переніс цей інтеграл на широкий клас броунівських функціоналів  $e = e(t)$ , що залежать від траєкторії  $t \rightarrow b(t)$  неупереджувальним чином.

Інтеграл Іто має деякі найпростіші властивості. Якщо  $e$  означає неупереджувальний броунівський функціонал, для якого

$$P \left[ \int_0^t e^2 dt < \infty, t \geq 0 \right] = 1,$$

то

а)  $\int_0^t (e_1 + e_2) db = \int_0^t e_1 db + \int_0^t e_2 db;$

б) для будь-якої константи  $k$ ,  $\int_0^t k e db = k \int_0^t e db;$

в)  $\int_0^t e db$  – неперервна функція за  $t \geq 0$ ;

г)  $\int_0^t e db = \int_0^\infty e f db$ , де  $t < \infty$  – броунівський марковський момент, а

$f$  – неупереджувальний індикатор події ( $t \leq \tau$ );

д)  $E \left[ \left( \int_0^\infty e db \right)^2 \right] \leq \|e\|^2 \equiv E \int_0^\infty e^2 db \leq \infty$ , якщо

$P \left[ \int_0^\infty e^2 dt < \infty \right] = 1$ ; якщо  $\|e\| < \infty$ , то  $E \left[ \left( \int_0^\infty e db \right)^2 \right] = \|e\|^2$  та  $E \left[ \int_0^\infty e db \right] = 0$ ;

е)  $\xi(t) = \exp \left[ \int_0^t e db - \frac{1}{2} \int_0^t e^2 ds \right]$  – супермартингал, це означає, що

$\xi(t)$  – субмартингал відносно сімейства полей  $A$ ;

$$\text{ж) } E \left[ \exp(\sqrt{-1} \int_0^\infty edb + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^2 dt) \right] = 1, \text{ якщо } E \left[ \exp(\frac{1}{2} \int_0^\infty e^2 dt) \right] < \infty.$$

#### 19.1.4. Обчислення одного стохастичного інтеграла

Обчислимо будь-який стохастичний інтеграл від випадкової функції. Найпростіший приклад

$$\int_0^t b db = \frac{1}{2} b(t)^2 - \frac{t}{2}.$$

Броунівський інтеграл під знаком інтеграла завжди має бути «спрямований в майбутнє». «Спрямований в минуле»

$$\int_0^1 b db = \frac{1}{2} [b(1)^2 + 1], \text{ а не } \frac{1}{2} [b(1)^2 - 1].$$

Під *стохастичним інтегралом* розуміють більш загальний вираз

$$X(t) = X(0) + \int_0^t edb + \int_0^t f ds, \quad t \geq 0,$$

де  $X(0)$  не залежить від основного броунівського поля  $B_\infty$ .

Неупереджувальний броунівський функціонал є таким, що

$$P \left[ \int_0^t e^2 ds < \infty, t \geq 0 \right] = 1,$$

а для неупереджувального броунівського функціоналу  $f$ ,

$$P \left[ \int_0^t |f| ds < \infty, t \geq 0 \right] = 1.$$

*Стохастичний диференціал*  $dX = edb + f dt$  – це більш компактний запис для того самого виразу. Наприклад, інтегральна формула

$$\int_0^t b dt = \frac{1}{2} [b(t)^2 - t]$$

означає те саме, що диференціальна формула

$$d(b^2) = 2bdb + dt.$$

**Лема Іто.** Розглянемо функцію  $u = u[t, x_1, \dots, x_n]$ , визначену на  $[0, \infty) \times R^n$  з неперервними частинними похідними

$$u_0 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (i \leq n);$$

$$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i, j \leq n).$$

Візьмемо  $n$  стохастичних інтегралів

$$X_i(t) = X_i(0) + \int_0^t e_i db + \int_0^t f_i ds \quad (i \leq n).$$

Тоді композиція  $X(t) = u[t, X_1(t) \dots X_n(t)]$  – теж стохастичний інтеграл, диференціал якого  $dX = u_0 dt + \sum_{i \leq n} u_i dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i, j \leq n} u_{i, j} dX_i dX_j$ . Добуток  $dX_i dX_j$  обчислюють на основі таблиці множення:

	$db$	$dt$
$db$	$dt$	$0$
$dt$	$0$	$0$

Отже,  $dX_i dX_j = e_i e_j dt \quad (i, j \leq n)$ .

### Приклад 1.

Нехай  $d(b^2) = 2bdb + (db)^2 = 2bdb + dt$ , більше того стохастичний диференціал виразу  $X(t) = u[b(t)]$  становить  $dX = u'(b)db = \frac{1}{2}u''(b)dt$ , або, що те саме,

$$u[b(t)] = u(0) + \int_0^t u'(b)db + \int_0^t \frac{1}{2}u''(b)ds \quad (t \geq 0).$$

### Приклад 2.

Вираз  $\xi = \exp\left[\int_0^t e db - \int_0^t (e^2 ds)\right]$  дає

$$d\xi = \xi\left(edb - \frac{1}{2}e^2 dt\right) + \frac{1}{2}\xi\left(edb - \frac{1}{2}e^2 dt\right)^2 = \xi\left(edb - \frac{1}{2}e^2 dt\right) + \frac{1}{2}\xi e^2 db^2 = \xi edb.$$

За  $e = 1$  маємо  $d\xi = \xi db$ , тобто  $\xi = \exp\left(b - \frac{t}{2}\right)$  є звичайною експонентою у стохастичному диференціальному численні.

### Приклад 3.

Якщо  $u = X_1 X_2$ , то лема Іто, застосована до добутку, дає

$$d(X_1 X_2) = X_2 dX_1 + X_1 dX_2 + e_1 e_2 dt.$$

Звідси отримуємо правило інтегрування частинами:

$$X_1 X_2 \Big|_0^t = \int_0^t X_1 dX_2 + \int_0^t X_2 dX_1 + \int_0^t e_1 e_2 ds.$$

**Розв'язок найпростішого стохастичного диференціального рівняння.** Нехай  $e$  – неупереджений броунівський функціонал, такий, що

$$P\left[\int_0^t e^2 ds < \infty, t \geq 0\right] = 1.$$

Експонентний супермартинал

$$\zeta(t) = \exp\left[\int_0^t e db - \frac{1}{2}\int_0^t e^2 ds\right]$$

є розв'язок стохастичного диференціального рівняння

$$d\xi = \xi e db$$

за початкової умови  $\xi(0) = 1$ . Цей розв'язок єдиний.

Отже, супермартинал  $\xi$  дублює звичайну експоненту  $\exp\left[\int_0^t e db\right]$ .

Рівняння  $d\xi = \gamma\xi e db$  має розв'язок  $\xi = \exp\left[\gamma\int_0^t e db - \frac{\gamma^2\tau(t)}{2}\right]$ , який

може бути розкладений у ряд двома способами

1.  $\xi = \sum \gamma^n \xi_n$ ;
2. Поліном Ерміта

$$H_n(t, x) = \frac{(-t)^n}{n!} \exp\left(\frac{x^2}{2t}\right) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) \quad (n \geq 0).$$

З ряду Тейлора для  $\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$  випливає співвідношення

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n H_n = \exp\left(\gamma x - \frac{\gamma^2 t}{2}\right).$$

Використовуючи цю формулу, розкладемо в ряд  $\xi$ :

$$\xi(t) = \exp\left[\gamma\int_0^t e db - \frac{1}{2}\gamma^2\tau(t)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n H_n\left[\tau(t), \int_0^t e db\right],$$

тобто  $\xi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n H_n\left[\varepsilon(t), \int_0^t e db\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n \xi_n$ .

Отже, поліноми Ерміта у теорії Іто служать аналогами звичайних степенів  $b(t)^{n/n!}$  ( $n \geq 1$ ).

### 19.1.5. Інтеграл вінерівського процесу

Рівняння диференціального вигляду

$$dX_t = f(X_t)dt + \sigma g(X_t)dW_t,$$

запишемо в еквівалентному інтегральному вигляді

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \sigma \int_0^t g(X_s)dW_s.$$

Припустимо, що  $\sigma = 1$ , оскільки у міркуваннях суто математичного характеру інтенсивність білого шуму неістотна.

Отже, проблема надання точного математичного сенсу СДР трансформується у проблему точного визначення того, що потрібно розуміти під кожним з двох інтегралів.

Сенс першого інтеграла зводиться до того, що оскільки диференціал  $dX_t$  містить диференціал  $dW_t$  вінерівського процесу, то в якому б сенсі не існував розв'язок СДР, процес  $X_t$  має бути таким самим нерегулярним, як і вінерівський процес, але він не може бути більш нерегулярним. Це означає, що траєкторії процесу  $X_t$  майже напевно не диференційовані, але неперервні, якщо  $f$  і  $g$  – гладкі функції. Цього достатньо, щоб перший з інтегралів можна було розуміти як звичайний інтеграл (у сенсі Рімана) для будь-якої траєкторії, тобто

$$\int_0^t f(X_s(\omega))ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(X_{\tau_i}^{(n)}(\omega))(s_i^{(n)} - s_{i-1}^{(n)}),$$

де значення підінтегральної функції обчислюється в точці  $\tau_i^{(n)}$ , що належить інтервалу  $[s_{i-1}^{(n)}, s_i^{(n)}]$ , а в інших випадках – довільно.

Більш складне питання про те, як розуміти другий інтеграл вінерівського процесу. Траєкторії вінерівського процесу настільки звивисті, що вони майже напевно мають нескінченну довжину на будь-якому кінцевому інтервалі часу. Функція  $g(X_t)$  у другому інтегралі породжує такі самі звивисті траєкторії, як і вінерівський процес. Підінтегральний вираз другого інтеграла на один порядок більш нерегулярний, ніж у першому інтегралі. Нерегулярність випадкових процесів  $g(X_t)$  і  $W_t$  взаємно посилюється, що ускладнює інтерпретацію другого інтеграла.

Розглянемо стандартний приклад:  $\int_0^t W_s dW_s$ .

Якби цей інтеграл можна було інтерпретувати як звичайний інтеграл Рімана, то можна було б записати

$$\int_{t_0}^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2).$$

Розглянемо інтегральні суми

$$S_n = \sum_{i=1}^n W_{t_i}^{(n)} (W_{t_i}^{(n)} - W_{t_{i-1}}^{(n)}),$$

де  $\{t_0 = t_1^{(n)} < \dots < t_n^{(n)} = t\}$  – послідовність точок розбиття інтервалу  $[t_0, t]$ , причому точки  $\tau_i^{(n)} \in [t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}]$  переважно довільні. Якщо інтегральні суми  $S_n$  сходяться за все більш дрібного розбиття до однієї й тієї самої випадкової величини  $S$  незалежно від вибору точок  $t_i^{(n)}$ , в яких обчислюється значення підінтегрального виразу, то інтеграл Рімана існує і збігається з границею інтегральних сум  $S$ .

Якби вдалося встановити, що середньоквадратична границя

$$qm - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2),$$

де  $qm - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  – середньоквадратична границя, за будь-якого вибору точок  $\tau_i^{(n)}$ , то тим самим було б доведене рівняння

$$\int_{t_0}^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2).$$

Інтегральні суми зручно записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^n (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(W_{t_{i-1}} + W_{t_i} + W_{t_{i-1}} - W_{t_i})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \sum_{i=1}^n (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}})(W_{t_i} - W_{\tau_i}) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (W_{t_i}^2 - W_{t_{i-1}}^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}})(W_{t_i} - W_{\tau_i}) + \sum_{i=1}^n (W_{\tau_i} - W_{\tau_{i-1}})^2 = S_1^{(n)} + S_2^{(n)} + S_3^{(n)} + S_4^{(n)}, \end{aligned}$$

де для простоти позначень відкинуті верхні індекси  $n$  у  $t_i$  та  $\tau_i$ .

Середньоквадратичні границі сум становитимуть

$$qm - \lim S_1^{(n)} = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2);$$

$$qm - \lim S_2^{(n)} = -\frac{1}{2}(t - t_0);$$

$$qm - \lim S_3^{(n)} = 0.$$

Оскільки вінерівський процес  $W_t$  має незалежні прирости

$$\sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1})(t_i - \tau_i) \leq \delta_n(t - t_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то середньоквадратична границя трьох перших доданків існує і не залежить від вибору точок  $\tau_i^{(n)}$ . Середньоквадратична границя четвертого доданка залежить від вибору точок  $\tau_i^{(n)}$ :

$$qm\text{-}\lim [S_4^n - \sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1})] = 0.$$

Комбінуючи всі середньоквадратичні границі, отримаємо:

$$qm\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} [S_n - \sum_{i=1}^n (\tau_i^n - t_{i-1}^n)] = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2}(t - t_0).$$

Границя інтегральних сум залежить від вибору точок  $\tau_i^{(n)}$ , в яких обчислюють значення підінтегрального виразу, оскільки  $\lim_{i=1}^n (\tau_i^n - t_{i-1}^n)$  може набувати будь-якого значення в інтервалі  $[0, t - t_0]$  залежно від конкретного вибору точок  $\tau_i^{(n)}$ .

Отже, інтеграл  $\int G(W_s) dW_s$  не можна розуміти як звичайний інтеграл Рімана. Неоднозначність стохастичного інтеграла зникає, якщо вибір точок  $\tau_i^{(n)}$  зафіксувати раз і назавжди. Зробити вибір точок потрібно так, щоб стохастичний інтеграл характеризувався хорошими властивостями. Наприклад, за

$$\tau_i^n = (1 - \alpha)t_{i-1}^{(n)} + \alpha t_i^{(n)}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (\text{число } \alpha \text{ задане})$$

отримуємо

$$\sum_{i=1}^n (\tau_i^n - t_{i-1}^{(n)}) = \alpha \sum_{i=1}^n (\tau_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}) = \alpha(t - t_0),$$

при цьому

$$qm\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)(t - t_0).$$

Невичерпна множина різноманітних визначень інтеграла є наслідком ідеалізації білого шуму. За будь-якого вибору параметра  $\alpha$  отримуємо математично коректне визначення стохастичного інтеграла, проте більшість із таких інтегралів не мають потрібних властивостей і через це не можуть бути вибрані за основу стохастичного «інтегрального обчислення».

Існує лише два розумних вибори параметра  $\alpha$ :  $\alpha = 0$  та  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

За  $\alpha = \frac{1}{2}$  зберігаються звичайні правила інтегрування:

$$\int_{t_0}^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2).$$

Якщо зовнішній шум можна описати більш реалістично випадковим процесом, порівняно з гаусівським білим шумом, то класичні правила інтегрального обчислення залишаються в силі.

Оскільки СДР з білим шумом є границею СДР з більш реалістичним випадковим процесом в якості шуму, то визначення стохастичного інтеграла за  $\alpha = \frac{1}{2}$  можна вважати обґрунтованим.

З математичного погляду більш привабливий вибір  $\alpha = 0$ . За такого вибору максимально використовується важлива властивість вінерівського процесу: незалежність приростів. Якщо зовнішній шум *по-справжньому білий*, то  $\alpha = 0$  – єдиний розумний вибір з фізичного погляду, оскільки миттєві флуктуації не повинні корелювати зі станом системи у той самий момент часу.

Єдина незручність, пов'язана з вибором  $\alpha = 0$ , полягає в незвичайному результаті:

$$\int_{t_0}^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - W_{t_0}^2) - \frac{1}{2}(t - t_0).$$

## 19.2. Інтеграл Іто

Вибір величин  $\alpha = 0$  та  $\alpha = \frac{1}{2}$  приводить до наслідків, що мають дві відмінності:

1) за  $\alpha = 0$  для обчислення  $W_{t^n}$  необхідно мати вінерівський процес лише до моменту часу  $s$ ,  $s \in [t_{i-1}, t_i]$ ;

2)  $W_{t^n}$  не залежить від  $W_{t^n} - W_{t_{i-1}^n}$ , тобто розглядається клас випадкових процесів без попередження.

Процеси без попередження характеризуються тим, що процес  $G_t$  відомий з предісторії вінерівського процесу до моменту часу  $t$  і не залежить від майбутнього цього процесу, тобто  $G_t$  не залежить від  $W_{t+s} - W_t$  вінерівського процесу.



Інтеграл Іто визначається для всіх процесів без попередження з траєкторіями, що квадратично інтегруються і задовольняють умову

$$\int_{t_0}^t G_s(\omega)^2 ds < \infty.$$

Такий інтеграл розуміють як інтеграл Лебега або Рімана. Нехай  $G_t$  – випадковий процес без попередження, такий, що наявне розбиття  $t_0 < t_1 \dots < t_n = t$  ( $t_i$  – невідповідні точки), для якого  $G_t(\omega) = G_{t_{i-1}}(\omega)$  за  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  і всіх  $\omega \in \Omega$ . Тоді  $G_t$  називають ступінчастою функцією на  $[t_0, t]$ . Припустимо за визначенням

$$\int_{t_0}^t G_s dW_s = \sum_{i=1}^n G_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}).$$

Ця величина має звичайну властивість лінійності

$$\int_{t_0}^t (aG_s^{(1)} + bG_s^{(2)}) dW_s = a \int_{t_0}^t G_s^{(1)} dW_s + b \int_{t_0}^t G_s^{(2)} dW_s,$$

де  $a, b \in R$  і  $G_s^{(1)}$  і  $G_s^{(2)}$  – ступінчасті функції без попередження.

Якщо  $\mathbf{M}\{|G_t|\} < \infty$  за  $t_0 \leq s \leq t$ , то

$$\mathbf{M}\left\{\int_{t_0}^t G_s dW_s\right\} = \mathbf{M}\left\{\sum_{i=1}^n G_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\right\} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}\{G_{t_{i-1}}\} \mathbf{M}(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = 0.$$

Оскільки  $G_{t_{i-1}}$  не залежить від  $W_{t_i} - W_{t_{i-1}}$  ( $G_t$ -функція без попередження), то  $\mathbf{M}\{(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})\} = 0$ .

Аналогічно

$$\mathbf{M}\left\{\left(\int_{t_0}^t G_s dW_s\right)^2\right\} = \int_{t_0}^t \mathbf{M}\{G^2\} ds.$$

Визначимо інтеграл Іто для довільного випадкового процесу без попередження  $G_t$  основане на тому, що такі процеси можуть зі скільки завгодно малою похибкою апроксимувати ступінчасту функцію:

$$\int_{t_0}^t G_s dW_s = qm - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t G_s^{(n)} dW_s,$$

де  $G_s^{(n)}$  – послідовність східчастих функцій, таких, що за  $n \rightarrow \infty$  відстань між  $G_s$  і  $G_s^{(n)}$  прагне до нуля.

Отже, якщо випадковий процес без попередження  $G_t$  має майже напевно безперервні траєкторії, то інтеграл Іто може бути

визначений як межа (за ймовірністю або середньоквадратична) інтегральних сум, у яких значення підінтегральних виразів обчислюють у точках  $\tau_i$ , що збігається з лівим кінцем інтегралів розбиття  $\tau_i = t_{i-1}$ .

Нехай  $Y_t$  – випадковий процес, що задається відношенням

$$Y_t(\omega) = \int_{t_0}^t G_s(\omega) dW_s(\omega),$$

тоді властивості інтеграла Іто можна сформулювати так:

- 1)  $Y_t$  – випадковий процес без попередження;
- 2)  $Y_t$  має майже напевно безперервні траєкторії;
- 3) якщо  $\int_{t_0}^t \mathbf{M}\{G_s^2\} < \infty$  за  $t \in R$ , то  $\mathbf{M}\{Y_t\} = 0$  і  $\mathbf{M}\{Y_t Y_s\} = \int_{t_0}^{\min(t,s)} \mathbf{M}\{G_u^2\} du$ ;
- 4)  $\mathbf{M}\{Y_t | \mathcal{F}_s\} = Y_s$ ,

де  $\mathcal{F}_s$  – *нід*  $G$ -поле подій, пов'язаних із предісторією вінерівського процесу. Для того, щоб пояснити основне правило інтегрального числення Іто, що замінює правило диференціювання складних функцій у звичайному математичному аналізі, введемо поняття «стохастичного диференціала».

Співвідношення  $Y_t(\omega) = \int_{t_0}^t G_s(\omega) dW_s(\omega)$  можна записати коротко

таким чином:  $dY_t(\omega) = G_t(\omega) dW_s(\omega)$ . Це окремий вид стохастичного диференціала.

Розглянемо більш загальний випадковий процес  $X_t$ , який задається відношенням

$$X_t = X_{t_0}(\omega) + \int_{t_0}^t F_s(\omega) ds + \int_{t_0}^t G_s dW_s(\omega),$$

де  $X_{t_0}$  – випадкова величина, незалежна від  $W_s - W_{t_0}$ ,  $t_0 \leq s$ ;  $F_s$  і  $G_s$  – заданий випадковий процес без попередження:

$$\int_{t_0}^t |F_s(\omega)| ds < \infty.$$

Отже, перший інтеграл можна інтегровати як звичайний інтеграл Рімана для траєкторії; другий інтеграл – це інтеграл Іто. Тоді  $X_t$  – випадковий процес без попередження. Він має майже напевно безперервні траєкторії і за  $t_0 \leq s \leq t \leq T$  задовольняє співвідношення

$$X_t = X_s + \int_s^t F_{s'} ds' + \int_s^t G_{s'} dW_{s'}.$$

Такий випадковий процес за визначенням має *стохастичний диференціал*:

$$dX_t = F_t dt + G_t dW_t.$$

Розглянемо стохастичний процес  $Z_t$ , який є функцією від випадкового процесу  $X_t$ :

$$Z_t = u(t, X_t),$$

де  $u(t, X_t)$  – дійсні значення з безперервними похідними  $\partial_t u$ ,  $\partial_x u$  та  $\partial_{xx} u$ .

За *правилом Іто* випадковий процес  $Z_t$  має стохастичний диференціал

$$dZ_t = \left[ \partial_t u(t, X_t) + F_t \partial_x u(t, X_t) + \frac{1}{2} G_t^2 \partial_{xx} u(t, X_t) \right] dt + G_t \partial_x u(t, X_t) dW_t.$$

Це означає, що у розкладі функції  $u(t, x)$  у ряд Тейлора необхідно стримувати член другого порядку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[ w_{t_k}(\omega) - w_{t_{k-1}}(\omega) \right]^2 = t - s.$$

Отримуємо рівність

$$(dW_t)^2 = dt.$$

Правило Іто дозволяє побудувати несуперечливе числення стохастичних диференціалів.

### 19.3. Стохастичні диференціальні рівняння Іто

Стохастичний диференціал вигляду

$$dX_t = f(t, X_t) dt + g(t, X_t) dW_t, X_{t_0} = c,$$

де  $f$  та  $g$  – дійсні гладкі функції, називають СДР Іто з початковою умовою  $c$  ( $c$  – випадкова величина, незалежна від  $W_s - W_{t_0}$  за всіх  $s \geq t_0$ ).

Випадковий процес  $X_t$  є розв'язком СДР на інтервалі часу  $[t_0, T]$ , якщо:

- 1)  $X_t$  – випадковий процес без попередження;
- 2) функції  $F_t(\omega) = f(t, X_t(\omega)); G_t(\omega) = g(t, X_t(\omega))$  із імовірністю до одиниці задовольняють нерівність:

$$\int_{t_0}^T |F_t(\omega)| dt < \infty, \int_{t_0}^T |G_t^2(\omega)| dt < \infty.$$

Ця умова забезпечує однозначність правої частини СДР;

3) з імовірністю до одиниці за будь-якого  $t \in [t_0, T]$  виконується рівність

$$X_t = c + \int_{t_0}^t f(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t g(s, X_s) dW_s.$$

Для автономних СДР, тобто таких, для яких  $f$  та  $g$  не залежать явно від часу, існує єдиний розв'язок аж до якогось випадкового часу вибуху  $\eta$ .

Якщо  $f$  та  $g$  такі, що існує єдиний розв'язок  $X_t$  СДР Іто з початковою умовою  $X_{t_0} = c$ , то надання процесу  $X_t$  можливості вільного еволюціонування еквівалентно вибору в більш пізній момент часу  $s$  початкового значення випадкової величини  $X_s$ , в яку  $X_t$  переходить із  $X_{t_0} = c$ .

Отже, якщо відома випадкова величина  $X_s$ , то для передбачення поведінки розв'язку СДР Іто в майбутньому не потрібно ніякої інформації про минуле.

Якщо розв'язок СДР Іто єдиний, то це має гарантувати марковські властивості розв'язків.

Нехай  $v(x, t)$  – довільна нескінченно диференційована за  $x$  і  $t$  функція, яка дорівнює нулю поза деякого обмеженого інтервалу  $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$ , тобто  $v(x, t) = 0$ , якщо  $x \notin [x_1, x_2]$  чи  $t \notin [t_1, t_2]$ ,  $t_1 < 0$ .

Функцію  $v$ , що має такі властивості, називають функцією з компактним носієм чи фінітною.

Оскільки  $f$  та  $g$  не залежать від часу, процес однорідний за часом. Вибираємо  $t_0 = 0$  та  $X_0 = 0$ .

Розглянемо випадковий процес

$$Y_t = v(X_t, t).$$

Правило Іто дозволяє обчислити стохастичний диференціальний процес  $Y$  як

$$dY_t = dv(X_t, t) = \left[ \partial_t v(X_t, t) + f(X_t) \partial_x v(X_t, t) + \frac{1}{2} g^2(X_t) \partial_{xx} v(X_t, t) \right] dt + g(X_t) \partial_x v(X_t, t) dW_t.$$

Еквівалентне інтегральне подання має вигляд

$$v(X_{t'}, t') - v(X_0, 0) = \int_0^{t'} \left[ \partial_t v(X_t, t) + f(X_t) \partial_x v(X_t, t) + \frac{1}{2} g^2(X_t) \partial_{xx} v(X_t, t) \right] dt + \int_0^{t'} g(X_t) \partial_x v(X_t, t) dW_t.$$

Оскільки  $v(x, t)$  – функція з компактним носієм, вона має такі властивості:

- 1)  $v(x, 0) = 0$ ;
- 2)  $v(x, \infty) = 0$ ;
- 3)  $\int_0^{\infty} \mathbf{M} \left\{ (g(X_t) \partial_x v(X_t, t))^2 \right\} dt < \infty$ .

Ці співвідношення дозволяють скористатися властивостями інтеграла Іто і зробити висновок, що

$$\mathbf{M} \left\{ \int_0^{\infty} g(X_t) \partial_x v(X_t, t) dW_t \right\} = 0.$$

Спрямовуючи  $t'$  до нескінченності й переходячи до математичного сподівання, отримуємо

$$\int_0^{\infty} M \left\{ \left[ \partial_t v(X_t, t) + f(X_t) \partial_x v(X_t, t) + \frac{1}{2} g^2(X_t) \partial_{xx} v(X_t, t) \right] \right\} dt = 0.$$

Якщо ймовірність переходу  $P(B, t | X_s, x)$  процесу  $X_t$ , що задовольняє СДР, має густину, то математичне сподівання допускає запис за допомогою  $p(y, t | x, 0)$ :

$$\int_0^{\infty} dt \int_R dy p(y, t | x, 0) \left[ \partial_t v(y, t) + f(y) \partial_y v(y, t) + \frac{1}{2} g^2(y) \partial_{yy} v(y, t) \right] = 0.$$

Інтегруючи за частинами, отримуємо

$$\int_0^{\infty} dt \int_R dy v(y, t) \left[ -\partial_t p(y, t | x, 0) - d_y f(y) p(y, t | x, 0) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g^2(y) p(y, t | x, 0) \right] = 0.$$

Граничні члени обертаються в нуль, тому що функція  $v(y, t)$  має компактний носій і тому що вона довільна, тоді

$$\partial_t p(y, t | x, 0) = -\partial_y f(y) p(y, t | x, 0) + \frac{1}{2} \partial_{yy} g^2(y) p(y, t | x, 0),$$

тобто густина ймовірності переходу випадкового процесу  $X_t$  задовольняє рівняння Фоккера–Планка. Отже,  $X_t$  – дифузійний процес. Будь-який марковський процес із майже напевно безперервними траєкторіями, що задовольняють умови, не є обмежувальними в додатках, можна описати СДР Іто вигляду

$$dX_t = f(X_t, t)dt + \sigma g(X_t, t) dW_t,$$

рівняння лінійне за  $dW_t$ , отже, лінійності СДР за білим шумом і марковські властивості невіддільні.

## 19.4. Стохастичний інтеграл Стратоновича

Привабливість інтеграла Іто обумовлена його хорошими математичними властивостями в тісному зв'язку між СДР Іто й дифузійними процесами. Інтеграл Іто передбачає, що між випадковими процесом  $X_t$  і випадковою силою  $\xi_t$  у той самий момент часу  $t$  немає ніякої залежності, таким чином вважають, що вінерівський процес має незалежні збільшення.

Використання інтеграла Стратоновича пояснюється тим, що він дуже точно відповідає потребам моделювання фізичних систем. Вихідною є ситуація, в якій шум має малий, але відмінний від нуля час кореляції. Ця коротка, але ненульова, пам'ять шуму призводить до залежності між випадковим процесом  $X_t$  і випадковою силою  $\xi_t$  у той самий момент часу  $t$ . Стратонович враховує саме таку кореляцію між системою і зовнішнім шумом.

Для введення СДР Стратоновича потрібно визначити інтеграл для двовимірного векторного процесу. Пов'язане це з тим, що інтегральні суми інтеграла Стратоновича мають *невелике попередження*. Для того, щоб апроксимувати величину  $G(X_s)$  за  $S \in [t_{i-1}, t_i]$ , що входить в інтегральну суму, недостатньо знати вінерівський процес аж до моменту часу  $s$ . Необхідно знати, як процес відбуватиметься у майбутньому, оскільки

$$X_{\tau_i^{(n)}} = \frac{X_{t_i} + X_{t_{i-1}}}{2}.$$

Нехай  $\mathbf{Y}_t$  – двовимірний дифузійний процес, тобто  $\mathbf{Y}_t = \text{col}(\mathbf{Y}_t^{(1)}, \mathbf{Y}_t^{(2)})$  з вектором перенесення  $\mathbf{f}(\mathbf{Y}_n)$  і матрицею дифузії  $\mathbf{B}(\mathbf{Y})$ . Нехай надалі  $\mathbf{H}(\mathbf{X})$  – двовимірна дійсна векторна функція з безперервними частковими похідними  $\partial_{x_i} \mathbf{H}(x)$   $\mathbf{H}(x)$   $i = 1, 2$  така, що

$$\int_{t_0}^t \mathbf{M} \left\{ \left| \mathbf{H}^{tr}(\mathbf{Y}_s) \mathbf{f}(\mathbf{Y}_s) \right| \right\} ds < \infty \quad \text{і} \quad \int_{t_0}^t \mathbf{M} \left\{ \left| \mathbf{H}^{tr}(\mathbf{Y}_s) \mathbf{B}(\mathbf{Y}_s) \mathbf{H}(\mathbf{Y}_s) \right| \right\} ds < \infty.$$

Тоді межу:

$$\int_{t_0}^t \mathbf{H}^{tr}(\mathbf{Y}_s) \circ d\mathbf{Y}_s = \lim_{\delta n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}^{tr} \left( \frac{\mathbf{Y}_{t_{i-1}} + \mathbf{Y}_{t_i}}{2} \right) (\mathbf{Y}_{t_i} - \mathbf{Y}_{t_{i-1}}),$$

де  $\mathbf{H}^{tr}$  – транспонований вектор  $\mathbf{H}$ ;  $t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  – розбиття інтервалу  $[t_0, t]$  з  $\delta n = \max(t_i - t_{i-1})$ , називають стохастичним інтегралом у системі Стратоновича.

З інтегралом Іто визначаємо  $\mathbf{H}^{tr}$  як

$$\int_{t_0}^t \mathbf{H}^{tr}(Y_s) dY_s = qm - \lim_{\delta n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{H}^{tr}(Y_{t_{i-1}})(Y_{t_i} - Y_{t_{i-1}}).$$

Інтеграл Стратоновича пов'язаний формулою

$$\int_{t_0}^t \mathbf{H}^{tr}(Y_s) dY_s = \int_{t_0}^t \mathbf{H}^{tr}(Y_s) dY_s + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \int_{t_0}^t \partial_{x_k} \mathbf{H}_i^{tr} B_{ik} ds.$$

Цей вираз справджується, якщо розкласти  $\mathbf{H}^{tr}(Y_{t_{i-1}} + Y_{t_i}/2)$  у ряд Тейлора щодо  $\mathbf{H}^{tr}(Y_{t_{i-1}})$  та скористатися визначенням матриці дифузії. Для того, щоб визначити СДР Стратоновича, припустимо

$$\int_{t_0}^t G(X_s) \circ dW_s \equiv \int_{t_0}^t (0, G(X_s)) \circ \begin{pmatrix} dX_s \\ dW_s \end{pmatrix}.$$

Розрізнятимемо інтеграл Стратоновича й інтеграл Іто за символами « $\circ$ » між підінтегральним виразом та  $dW_t$ . Вважатимемо, що випадковий процес  $X_t$  задається співвідношенням

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t f(X_s) ds + \sigma \int_{t_0}^t g(X_s) \circ dW_s,$$

і задовольняє СДР Стратоновича

$$dX_t = f(X_t) dt + \sigma g(X_t) \circ dW_t.$$

Стохастичне диференціальне рівняння Іто для двомірного дифузійного процесу  $(X_t, W_t)^{tr}$  має вигляд

$$\begin{aligned} dX_t &= f(X_t) dt + \sigma g(X_t) dW_t; \\ dW_t &= dW_t, \end{aligned}$$

або в матричних означеннях

$$\begin{pmatrix} dX_t \\ dW_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(X_t) \\ 0 \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma g(X_t) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dW_t \\ dV_t \end{pmatrix},$$

де  $V_t$  – «німий» (тобто який не входить у кінцевий результат) вінерівський процес. Для матриці дифузії  $\mathbf{B}$  отримаємо:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sigma g(x) & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma g(x) & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 g^2(x) & \sigma g(x) \\ \sigma g(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді з формули зв'язку інтеграла Іто з інтегралом Стратоновича (формула перетворення) випливає

$$\int_{t_0}^t \sigma g(X_s) \circ dW_s = \int_{t_0}^t \sigma g(X_s) dW_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_{t_0}^t g'(X_s) g(X_s) ds,$$

звідки отримаємо, що СДР Іто

$$dX_t = \left[ f(X_t) + \frac{\sigma^2}{2} g'(X_t)g(X_t) \right] dt + \sigma g(X_t) dW_t$$

еквівалентно СДР Стратоновича: обидва СДР мають один і той самий розв'язок.

Розглянемо основні наслідки, що випливають з формули перетворення:

1. Від інтерпретації СДР за Стратоновичем до інтерпретації СДР за Іто завжди можна перейти, додаючи  $\sigma^2 g'g dt / 2$ ; зворотний перехід завжди можливий і здійснюється відніманням  $\sigma^2 g'g dt / 2$ .

2. СДР Стратоновича визначає дифузійний процес з перенесенням  $f + \sigma^2 g'g / 2$  і дифузією  $g^2$ .

3. Для адитивного шуму, тобто за  $g(x) = \text{const}$ , немає різниці між інтегралами Іто і Стратоновича.

4. У випадку мультиплікативного шуму,  $g(x) \neq \text{const}$ , коли вплив випадкової сили залежить від стану процесу, кореляція між процесом  $X_t$  і випадковою силою  $W_t$ , закладена в інтегралі Стратоновича, приводить до систематичного внеску в еволюцію випадкового процесу  $X_t$ . Цей внесок породжує індуковане шумом перенесення  $\sigma^2 g'g / 2$ . Виписаний член відомий під назвою хибного перенесення, оскільки він не входить у феноменологічне рівняння, проте спричиняє фізичні наслідки.

5. В обчисленні Стратоновича зберігається правило диференціювання складної функції звичайного математичного аналізу.

З теорему Вонг–Закаї випливає, що якщо  $W_t^{(n)}$  – послідовність випадкових процесів, неперервних з обмеженою варіацією, які мають неперервну похідну і збігаються майже напевно рівномірно до вінерівського процесу  $W_t$  і за деяких слабких припущень відносно  $f$  та  $g$ , то розв'язки СДР

$$dX_t^{(n)} = f(X_t^{(n)})dt + \sigma g(X_t^{(n)})dW_t^{(n)},$$

де всі інтеграли можна розуміти як звичайні інтеграли Рімана, які збігаються майже напевно рівномірно до розв'язку такого СДР Іто:

$$dX_t = \left[ f(X_t) + \frac{\sigma^2}{2} g'(X_t)g(X_t) \right] dt + \sigma g(X_t) dW_t.$$

За формулою перетворення цьому рівнянню еквівалентне СДР Стратоновича:

$$dX_t = f(X_t)dt + \sigma g(X_t) \circ dW_t.$$



Це означає, що якщо вибрати вихідне феноменологічне рівняння з реальним шумом подібне наведеному вище, тобто

$$\dot{X}_t^{(n)} = f(X_t^{(n)}) + \sigma g(X_t^{(n)}) \dot{W}_t^{(n)}$$

і перейти до межі білого шуму, тобто до СДР

$$\dot{X}_t = f(X_t) + \sigma g(X_t) \dot{W}_t,$$

то це рівняння можна інтерпретувати як СДР Стратоновича.

Якщо дифузійний процес не досягає меж свого простору станів, то такий процес «не відчуває» кордонів; у цьому разі граничні умови не накладаються.

Розрізняють такі основні типи граничних умов, що накладаються:

а) поглинання (досягнувши межі, дифузійний процес залишається);

б) відображення (досягнувши межі, дифузійний процес стрибком повертається в інтервал свого існування);

в) відображення з відскоком (досягнувши межі, дифузійний процес стрибком повертається у випадкову точку всередині інтервалу);

Різні комбінації цих основних умов дозволяють отримувати більш складні граничні умови.

## Розділ 20. СТОХАСТИЧНИЙ РЕЗОНАНС

### 20.1. Визначення стохастичного резонансу

Поняття «шум» у звичайному розумінні асоціюється з терміном «завада», наявність якої може лише погіршити функціонування будь-якої системи. У силу дискретності будови матерії флуктуаційні явища притаманні всім реальним системам і принципово невід’ємні. З часів Больцмана стала зрозумілою обмеженість суто детермінованого опису еволюційних процесів, і це стало основою для розвитку статистичної фізики.

Встановлено, що наявність джерел шуму в нелінійних динамічних системах може індукувати принципово нові режими функціонування, які не можна реалізувати, коли немає шуму. Ефекти вказаного типу отримали назву *індукованих шумом переходів*. Багатогранність та складність типів таких переходів у нелінійних динамічних системах наштовхнули на такі питання: чи завжди дія шуму призводить до погіршення характеристик динамічних систем і чи можливі випадки, коли дія шуму призводить до збільшення ступеня впорядкованості руху в системі чи покращення її робочих характеристик?

Дослідження показали, що в нелінійних системах дія шуму може індукувати нові впорядковані режими, призводити до утворення більш регулярних структур, збільшувати ступінь когерентності, викликати підсилення і збільшувати відношення сигнал–шум. Інакше кажучи, шум у нелінійних системах може відігравати конструктивну роль, викликаючи збільшення ступеня порядку в системі.

Одним із найбільш яскравих та відносно простих прикладів вказаного типу поведінки нелінійних систем під час дії шуму є ефект *стохастичного резонансу*. Ефект стохастичного резонансу визначає групу явищ, за наявності яких відгук нелінійних систем на слабкий зовнішній сигнал помітно підсилюється зі зростанням інтенсивності шуму в системі. У цьому разі інтегральні характеристики процесу на виході системи (коефіцієнт підсилення, відношення сигнал–шум) мають чітко виражений максимум за деякого оптимального рівня шуму.

## 20.2. Фізичні основи ефекту стохастичного резонансу

Розглянемо якісно рух броунівської частинки в системі з симетричним бістабільним потенціалом типу  $U(x) = -0,5x^2 + 0,25x^4$  в умовах дії слабкого збурення  $A\sin\omega t$ . Система має два характерних часових масштаби: один зумовлений випадковим блуканням частинки в околі одного зі станів рівноваги (*внутрішньоямна динаміка*), інший – часовий масштаб – характеризує середній час переходу через потенціальний бар'єр (*глобальна динаміка*). У цьому разі амплітуду періодичної дії беруть настільки малою, що вона виключає переходи через бар'єр, коли немає шуму. Другому часовому масштабу в частотній дільниці відповідає середня швидкість чи частота виходу з нестабільного стану – *швидкість Крамерса*.

Для білого шуму, параболічних потенціальних ям і відносно високих потенціальних бар'єрів, швидкість Крамерса задається законом Арреніуса:

$$r_k = \frac{1}{2\pi} (|U''(0)|U''(c))^{1/2} \exp\left(-\frac{\Delta U_0}{D}\right),$$

де  $U'' = \frac{d^2U(x)}{dx^2}$ ;  $c$  – координата мінімуму потенціалу;  $\Delta U_0$  – потенціальний бар'єр;  $D$  – інтенсивність шуму. Швидкість Крамерса буде визначати і ймовірність переходів.

За наявності періодичної сили потенціальні ями будуть періодично коливатися (рис. 20.1), ймовірності переходу також стануть періодичними флуктуаціями часу, і вихідний сигнал буде включати періодичну компоненту.

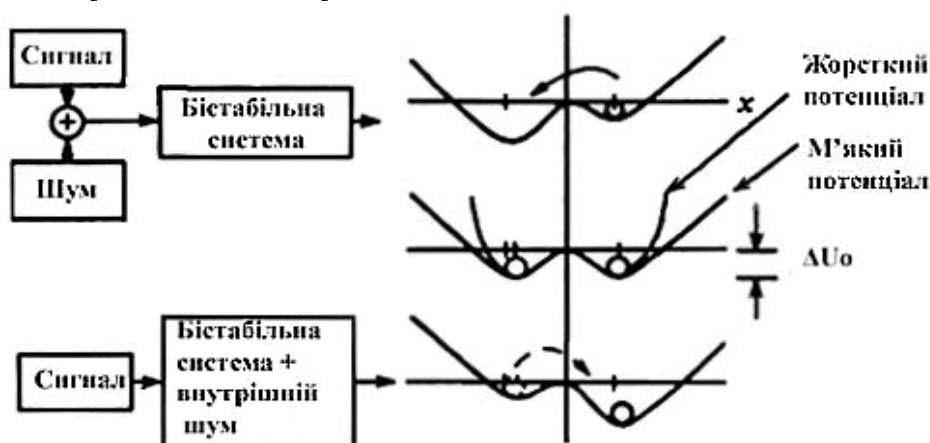


Рис. 20.1. Бістабільний потенціал під дією слабкої періодичної модуляції (потенціал може мати як «жорстку», так і «м'яку» форму.

Частка, зазначена кулькою, може подолати потенційний бар'єр  $\Delta U_0$  тільки за наявності зовнішнього або внутрішнього шуму)

Сигнали на виході бістабільної системи з урахуванням внутрішньої динаміки (а) і з урахуванням виключно моментів часу перетину бар'єра (наближення двох станів) (б), а також спектр потужності (в) сигналу, показаного на графіку (б), зображено на рис. 20.2.

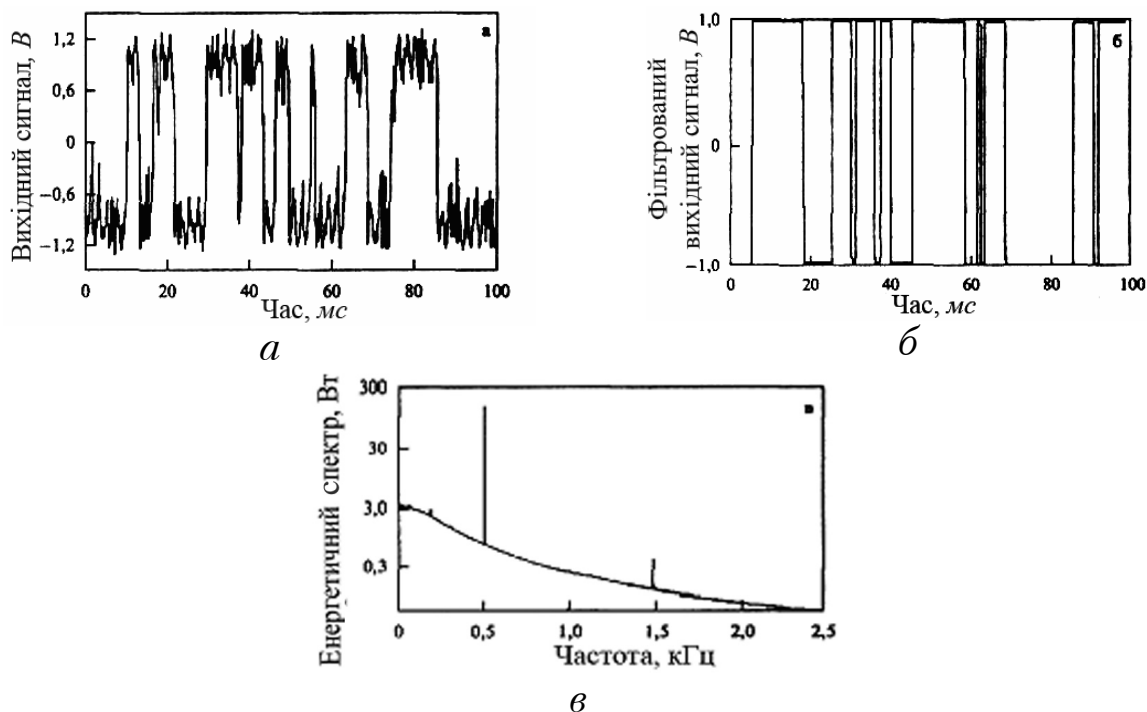


Рис. 20.2. Повний сигнал на виході бістабільної системи (а), відфільтрований методом двох станів сигнал (б) і спектр потужності відфільтрованого сигналу (в)

Періодична модуляція потенціалу призводить до періодичної модуляції як висоти потенційного бар'єра  $\Delta U = \Delta U_0 + A \sin(\omega t)$ , так і ймовірності переходу. У результаті в спектрі потужності вихідного сигналу реєструється  $\delta$ -пік на частоті модуляції й її непарних гармоніках (у разі симетричного потенціалу).

Припустимо, що потенційний бар'єр, амплітуда і частота модуляції фіксовані. Частота Крамерса буде залежати тільки від інтенсивності шуму  $D$ . За малої інтенсивності шуму час переходу надзвичайно великий і набагато перевищує період сигналу модуляції. За високого рівня шуму, за час одного періоду сигналу, система з високим ступенем ймовірності здійснить багаторазові перемикання. Варіюючи інтенсивність шуму можна забезпечити режим, коли середній час переходів через бар'єр близький до періоду модуляції. Перемикання системи будуть відбуватися в середньому в фазі із зовнішньою періодичною силою. Отже, варіюючи інтенсивність шуму можна налаштувати стохастичну бістабільну систему в режим максимального посилення сигналу модуляції та відношення сигнал–шум.

### 20.3. Теоретичні підходи

Теоретичний аналіз стохастичного резонансу має низку труднощів принципового характеру. Навіть якщо немає зовнішнього гармонійного сигналу в загальному випадку не вдається знайти точний розв'язок рівняння Фоккера–Планка для двовимірної густини ймовірності, а значить, не можливо обчислити кореляційні функції та спектральну щільність. Проте, у разі включення до розгляду періодичної зовнішньої сили з'являються додаткові труднощі, зумовлені виникаючою неоднорідністю відповідних випадкових процесів у часі.

Розглянемо модель передемпфированого бістабільного осцилятора, яка стала канонічною для дослідження стохастичного резонансу. Рівняння руху в безрозмірних змінних має вигляд

$$\dot{x} = x - x^3 + A \cos(\Omega t + \phi) + \sqrt{2D} \zeta(t)$$

і описує броунівський рух частинки (в межах великого тертя) у двоямному потенціалі  $U_0(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$  під дією білого шуму  $\xi(t)$ , інтенсивності  $D$  і періодичної сили  $f(t) = A \cos(\Omega t + \phi)$ .

Відповідне рівняння Фоккера–Планка для густини ймовірності  $p(x, t, \phi)$  має вигляд

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ x - x^3 + A \cos(\Omega t + \phi) \right] p \right\} + D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}.$$

Дослідження в галузі стохастичного резонансу вимагали створення загальної теорії стохастичних дифузійних процесів з періодично змінними коефіцієнтами зносу та дифузії. Одним з основних висновків загальної теорії періодично збуреного броунівського руху є результат для асимптотичного середнього  $\langle x(t) \rangle$  або відгуку

$$\langle x(t) \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M_n e^{in(\Omega t + \phi)},$$

де комплексні амплітуди  $M_n$  є функціями інтенсивності шуму, частоти сигналу  $\Omega$  та його амплітуди  $A$ .

Амплітудні вирази для коефіцієнта підсилення і відношення сигнал–шум можна отримати за допомогою низки наближень. Одним з основних є наближення малого сигналу, коли відгук можна вважати лінійним. Інші наближення накладають обмеження на частоту сигналу.

## 20.4. Теорія лінійного відгуку

Згідно з теорією лінійного відгуку, відклик нелінійної стохастичної системи  $\langle x(t) \rangle$  на слабкий зовнішній вплив  $f(t)$  в асимптотичній межі великих часів визначається інтегральним співвідношенням

$$\langle x(t) \rangle = \langle x \rangle_0 + \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t - \tau, D) f(\tau) d\tau,$$

де  $\langle x \rangle_0$  – середнє значення незбудженого змінного стану системи ( $f(t) = 0$ ), а  $f(t)$  – зовнішня збуджувальна сила. Поставимо для простоти  $\langle x \rangle_0 = 0$ , яка виконується для симетричних відносно початку координат бістабільних систем, а також і для основної моделі. Функцію  $\chi(t)$  називають функцією відгуку і для систем, які знаходяться коли немає збуджень, перебувають у стані термодинамічної рівноваги, пов'язаної флуктуаційно-дисипаційними відношеннями з кореляційними функціями незбудженої системи. Розглянемо застосування теорії лінійного відгуку на прикладі передемпфірованої бістабільної системи.

Флуктуаційно-дисипаційна теорія, яка пов'язує функцію відгуку  $\chi(t)$  і автокореляційну функцію  $K_{xx}^{(0)}(t)$  незбудженої системи, має вигляд

$$\chi(t) = -\frac{l(t)}{D} \frac{d}{dt} K_{xx}^{(0)}(t),$$

де  $l(t)$  – функція Хевісайда.

Функція Хевісайда (одинична ступінчаста функція) – це кусково-постійна функція, рівна нулю для від'ємних значень аргумента і одиниці для додатних значень. У нулі її зазвичай довизначають (рис. 20.3).

Функція Хевісайда є первісною  $\delta$ -функції:

$$H' = \delta \quad \text{або} \quad H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt.$$

Ступінчасту функцію можна розкласти так:

$$H(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{th}(kx) = \frac{1}{1 + e^{-2kx}}.$$

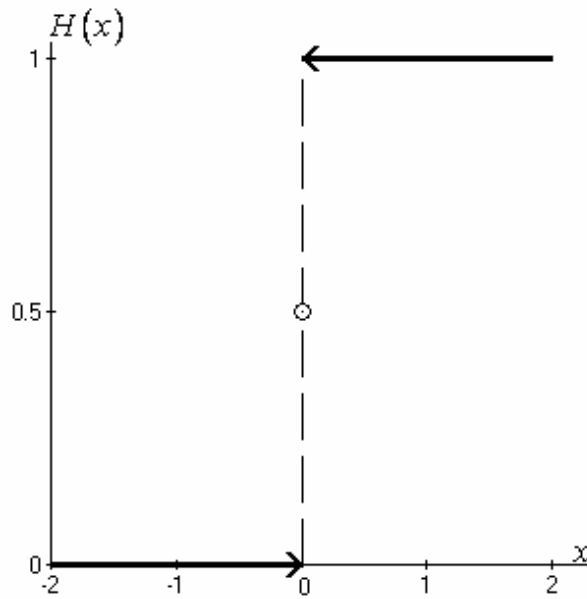


Рис. 20.3. Функція Хевісайда  $H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

Для обчислення характеристик відгуку системи в межах цієї теорії потрібно знати її статистичні властивості в незбудженій рівновазі або стаціонарному стані. Для гармонічної сили відгук системи виражається через сприйнятливість  $\chi(\omega)$ , яка є Фур'є-образом функції відгуку  $\langle x(t) \rangle = A|\chi(\omega)|\cos(\Omega t + \psi)$ , де  $\psi$  – фазовий зсув, який визначають виразом

$$\psi = -\arctan \frac{\text{Im} \chi(\Omega)}{\text{Re} \chi(\Omega)}.$$

Коефіцієнт підсилення знаходять через

$$\eta = |\chi(\omega)|^2.$$

Спектральна щільність  $G_{xx}(\omega)$  на виході системи має вигляд

$$G_{xx}(\omega) = G_{xx}^{(0)}(\omega) + \frac{\pi}{2} A^2 |\chi(\Omega)|^2 [\delta(\omega - \Omega) + \delta(\omega + \Omega)] + O(A^2).$$

Для відношення сигнал–шум у межах цієї теорії отримаємо вираз

$$SNR = \frac{P_s}{P_N} = \frac{\pi A^2 |\chi(\Omega)|^2}{G_{xx}^{(0)}(\Omega)}.$$

Точний вираз для незбудженої автокореляційної функції  $K_{xx}^{(0)}(\tau, D)$  отримати не вдається, проте існує декілька підходів для її приблизної оцінки.

У найпростішому випадку для розрахунку кореляційної функції можна врахувати найменше ненульове власне значення  $\lambda_m$  оператора Фоккера–Планка, яке пов'язане зі швидкістю Крамерса виходу з потенціальної ями

$$\lambda_m = 2r_k = \frac{\sqrt{2}}{\pi} e^{-\frac{1}{4D}},$$

тоді вираз для кореляційної функції та спектральної щільності незбудженої системи матиме вигляд:

$$K_{xx}^{(0)}(\tau, D) \approx \langle x^2 \rangle_0 e^{-\lambda_m \tau};$$

$$G_{xx}^{(0)}(\omega) \approx \frac{2\lambda_m \langle x^2 \rangle_0}{\lambda_m^2 + \omega^2} = \frac{2\sqrt{2} \pi \langle x^2 \rangle_0 e^{\frac{1}{4D}}}{2 + \pi^2 \omega^2 e^{\frac{1}{2D}}},$$

де  $\langle x^2 \rangle_0$  – стаціонарне значення другого кумулянта незбудженої системи;

$$\langle x^2 \rangle_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_0(x) dx = C \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\frac{1}{D} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)} dx,$$

а  $C$  – константа нормування стаціонарної густини ймовірності. Така апроксимація відповідає наближенню двох станів і не може бути застосована для малих інтенсивностей шуму ( $D \ll 1$ ) і для випадку високочастотних зовнішніх впливів.

Із урахуванням внутрішньоямної динаміки у кореляційній функції можна реалізувати включенням додаткового експоненціального члена, що описує швидкі флуктуації всередині потенціальних ям. Тоді кореляційна функція описує як глобальну динаміку (показник  $\lambda_m$ ), так і локальну внутрішньоямну динаміку:

$$K_{xx}^{(0)}(\tau, D) = g_1 \exp(-\lambda_m \tau) + g_2 \exp(-\alpha \tau);$$

$$G_{xx}^{(0)}(\omega) = \frac{2\lambda_m g_1}{\lambda_m^2 + \omega^2} + \frac{2\alpha g_2}{\alpha^2 + \omega^2},$$

де показник  $\alpha$  визначають із лінеаризованого рівняння руху,  $\alpha = |U''(x_{\min})|$ ;  $x_{\min}$  – координата мінімуму потенціалу (для прикладу



$\alpha = 2$ ). Коефіцієнти  $g_{1,2}$  визначають із виразу для кореляційної функції й її похідної за  $\tau = 0$  і становлять:

$$g_1 = \langle x^2 \rangle_0 - g_2;$$

$$g_2 = \frac{\lambda_m \langle x^2 \rangle_0}{\lambda_m - \alpha} + \frac{\langle x^2 \rangle_0 - \langle x^4 \rangle_0}{\lambda_m - \alpha};$$

$$\langle x^4 \rangle_0 = c \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \exp \left[ \frac{1}{D} \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \right] dx.$$

Для сприйнятливості отримуємо такий вираз:

$$\chi(\omega, D) = \frac{1}{D} \frac{\lambda_m \langle x^2 \rangle_0}{\lambda_m^2 + \omega^2} (\lambda_m - i\omega),$$

а з урахуванням внутрішньобямної динаміки

$$\chi(\omega, D) = \frac{1}{D} \left( \frac{g_1 \lambda_m^2}{\lambda_m^2 + \omega^2} + \frac{g_2 \alpha^2}{\alpha^2 + \omega^2} \right) - i\omega \left( \frac{g_1 \lambda_m}{\lambda_m^2 + \omega^2} + \frac{g_2 \alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right).$$

Для дослідження амплітудно-частотних властивостей системи достатньо розглянути відгук на гармонічний сигнал  $f(t) = A \cos(\omega t)$ . Вирази для коефіцієнта підсилення та відношення сигнал–шум мають вигляд:

$$\eta(\Omega, D) = \frac{1}{D^2} \frac{\left( \langle x^2 \rangle_0 \lambda_m \right)^2}{\lambda_m^2 + \Omega^2};$$

$$SNR = \frac{\pi A^2}{2D^2} \langle x^2 \rangle_0 \lambda_m.$$

Відношення сигнал–шум ( $SNR$ ) не залежить від частоти збудження і має максимум за  $D = 0,125$ . Підсилення  $\eta$  має частотну залежність і характеризується більшими значеннями в області низьких частот.

З урахуванням внутрішньобямної динаміки ці вирази набувають такого вигляду:

$$\eta(\Omega, D) = \frac{(g_1 \lambda_m)^2 (\alpha^2 + \Omega^2) + (g_2 \alpha)^2 (\lambda_m^2 + \Omega^2) + 2g_1 g_2 \alpha \lambda_m (\lambda_m \alpha + \Omega^2)}{D^2 (\lambda_m^2 + \Omega^2) (\alpha^2 + \Omega^2)};$$

$$SNR = \frac{\pi A^2}{2D^2} \frac{(g_1 \lambda_m)^2 (\alpha^2 + \Omega^2) + (g_2 \alpha)^2 (\lambda_m^2 + \Omega^2) + 2g_1 g_2 \alpha \lambda_m (\lambda_m \alpha + \Omega^2)}{g_2 \alpha (\lambda_m^2 + \Omega^2) + g_1 \lambda_m (\alpha^2 + \Omega^2)}.$$

Залежність підсилення від інтенсивності шуму для різних значень частоти зовнішнього періодичного сигналу зображено на рис. 20.4 (а). Як видно з рисунка, обидва наближення дають однаковий результат в області максимальних підсилень. Відмінності з'являються лише за малих інтенсивностей шуму. Теорія, що враховує тільки глобальну динаміку переходів між метастабільними станами, дає нульове значення  $\eta$  за  $D \rightarrow 0$ . Урахування внутрішньомної динаміки дає правильну межу за  $D \rightarrow 0$ ,  $\eta(\Omega, D \rightarrow 0) = 1/(\alpha^2 + \Omega^2)$ . З рис. 20.4 (а) випливає, що амплітуда частотних характеристик (АЧХ) системи збільшується в напрямку низьких частот. Ця властивість визначається фізичною природою флуктуаційних процесів у бістабільних системах, де енергія шуму перетворюється у низькочастотну динаміку випадкових переходів між метастабільними станами. У результаті спектр флуктуацій в області низьких частот на виході має вигляд лоренціана з шириною, що визначається середньою швидкістю переходів Крамерса.

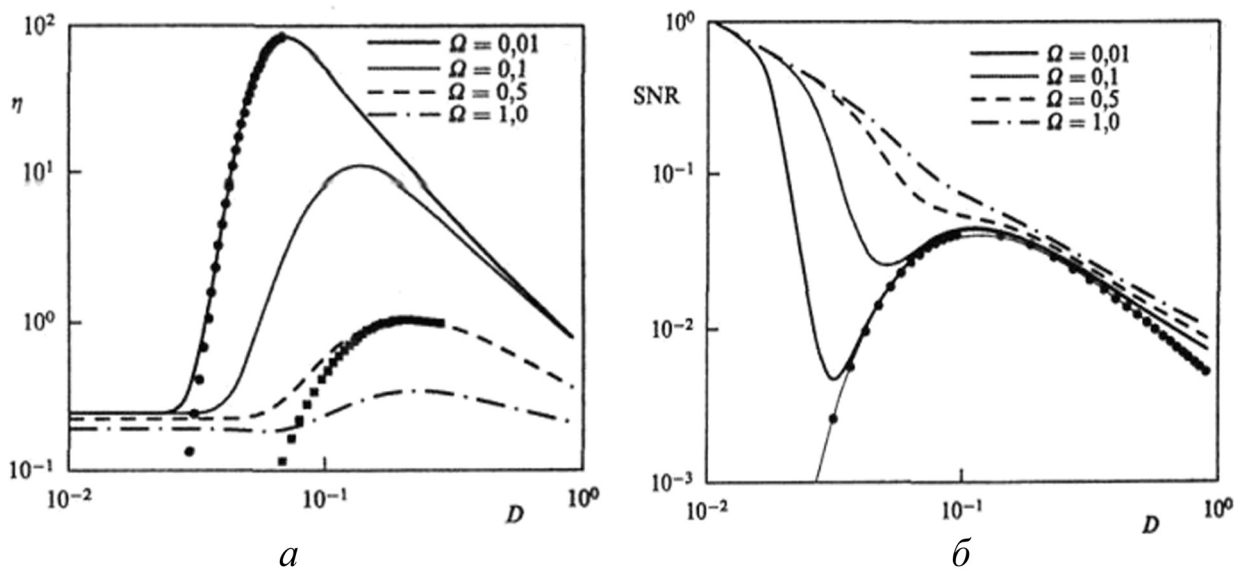


Рис. 20.4. Залежності коефіцієнта посилення  $\eta$  (а) і відношення сигнал–шум  $SNR$  (б) від інтенсивності шуму  $D$  для різних значень частоти зовнішнього періодичного впливу (залежності, що визначаються без урахування внутрішньомної динаміки, показані символами «•»)

Залежність відношення сигнал–шум показано на рис. 20.4 (б). За малих значень  $D$  величина  $SNR$  розходиться, що пояснюється динамікою всередині потенціальних ям. Для достатньо низькочастотних впливів максимум  $SNR$  досягається за  $D \approx 1/8$ , проте зі збільшенням частоти  $\Omega$ , ефект стохастичного резонансу взагалі зникає, оскільки  $SNR$  стає монотонно згасальною функцією.

## 20.5. Стохастичний резонанс як фундаментальний пороговий ефект

З погляду передачі інформації бістабільними системами в режимі стохастичного резонансу основну роль відіграють виключно переходи через потенціальний бар'єр. Вихідний сигнал подають у вигляді випадкового телеграфного процесу, в якому методом фільтрації виділяється складова основної частоти. У цьому разі можна взагалі відмовитися від аналізу бістабільної динамічної системи і подати стохастичний резонанс як фундаментальний пороговий ефект. Тоді процес розглядають у вигляді послідовності випадкових подій, що з'являються у випадку, коли сума регулярної та шумової компонент вхідного сигналу перетинає деякий заданий пороговий рівень  $C_{th}$ :

$$[B \sin \omega t + \zeta(t)] > C_{th}.$$

Розглянемо явище стохастичного резонансу, використовуючи концепцію нединамічного порогового ефекту. Замість динамічних рівнянь введемо деякі правила, які показано на рис. 20.5.

Підпороговий регулярний сигнал і адитивний шум  $\zeta(t)$  показано на рис. 20.5 (а). Якщо бракує шуму амплітуди, сигналу  $B$  недостатньо для досягнення порогу  $C_{th} = \Delta$ . За наявності шуму стає можливим подолання порогу і цей процес відбувається випадково. Кожного разу коли рівень порогу перетинається в одному напрямку, генерується імпульс стандартної форми. Процес перетину порогу породжує у часі випадкову послідовність імпульсів, як показано на рис. 20.5 (б), а спектр потужності такої послідовності імпульсів – на рис. 20.5 (в). Форма спектральної функції у цьому випадку нагадує відповідну функцію для бістабільного осцилятора, проте має гармоніки основної частоти  $n\omega$ . Відношення сигнал–шум можна визначити за спектром потужності стандартним способом. Розрахунок залежності  $SNR$  від інтенсивності шуму демонструє ефект стохастичного резонансу.

Явище, що розглядається, допускає наближений і теоретичний опис за таких припущень:

- 1) використовується стандартне обмеження адіабатичної теорії  $\omega \ll \langle \nu \rangle$ , де  $\langle \nu \rangle$  – середня частота перетину порогу;
- 2) імпульси вважаються некорельованими;
- 3) тривалість імпульсів  $\tau$  припускається обмеженою і як завжди малою, порівняно з середнім часом перетину порогу  $\tau \ll \langle \nu \rangle^{-1}$ .

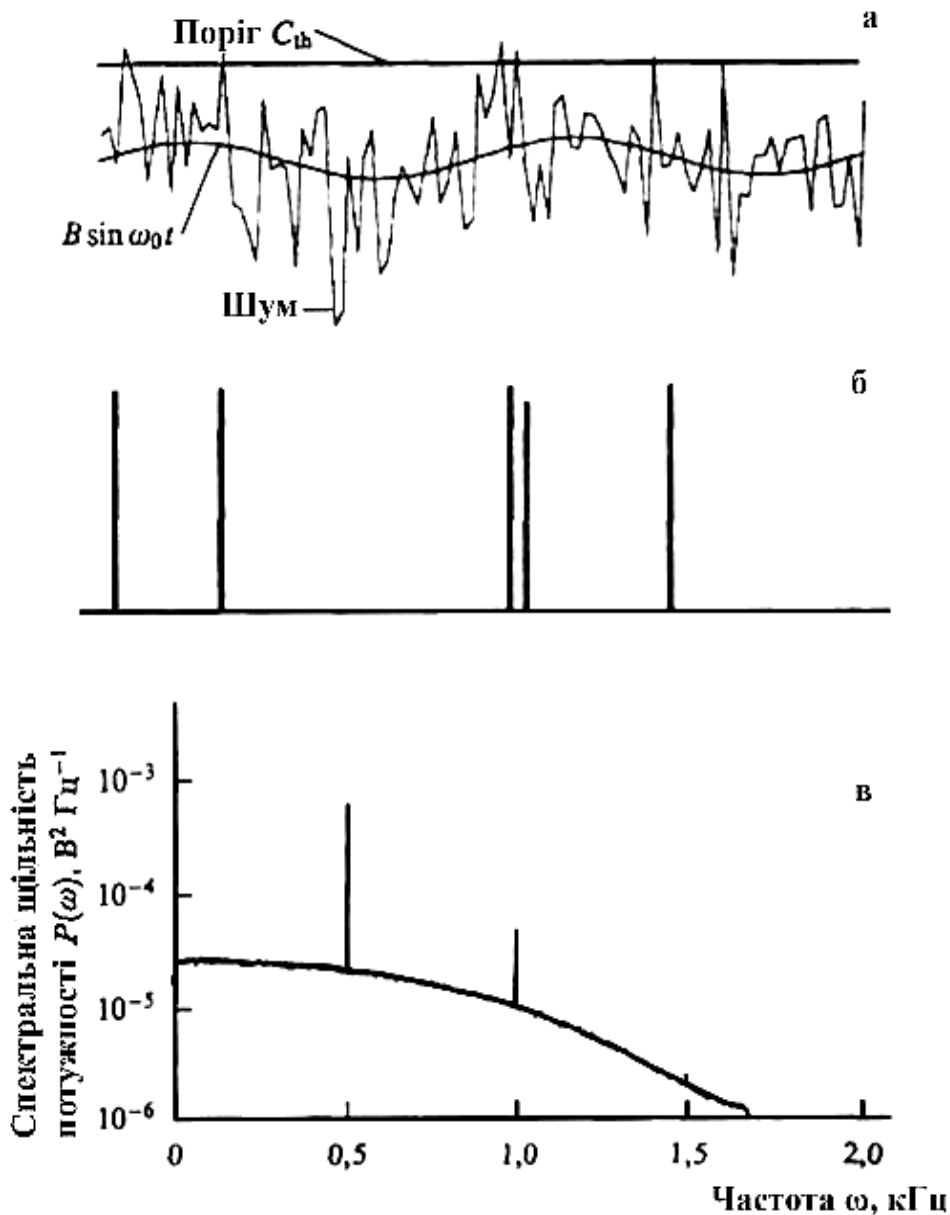


Рис. 20.5. Синусоїдальний підпороговий сигнал плюс шум (а); імпульси, що відповідають моментам перетину порогу  $C_{th}$  (б); спектр потужності послідовності імпульсів (в)

Нединамічна теорія ґрунтується на класичній формулі для середньої частоти перетину порогу  $\langle v \rangle$  і на припущенні, що шум  $\xi(t)$  є гаусівським процесом, спектр якого обмежений частотою зрізу  $f_0$ .

$$\langle v \rangle = \frac{g(\Delta)}{g(0)} \left[ \frac{\int f^2 S(f) df}{\int S(f) df} \right]^{1/2} = \frac{g(\Delta)}{\sqrt{3}g(0)} f_0,$$

де  $\Delta$  – поріг,  $f_0$  – частота зрізу низькочастотного фільтра,  $\frac{g(\Delta)}{g(0)}$  – функція Гауса,

$$\frac{g(\Delta)}{g(0)} = \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right),$$

де  $\sigma^2$  – дисперсія шуму.

Якщо кожному перетину порогу поставити у відповідність прямокутний імпульс тривалості  $\tau$ , амплітуди  $A$  і вважати, що  $\tau \ll \langle v \rangle^{-1}$  й імпульси некорельовані, то для отримання спектра потужності такого процесу можна використати теорему Кемпбелла:

$$P_N(f) \approx \frac{1}{2} A^2 \tau^2 \langle v \rangle = \frac{1}{2} A^2 \tau^2 \left(\frac{f_0}{\sqrt{3}}\right) \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right).$$

Цей вираз характеризує рівномірний шумовий спектр. Насправді спектр є повільно спадною функцією частоти, проте наведений вираз можна використовувати як оцінку спектра у низько-частотній ділянці. Середнє значення амплітуди випадкової послідовності імпульсів становитиме

$$\langle V \rangle = A\tau \langle v \rangle = A\tau \left(\frac{f_0}{\sqrt{3}}\right) \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right).$$

Тепер додамо малий періодичний сигнал  $B \sin \omega t$ , який приведе до модуляції порогу з частотою  $\omega$ :  $\Delta \rightarrow \Delta_0 + B \sin \omega t$ . У результаті середня частота перетину з порогом  $\langle v \rangle$  і середня амплітуда  $\langle V \rangle$  послідовності імпульсів будуть залежними від часу:

$$\begin{aligned} \langle V \rangle(t) &= \frac{A\tau f_0}{\sqrt{3}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\Delta_0^2 + 2\Delta_0 B \sin \omega t + B^2 \sin^2 \omega t)\right] \approx \\ &\approx \frac{A\tau f_0}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{B^2}{4\sigma^2} - \frac{\Delta_0 B}{\sigma^2} \sin \omega t + \frac{B^2}{4\sigma^2} \cos 2\omega t\right), \end{aligned}$$

де для отримання спрощеного виразу використано умову  $B \ll \sigma \Delta_0$ . Виконавши перетворення Фур'є, отримаємо спектр потужності сигналу частотах  $\omega$  та  $2\omega$ :

$$P_s(f) = \frac{A^2 \tau^2 f_0^2}{3} \left[ \left(\frac{\Delta_0 B}{\sigma^2}\right)^2 \delta(\omega) + \left(\frac{B^2}{4\sigma^2}\right)^2 \delta(2\omega) \right] \exp\left(-\frac{\Delta_0^2}{\sigma^2}\right).$$

Для сигналу основної частоти можна розрахувати відношення сигнал–шум  $SNR$  використовуючи стандартне визначення:

$$SNR = 10 \cdot \lg \left( \frac{2f_0 \Delta_0^2 B^2}{\sigma^4 \sqrt{3}} \right) \exp\left(-\frac{\Delta_0^2}{2\sigma^2}\right).$$

Залежність  $SNR$  від величини стандартного відхилення є типовою рисою для стохастичного резонансу. Незважаючи на простоту і наближений характер розглянутої теорії, вона описує основні властивості ефекту й якісно відповідає результатам експериментів і даним числового моделювання.

## **20.6. Стохастичний резонанс і обробка інформації живими організмами**

Ефект стохастичного резонансу широко використовують для пояснення багатьох фізичних і хімічних процесів, явищ, а також для створення низки технічних пристроїв.

Проте з фундаментально-наукового погляду найбільший інтерес становлять додатки теорії стохастичного резонансу до досліджень процесів обробки інформації біологічними системами. Вважають, що у процесі еволюції живі організми пристосувались використовувати неусувний внутрішній шум та шум навколишнього середовища для оптимального виділення корисної інформації. Про це свідчать дослідження сенсорних процесів у гідродинамічно чутливих механорецепторах річкового рака і чутливих до руху повітря рецепторів цвіркуна. Сенсорні системи у рака і цвіркуна розвивались, очевидно, з метою забезпечення раннього виявлення наближення хижака. У випадку рака – це голодна риба, у випадку цвіркуна – оси, які відкладають яйця в тілі цвіркуна. Щоб уникнути зустрічі з хижак, рак має завчасно виділити майже періодичний сигнал (коливання води, зумовлені рухом тіла риби) на фоні випадкових коливань води, а цвіркун – періодичні коливання повітря (зумовлені роботою крил оси) на фоні шуму. Як показали дослідження, теорія нединамічного або порогового стохастичного ефекту здатна пояснити вказані властивості живих систем. Більш того, ця теорія якісно пояснює особливості зорового сприйняття людини.

Система механорецепторів річкового рака розміщена на його хвості і зображена на рис. 20.6. Хвіст у вигляді віяла має приблизно 250 довгих волосків, пов'язаних із внутрішнім первинним вузлом через сенсорні нейрони, що сконцентровані в дев'яти первинних основах.

На хвості є шостий нервовий вузол, який включає пару фоторецепторних клітин. Як показано на рис. 20.6, можна вимірювати сигнали або від сенсорних нейронів механорецепторів, або від вихідного нейрона фоторецептора шостого нервового вузла. З цією метою необхідно за допомогою хірургічного втручання забезпечити можливість введення мікроелектродів для вимірювання сигналів нейрона.

Рух волосків механорецепторів стимулювався збудженням рідини в напрямках, вказаних на рис. 20.6. Збудження рідини здійснювалось за допомогою гармонічного сигналу з частотою 5...100 Гц і амплітудою 10...100 нм, який поширювали в рідині зі швидкістю від 100 до 1000 мкм/с<sup>-1</sup>. Відгук фоторецепторної клітини можна виміряти як під час гідродинамічного збудження, так і за наявності світлового потоку сталої інтенсивності, сфокусованого на фоторецепторну ділянку. Як джерело шуму використовували шум навколишнього середовища і зовнішній шум.

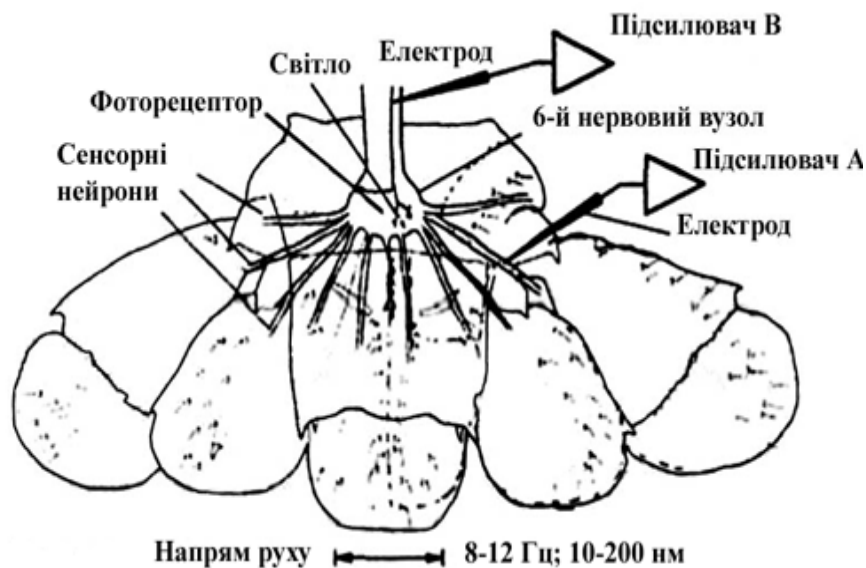


Рис. 20.6. Система нейрорецепторів хвоста річкового рака

Вимірювання відношення сигнал–шум із сенсорного нейрона річкового рака залежно від інтенсивності зовнішнього шуму демонструє ефект стохастичного резонансу. Результати експерименту разом із теоретичними даними і даними моделювання системи Фітцх'ю–Нагумо зображено на рис. 20.7.

Модель Фітцх'ю–Нагумо – спрощена модель, яка відтворює основні властивості хвиль збудження нейрона в моделі Ходжкіна–Хакслі. Містить дві змінні: швидку  $U$ , відповідну мембранному потенціалу, і повільну  $v$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = C\varepsilon^{-1} \left( U - \frac{U^3}{3} - v \right) + \Delta U;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon(U + \beta - \gamma v),$$

де всі коефіцієнти  $C$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  малі величини і  $\varepsilon \ll 1$ .

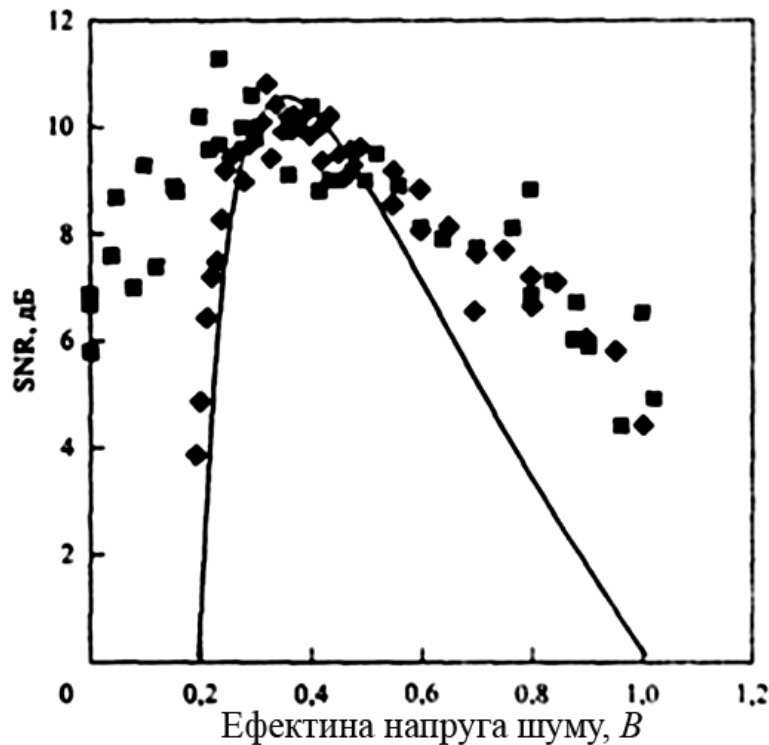


Рис. 20.7. Ефект СР у сенсорній системі річкового рака (■), результати теорії (неперервна крива) і дані моделювання системи Фітцх'ю–Нагумо (◆)

Отримані дані свідчать, що система механорецепторів забезпечує сприйняття періодичного сигналу найкраще в умовах дії шуму оптимальної інтенсивності. Найвищу чутливість сенсорні нейрони проявляли до сигналів із частотою близькою до 10 Гц. Відомо, що саме ця частота характерна для коливань хвиль, викликаних рибою. Оскільки гідродинамічні хвилі поширюються в воді швидше, ніж сама риба, то річковий рак завчасно сприймає сигнал небезпеки і встигає сховатися.

Наведені дані було підтверджено результатами експериментів із цвіркуном. Щоб уникнути зустрічі з осама, цвіркун використовує систему дуже схожу з описаною вище для річкового рака. Цвіркун має два задніх придатка, які також покриті волосками механорецепторів. Волоски цвіркуна реагують на коливання повітря в діапазоні 80...150 Гц. Саме в цьому частотному діапазоні зосереджений спектр характерних частот коливань повітря, що збуджуються рухом крил осі.

Майже у всіх експериментах із вивчення стохастичного резонансу використовують методи комп'ютерного аналізу сигналів на вході та виході систем, що вивчаються, за допомогою котрих обґрунтовується підсилення або збільшення інформації під час дії



оптимального рівня шуму. Чи використовує людина або тварина цю підсилену інформацію з'ясувати неможливо яким-небудь прямим вимірюванням електрофізіологічних характеристик. Однак можна протестувати загальний інтегральний ефект у психологічних експериментах з людиною. Інакше кажучи, можна замінити складне програмне забезпечення обробки даних на ЕОМ на людське сприйняття.

Такі експерименти провели спеціально для дослідження здатності людини сприймати зорову інформацію на фоні впливу шумів. Довільно обрану фотографію (картинку) оцифрували на 256 рівнів у сірому масштабі та виводили на екран дисплею в якості зображення  $256 \times 256$  пікселів. Потім картинку розміщували нижче порогового рівня й її не було видно. До підпорогового рівня додавався гаусівський шум із нульовим середнім, котрий діяв на кожний дискретний елемент екрана незалежно (джерела шуму в кожному пікселі були некорельованими). Якщо в якому-небудь конкретному пікселі долали пороговий рівень, він набував чорного кольору. Пікселі з рівнем нижче порогу залишаються білими. За малого рівня шуму лише частина пікселів з'являється на екрані у вигляді чорних точок, і картинку неможливо розпізнати. Якщо шум занадто великий, розпізнати образ також складно.

Однак завжди існує певне оптимальне значення інтенсивності шуму, коли інформація про картинку максимальна й її можна сприйняти. Один з прикладів показано на рис. 20.8.



Рис. 20.8. Зображення на екрані за різного рівня шуму, який додано до підпорогового сигналу

Результати вимірювання порогу залежно від рівня шуму для однієї конкретної людини подано на рис. 20.9. Величина порогу чутливості досягає мінімуму, коли інформація, що передається в зоровий центр мозку людини, максимальна.

У цьому експерименті проявляється характерна особливість стохастичного резонансу у вигляді мінімуму порогу чутливості.

Цей висновок можна обґрунтувати на основі наближеної теорії порогового ефекту.

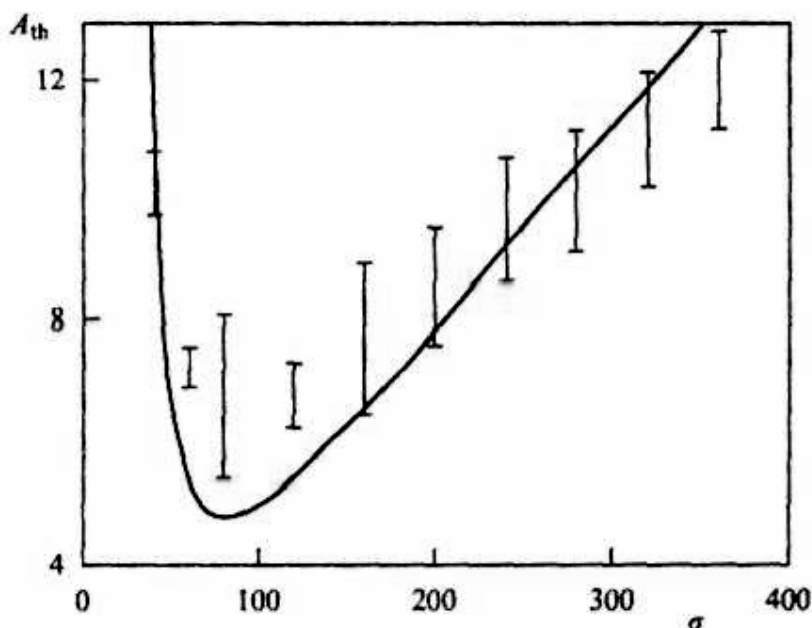


Рис. 20.9. Поріг зорового сприйняття  $A$  залежно від ефективної амплітуди шуму  $\sigma$

### Завдання

Розглянути спектри потужності послідовності ідентичних імпульсів.

1. Послідовність рівновіддалених імпульсів, що мають однакову тривалість і випадкову амплітуду.

2. Послідовність імпульсів, що мають однакові амплітуди і тривалість, але випадковий час появи.

3. Послідовність рівновіддалених імпульсів із одноковою амплітудою і випадковою тривалістю.

## Розділ 21. ІНДУКОВАНІ ШУМОМ ПЕРЕХОДИ

### 21.1. Загальні положення

Розглянемо системи, які моделюються феноменологічним рівнянням типу

$$\dot{X} = f_{\lambda}(X),$$

де  $X$  – величина, що характеризує стан системи;  $\lambda$  – зовнішній параметр, що залежить від стану середовища. Для того щоб врахувати флуктуації середовища, змінюємо параметр  $\lambda$  у феноменологічному рівнянні стаціонарним випадковим процесом  $\lambda_t = \lambda + \sigma \xi_t$ , де зовнішній шум  $\xi_t$  має нульове середнє значення та інтенсивність  $\sigma^2$ . Для опису швидких флуктуацій середовища приймаємо ідеалізацію білого шуму. Системи, пов'язані зі швидким флуктуючим середовищем, можна моделювати марковськими процесами, що є розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь. Феноменологічне рівняння, що є лінійним за зовнішнім параметром (випадок, який охоплює широке коло задач)

$$f_{\lambda}(X) = h(X) + \lambda g(X),$$

допускає під час дії швидкого зовнішнього шуму моделювання за допомогою дифузійного процесу з диференціальними моментами, рівними відповідно  $f(X)$  та  $\sigma^2 g^2(X)$  чи  $f(X) + \sigma^2 g'(X)g(X)/2$  та  $\sigma^2 g(X)$ . Інакше кажучи, в основу опису таких систем може бути покладено СДР Іто

$$dX_t = [h(X_t) + \lambda g(X_t)]dt + \sigma g(X_t)dW_t$$

чи СДР Стратоновича

$$dX_t = [h(X_t) + \lambda g(X_t)]dt + \sigma g(X_t) \circ dw_t.$$

Рівняння Фоккера–Планка (РФП), що визначає еволюцію густини ймовірності переходу  $p(y, t | x, s)$ , має вигляд у разі СДР Іто

$$\partial_t p(y, t | x) = -\partial_y f_{\lambda}(y) p(y, t | x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{yy} g^2(y) p(y, t | x),$$

а у разі СДР Стратоновича

$$\partial_t p(y, t | x) = -\partial_y \left[ f_{\lambda}(y) + \frac{\sigma^2}{2} g(y) p(y) \right] p(y, t | x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{yy} g^2(y) p(y, t | x),$$

де  $\partial_y$  – часткова похідна за величиною  $y$ .

Використовуючи цю процедуру моделювання можна дослідити вплив зовнішнього шуму на макроскопічну поведінку нелінійної системи.

## 21.2. Стаціонарне розв'язання рівняння Фоккера–Планка

Систему, яку випробовують впливом зовнішнього шуму, після проходження доволі великого проміжку часу, виходить на стаціонарний режим. Стаціонарна поведінка означає, що за  $t \rightarrow \infty$  у системі встановлюється густина ймовірності  $p_s(x)$ , форма якої не змінюється з часом: ймовірність знайти систему в околі певного стану  $x$  перестає залежати від часу. Траєкторія  $X_t(\omega)$  не прямує до стаціонарної траєкторії  $x(\omega)$ ; стан системи продовжує флюктувати, він змінюється від одного моменту часу до другого, але при цьому флюктуації системи такі, що  $X_t$  та  $X_{t+\tau}$  мають однакову густину ймовірності  $p_s(x)$ .

Густина ймовірності  $p_s(x)$  – стаціонарне розв'язання РФП, яке можна записати у вигляді

$$\partial_t p(x, t | x_0, 0) + \partial_x J(x, t | x_0, 0) = 0,$$

де

$$J(x, t | x_0, 0) = f(x)p(x, t | x_0, 0) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_x g^2(x)p(x, t | x_0, 0).$$

Величину  $J$  можна інтерпретувати як потік ймовірності, тоді попереднє рівняння стає рівнянням неперервності, що виражає зберігання ймовірності. Стаціонарне РФП перетворюється в рівняння  $\partial_x J_s(x) = 0$ . З нього випливає, що стаціонарний потік ймовірності постійний на просторі станів  $[b_1, b_2]$ :

$$J_s(x) = \text{const} \text{ за } x \in [b_1, b_2].$$

У стаціонарному випадку в просторі станів для ймовірності немає ні витоків, ні стоків. Потік ймовірності всередині простору станів рівний потоку через межі, які позначаємо  $J$ :

$$J \equiv J_s(x) = J_s(b_1) = J_s(b_2).$$

Отже, стаціонарна густина ймовірності  $p_s(x)$  задовольняє рівняння

$$-f(x)p_s(x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_x g^2(x)p_s(x) = -J.$$

Для розв'язання цього рівняння введемо допоміжну функцію

$$q(x) = g^2(x)p_s(x),$$

при цьому РФП перейде в рівняння

$$\partial_x q(x) = \frac{2}{\sigma^2} \frac{f(x)}{g^2(x)} q(x) - \frac{2}{\sigma^2} J,$$

розв'язок якого має вигляд

$$q(x) = N \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) - \frac{2J}{\sigma^2} \int^x \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_z^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) dz.$$

Тому для стаціонарної густини ймовірності маємо

$$p_s(x) = \frac{N}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) - \frac{2J}{\sigma^2 g^2(x)} \int^x \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int_z^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) dz.$$

Постійну інтегрування  $N$  визначають із умови нормування, а величина  $J$ , як потік ймовірності на межі простору станів, залежить від характеру цієї межі. Якщо межа дійсна (чи регулярна з миттєвим віддзеркаленням у якості граничної умови), то немає потоку ймовірності з простору станів, і тому  $J = 0$ .

Розглянемо ситуації в яких ці умови виконуються, тоді

$$p_s(x) = \frac{N}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right).$$

Для того, щоб ця величина була стаціонарною густиною ймовірності, її необхідно нормувати, тобто вибрати

$$N^{-1} = \int_{b_1}^{b_2} \frac{1}{g^2(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right) < \infty.$$

Якщо одна з меж регулярна (притягальна чи поглинальна), а як граничну умову на ній використано поглинання, то  $p_s(x) \equiv 0$  за  $x \in (b_1, b_2)$ , тобто отримаємо тривіальне розв'язання стаціонарного РФП. Тоді кажуть, що регулярної стаціонарної густини ймовірності не існує.

Для дифузійного процесу з дрейфом  $f + \sigma^2 g'g / 2$  і дифузиею  $\sigma^2 g^2$ , тобто для процесу, що відповідає СДР Стратоновича

$$dX_t = f(X_t)dt + \sigma g(X_t) \circ dW_t,$$

стаціонарна густина ймовірності (границі припускають такі, що  $J = 0$ ) має вигляд

$$p_s(x) = \frac{N}{g(x)} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2} \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du\right).$$

Якщо СДР допускає стаціонарне розв'язання, яке чітко додатне всередині простору станів, тобто  $p_s(x) > 0$ , то розв'язання РФП зводиться до  $p_s(x)$  за  $t \rightarrow \infty$ , тобто  $p(x, t) = \text{const} p_s(x)$ .

### 21.3. Адитивний і малий мультиплікативний шум в околі детерміністичної поведінки

Розглянемо стаціонарний стан нелінійної макроскопічної системи, пов'язаної з середовищем. Якщо середовище не змінюється, то стаціонарний стан системи визначається нулями правої частини детермінованого феноменологічного рівняння

$$\dot{X} = h(X) + \lambda g(X).$$

Якщо система стійка, тоді  $\epsilon K > 0$ , і виконуються такі умови:

$$\begin{aligned} h(x) + \lambda g(x) < 0 & \quad \text{за всіх } x > K; \\ h(x) + \lambda g(x) > 0 & \quad \text{за всіх } x < -K. \end{aligned}$$

Якщо  $X$  – величина типу концентрації, яка має бути невід'ємною, то права частина рівняння має задовольняти умову

$$h(0) + \lambda g(0) \geq 0 \quad \text{за всіх } \lambda.$$

Якщо обидві границі  $b_1$  і  $b_2$  кінцеві, то необхідно, щоб умови

$$h(b_1) + \lambda g(b_1) \geq 0 \quad \text{та} \quad h(b_2) + \lambda g(b_2) \leq 0$$

виконувались за будь-яких  $\lambda$ .

Розв'язок диференціального рівняння першого порядку з однією незалежною змінною є монотонною функцією часу, оскільки за кожного  $X$  «швидкість»  $\dot{X}$  приймає одне і тільки одне визначене значення. Тобто феноменологічне рівняння допускає принаймні один стійкий стан. Якщо це рівняння допускає більше одного стаціонарного стану, то стійкі та нестійкі стани чергуються. Якщо існує декілька стійких стаціонарних станів, то простір станів розділяється на ділянки, що не перетинаються – *ділянки тяжіння* стійких станів. Феноменологічне рівняння можна записати у вигляді

$$\dot{X} = -\partial_x V_\lambda(X),$$

де  $V_\lambda(X)$  – потенціал;  $V_\lambda(x) = -\int^x [h(z) + \lambda g(z)] dz$ .

Стаціонарні стани визначаються екстремумами потенціалу  $V_\lambda(x)$ , а нормальні моди  $\omega(\bar{X})$  під час аналізу стійкості за лінійним наближенням – рівнянням

$$\omega(\bar{X}) = -\partial_{xx} V_\lambda(\bar{X}).$$

Тому стійкі стаціонарні стани відповідають мінімумам, а нестійкі – максимумам потенціалу  $V_\lambda(x)$ .

Визначимо, як змінюється стаціонарний стан системи під дією флуктуації середовища. Як випадкова величина  $X(\omega)$  характеризується

своїм розподіленням імовірності, а в детермінованому випадку стаціонарна густина ймовірності складається з дельтаподібних піків, зосереджених на стаціонарному стані  $\bar{X}$ .

Уявимо, що  $x$  – координата кульки, яка з великим тертям рухається «ландшафтом», що задається потенціалом  $V_\lambda(x)$ . Зовнішні флуктуації змушують кульку здійснювати невеликі коливання в околі положення рівноваги і цим призводять до розпливання розподілу ймовірності. Можна сподіватися на таку стаціонарну поведінку: густина ймовірності досягає максимуму у точці, що відповідає мінімуму потенціалу, і дещо розпливається в її околі залежно від інтенсивності зовнішнього шуму. Якщо існує більш ніж один мінімум і немає ефективної верхньої межі зовнішніх флуктуацій, то можна сподіватися на багатомодову густину ймовірності з піками, що відповідають різним локальним мінімумам потенціалу. Отже, стан системи, тобто випадкова величина як вид відповідного розподілу ймовірності, визначається «взаємодією» між динамікою системи та зовнішніми флуктуаціями.

Якщо зовнішній шум адитивний, тобто  $g(x) = \text{const} = c$ , то величина

$$U(x) = -\frac{1}{c^2}V_\lambda(x),$$

де

$$U(x) = \int^x \frac{f(u)}{g^2(u)} du,$$

і найбільший із максимумів функції  $U$  та густина ймовірності  $p_s(x)$  співпадають із положенням найглибшої потенціальної ями (найбільший максимум і дно найглибшої ями не зміщені відносно один одного). У цьому разі навіть аналізу на основі детермінованого опису виявляється цілком достатньо, щоб вирішити, який з локальних стійких станів найбільш стійкий. Усі інші локальні стійкі стани називають метастабільними.

Якщо ж дія зовнішнього шуму залежить від стану системи, тобто якщо шум мультиплікативний, то

$$U(x) \neq -\frac{1}{c^2}V_\lambda(x),$$

і детермінований стаціонарний стан, що породжує найбільший максимум функції  $U(x)$  не обов'язково збігатиметься з найглибшою потенціальною ямою в детерміністичному описанні.

Критерій абсолютної стійкості для детермінованих стаціонарних станів залежить від природи випадкових збуджень, що впливають на систему. Поведінка нелінійної системи як функції зовнішнього параметра, зокрема шуму довільної інтенсивності, найкраще можна описати за допомогою відповідної біфуркаційної діаграми. У визначеному діапазоні значень зовнішніх параметрів стаціонарні стани зазнають тільки кількісних змін, але за деяких критичних значеннях зовнішніх параметрів відбуваються якісні зміни у вигляді нерівноважного фазового переходу першого або другого роду. *Перехід відбувається у тій самій точці простору параметрів, до яких входять середнє значення зовнішнього шуму, його дисперсія, час кореляції тощо, де характер функції, що задає відображення простору елементарних подій  $\Omega$  у простір станів  $[b_1, b_2]$ , якісно змінюється.* Це відповідає якісній зміні розподілу ймовірності, що характеризує випадкову величину.

У детерміністичному випадку нерівноважний фазовий перехід відбувається у точці, в якій зазнає якісних змін потенціал  $V_\lambda(x)$ , наприклад змінюється кількість локальних екстремумів. У стохастичному випадку екстремуми стаціонарної густини ймовірності  $p_s(x)$  природно розглядати як показники, «що сигналізують» про перехід. Якісна зміна стаціонарного стану однозначно визначається на екстремумах густини ймовірності.

На прикладі гірського ландшафту, що задається потенціалом, адитивний зовнішній шум не змінює якісно стаціонарну поведінку системи з однією змінною. Оскільки цей шум не впливає на сам потенціал, він надає системі тільки дезорганізуючого впливу, призводячи до розпливання густини ймовірності  $p_s(x)$  в околі детермінованих стаціонарних станів.

Для мультиплікативного шуму – дія середовища, що флюктує, залежить від стану системи. Це означає, що не тільки частинка здійснює малі коливання в долинах, що задаються потенціалом, але й окремі ділянки «місцевості» випадково піднімаються й опускаються, що може призвести до появи нових ям. Це означає, що поява дезорганізуючої дії, що надає системі й адитивного шуму, мультиплікативний шум може призводити до появи нових станів. Він може індукувати нові нерівноважні фазові переходи, непередбачені в межах звичайного феноменологічного описання. Ці переходи називають *переходами індукованим шумом*.



## 21.4. Системи Ферхюльста в середовищі з білим шумом

Модель Ферхюльста спочатку призначалася для опису росту біологічних популяцій, але з часом виявилось, що відповідне моделі феноменологічне рівняння

$$\dot{X} = \lambda X - X^2$$

трапляється в багатьох вельми різноманітних галузях. У стандартній інтерпретації цього рівняння величина  $X$  характеризує чисельність біологічної популяції, а її фізично допустимий простір станів відповідає інтервалу  $[0, \infty)$ . Мальтусівський параметр росту  $\lambda$  – різниця між народжуваністю та смертністю в популяції. Другий член – самообмежувальний – виражає обмеженість ресурсів популяції, наприклад їжі. Розв'язок рівняння Ферхюльста має вигляд

$$X(t) = X(0)e^{\lambda t} \{1 + X(0)[(e^{\lambda t} - 1) / \lambda]\}^{-1}.$$

Якщо  $\lambda < 0$ , рівняння допускає тільки один стійкий стаціонарний розв'язок  $\bar{x} = 0$ . Якщо  $\lambda = 0$ , розв'язок стає нестійким і зазнає біфуркації: від нього відділяється нова гілка стаціонарних станів  $\bar{x} = \lambda$ . Нова гілка відділяється від старої неперервно, але недиференційовано, тому в точці  $\lambda = 0$  система зазнає фазового переходу другого роду (рис. 21.1).

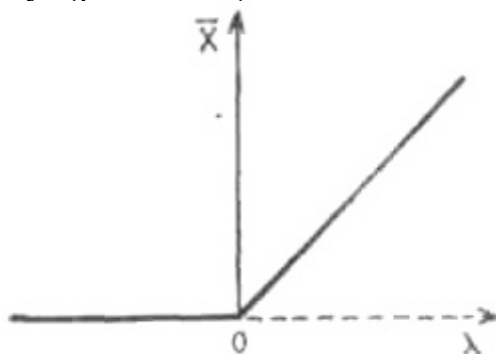


Рис. 21.1. Біфуркаційна діаграма моделі Ферхюльста (суцільна лінія – стійкі стани, штрихова – нестійкі стани)

Розглядаючи випадок, коли флуктуації середовища відбуваються швидше порівняно з величиною  $\tau_{\text{макро}} = \lambda^{-1}$ , що визначає макроскопічний часовий масштаб еволюції. Зміни стану середовища впливають на систему через зовнішній параметр  $\lambda$ . Зобразимо параметр  $\lambda$  у вигляді  $\lambda_t = \lambda + \sigma \xi_t$ , де  $\lambda$  – середнє значення;  $\xi_t$  – гаусівський білий шум, а  $\sigma$  характеризує інтенсивність зовнішнього шуму. Так само феноменологічне рівняння Ферхюльста замінюється диференціальним СДР

$$dX_t = (\lambda X_t - X_t^2)dt + \sigma X_t dW_t = f(X_t)dt + \sigma g(X_t)dW_t.$$

Вибір процесу, що відповідає інтерпретації СДР Іто або Стратоновича, виконується залежно від конкретної ситуації, яку потрібно промоделювати. У випадку інтерпретації СДР Іто, відповідне рівняння РФП для густини ймовірності  $p(x,t)$  дифузійного процесу має вигляд

$$\partial_t p(x,t) = -\partial_x [(\lambda x - x^2)p(x,t)] + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} x^2 p(x,t),$$

а у випадку інтерпретації Стратоновича –

$$\partial_t p(x,t) = -\partial_x [(\lambda x - x^2 + \frac{\sigma^2}{2} x)p(x,t)] + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx} x^2 p(x,t).$$

Фізичний простір станів, яким має бути обмежений дифузійний процес, є невід'ємною дійсною напіввіссю, при цьому  $0$  та  $\infty$  – внутрішні межі процесу, оскільки  $g(0) = 0$  та  $f(\infty) = -\infty$ .

Межа  $b_1$  дійсна, якщо  $\beta > 0$ ;

$$L_1(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \exp\left(-\int_{\beta}^x \frac{2f(z)}{\sigma^2 g^2(z)} dz\right) = \infty,$$

тому зовнішні межі процесу природні, якщо

$$L_1(0) = c \int_0^{\beta} x^{-(2\lambda/\sigma^2)-2+\nu} \exp\left(\frac{2x}{\sigma^2}\right) dx = \infty;$$

$$L_1(\infty) = c \int_0^{\infty} x^{-(2\lambda/\sigma^2)-2+\nu} \exp\left(\frac{2x}{\sigma^2}\right) dx = \infty,$$

умова  $L_1(\infty) = \infty$  завжди виконується, тобто нескінченність є природною межею за всіх значень  $\lambda$  та  $\sigma$ .

Із умови для нижньої межі  $L_1(0) = \infty$  випливає, що нуль – природна межа, якщо  $\lambda > \sigma^2 / 2$  в інтерпретації Іто, і  $\lambda > 0$  в інтерпретації Стратоновича.

За цих умов жодна з двох внутрішніх меж недосяжна, і тому на роз'язок РФП не потрібно накладати жодних межових умов. Якщо  $\lambda < 0$  (Стратонович) і  $\lambda < \sigma^2 / 2$  (Іто), отримуємо  $L_2(0) = \infty$ .

Отже,  $0$  – притягуюча межа.

Стаціонарний розв'язок РФП визначають з виразу

$$p_s(x) = Nx^{(2\lambda/\sigma^2)-\nu} \exp\left(-\frac{2x}{\sigma^2}\right) \quad \text{за} \quad \begin{array}{l} \nu = 1 \quad (\text{Стратонович}); \\ \nu = 2 \quad (\text{Іто}), \end{array}$$

тобто величина  $p_s(x)$  інтегрована на інтервалі  $[0, \infty)$  тоді і тільки тоді, коли

$$2\frac{\lambda}{\sigma^2} - \nu + 1 > 0,$$

тобто якщо  $\lambda > 0$  в інтерпретації Стратоновича, й  $\lambda > \frac{\sigma^2}{2}$  в інтерпретації Іто. Це збігається з умовою природності межі  $b_1 = 0$ .

Якщо стаціонарної густини ймовірності не існує, то необхідно мати на увазі, що нуль – не тільки внутрішня межа, але й стаціонарна точка: якщо  $x = 0$  перенос і дифузія одночасно обертаються в нуль, оскільки нуль – точка, що притягає. Уся стаціонарна «маса» ймовірності має бути зосереджена в значенні нуль. Це означає, що

$$p_s(x) = \delta(x), \text{ за } \lambda < 0 \text{ (Стратонович); } \lambda < \frac{\sigma^2}{2} \text{ (Іто).}$$

Екстремуми густини ймовірності  $p_s(x)$  є найкращими індикаторами переходу в стаціонарній поведінці системи. Їх можна отождествити з макроскопічними стаціонарними станами систем, і вони є параметрами порядку для нерівноважних фазових переходів. У моделі Ферхюльста екстремуми густини ймовірності  $p_s(x)$  збігаються з нулями рівняння

$$\lambda x_m - x_m^2 - \frac{v\sigma^2}{2} x_m = 0;$$

$$x_{m1} = 0; \quad x_{m2} = \lambda - \frac{v\sigma^2}{2}.$$

Корінь  $x_{m2}$  завжди максимальний, а  $x_{m1}$  – максимальний за  $0 < \lambda < \frac{vc^2}{2}$ . У такий спосіб у флуктуючому середовищі модель Ферхюльста, на відміну від детермінованого випадку, має дві точки переходу.

Перехід  $\lambda_s^{(1)} = 0$  (Стратонович), або  $\lambda_I^{(1)} = \frac{\sigma^2}{2}$  (Іто) зумовлений природою межі в нулі. Інший перехід за  $\lambda_s^{(2)} = \frac{\sigma^2}{2}$  (Стратонович) або  $\lambda_I^{(2)} = \sigma^2$  (Іто) відповідає різкій зміні розподілу густини ймовірності, максимум якої припадає на ненульову кількість популяції. Загальний перебіг густини ймовірності зображено на рис. 21.2 і характеризується такими особливостями:

1. Якщо  $\lambda_s < 0$   $\left( \lambda_1 < \frac{\sigma^2}{2} \right)$ , то стаціонарна точка нуль стійка.

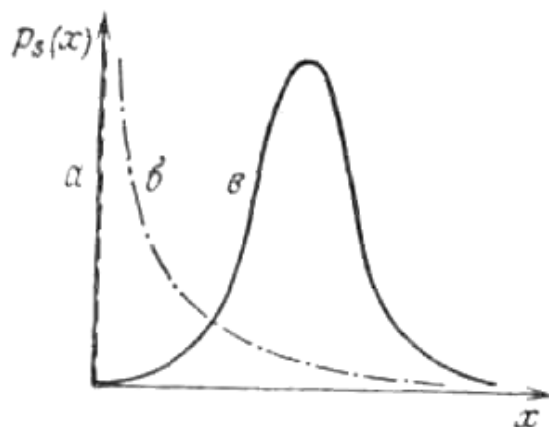


Рис. 21.2. Перебіг стаціонарної густини ймовірності в моделі Ферхюльста за різних значень інтенсивності  $\sigma^2$  зовнішнього шуму:

$$a - \lambda_s < 0 \text{ або } \lambda_I < \frac{\sigma^2}{2}; \quad b - 0 < \lambda_s < \frac{\sigma^2}{2} \text{ або } \frac{\sigma^2}{2} < \lambda_I < \sigma^2;$$

$$v - \lambda_s > \frac{\sigma^2}{2} \text{ або } \lambda_I > \sigma^2$$

2. У точці  $\lambda_s = 0$  ( $\lambda_I = \frac{\sigma^2}{2}$ ) відбувається перехід, оскільки за

$\lambda_s = 0$  ( $\lambda_I > \frac{\sigma^2}{2}$ ) стаціонарна точка  $x_0 = 0$  стає нестійкою й виникає нова справді стаціонарна густина ймовірності.

3. У нулі стаціонарна густина ймовірності обертається в нескінченність, тобто зберігає частину властивостей  $\delta$ -функції. У деякому сенсі  $\delta$ -функція починає розпливатися вправо, коли  $\lambda$  пройде цю точку переходу.

4. Якщо параметр  $\lambda_s > \frac{\sigma^2}{2}$  ( $\lambda_I > \sigma^2$ ), то характер розподілу гус-

тини знову різко змінюється. Отже,  $\lambda_s = \frac{\sigma^2}{2}$  ( $\lambda_I = \sigma^2$ ) – друга точка переходу. Перехід у системі можна викликати, підтримуючи постійним середній стан середовища, але збільшуючи або зменшуючи інтенсивність флуктуацій у середовищі.

Точка  $\lambda_s = 0$  ( $\lambda_I = \frac{\sigma^2}{2}$ ) відповідає переходу до справжнього

зростання популяції. Якісна зміна такого роду зумовлена зміною характеру межі  $\lambda_I = 0$ , яка з притягальної стає природною.

Точка  $\lambda_s = \frac{\sigma^2}{2}$  ( $\lambda_I = \sigma^2$ ) відповідає якісній зміні випадкової величини і не пов'язана зі зміною характеру межі. Ймовірність вимирання популяції в цій точці прямує до нуля. Лінеаризація рівняння Ферхюльста може описувати тільки перший перехід. Другу точку переходу виявити на лінеаризації неможливо.

Індукований шумом перехід наведеного типу, а саме зрушення переходу, що вже існує на звичайних детермінованих біфуркаційних діаграмах, характеризується тим, що може відбуватися за достатньо малих значень інтенсивності шуму, якщо системи досить близькі до детермінованої точки втрати стійкості.

### 21.5. Модель хижаків із двома станами

Розглянемо популяцію хижаків, що мешкають на певній території й харчуються особинами популяції жертв  $X$  за таких припущень:

1. Якщо немає хижаків, навколишнє середовище незмінне для жертв, тому швидкість зростання їх популяції можна описати логістичною функцією, яка має вигляд  $\lambda(X(1-X/K))$ .

2. Характерні часи істотної зміни популяції хижаків та жертв дуже відрізняються, оскільки кількість хижаків, принаймні в середньому, залишається суворо постійним протягом життя одного покоління жертв.

3. Хижаки можуть перебувати лише у двох станах: або в стані «полювання», або в стані «відпочинку». Кількість хижаків у кожному стані дорівнюють  $Y$  та  $Z$  відповідно. Хижек витрачає в середньому час  $\tau_H$  на полювання і час  $\tau_R$  на відпочинок, які разом становлять набагато менше часу життя одного покоління жертв, тобто  $\tau_H, \tau_R \ll \lambda^{-1}$ .

За цих умов взаємодію хижаків і жертв можна зобразити у вигляді замкнутої петлі, яка описує перемикання хижака з одного типу дій на другий (рис. 21.3).



Рис. 21.3 Взаємодія хижаків і жертв

Суттєвою особливістю цієї моделі є те, що діяльність хижаків на певній території формально аналогічна поведінці ферментів або каталізаторів в хімічних реакціях: каталізатори постійно перетворюють реагенти, проте самі не зникають у ній. Харчуючись жертвами, постійна популяція хижаків виробляє аналогічний ефект. Цією аналогією можна надати кількісний характер, якщо припустити, що взаємодія між хижаками і жертвами описується системою рівнянь, подібних до рівнянь хімічної кінетики:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A - \lambda X(1 - X/K) - \frac{1}{\tau_H} XY; \\ \dot{Y} &= -\frac{1}{\tau_H} XY + \frac{1}{\tau_R} Z,\end{aligned}$$

де  $Y(t) + Z(t) \equiv E = \text{const}$ .

Перші два члени правої частини рівняння описують відповідно приплив жертв унаслідок імміграції та їх логістичне зростання; останній член  $-XY/\tau_H$  описує швидкість знищення жертв. Розглянемо випадок  $\lambda^{-1} \gg \tau_H, \tau_R$ . Припустимо, що повна популяція хижаків  $E$  менша порівняно з популяцією жертв  $X$ , тобто

$$\tau_H = \varepsilon \tau_H^*; \quad \tau_R = \varepsilon \tau_R^*; \quad Y = \varepsilon Y^*; \quad Z = \varepsilon Z^*,$$

де  $\varepsilon$  – мала величина;  $\tau_H^*, \tau_R^*$  – величини порядку  $\lambda^{-1}$  та  $Y^*, Z^*$  – величини порядку  $X$ . Підставивши ці значення в систему маємо

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A + \lambda X(1 - X/K) - \frac{1}{\tau_H^*} XY^*; \\ \varepsilon Y^* &= -\frac{1}{\tau_H^*} XY^* + \frac{1}{\tau_R^*} Z^*.\end{aligned}$$

Переходячи до межі  $\varepsilon \rightarrow 0$  та виключаючи  $Y^*$ , отримуємо остаточне рівняння еволюції  $X$

$$\dot{X}^* = a + X^*(1 - \theta X^*) - \beta \frac{X^*}{1 + X^*},$$

де

$$a = \frac{A\tau_R^*}{\lambda\tau_H^*}; \quad \beta = \frac{E}{\lambda\tau_H^*}; \quad \theta = \frac{\tau_H^*}{\tau_R^*K}; \quad X^* = \frac{\tau_R^*}{\tau_H^*} X.$$

Далі, для простоти, опустимо знак «\*». Особливістю стаціонарних детермінованих розв'язків є те, що вони можуть описувати катастрофи типу збірки. Відповідну критичну точку  $(\alpha_c, \beta_c, X_c)$  визначають за формулами:

$$\alpha_c = \frac{(1 - \theta)^3}{27\theta^2}; \quad \beta_c = \frac{(1 + 2\theta)^3}{27\theta^2}; \quad X_c = \frac{1 - \theta}{3\theta}.$$

З отриманих виразів видно, що необхідною умовою того, щоб відповідна критична точка мала фізичний сенс ( $\alpha_c, X_c > 0$ ), є нерівність  $\theta < 1$ . Отже, стаціонарні розв'язки  $X$  як функції  $\beta$  (в межах малих  $\theta$ ) завжди мають властивість бістабільних значень (рис. 21.4 а). Цієї межі завжди можна досягнути збільшенням підтримувальної ємності

території  $K$  або зменшенням відношення  $\tau_H/\tau_R$ ; чим кращим мисливцем є хижак, тим із більшою ймовірністю реалізується бістабільна ситуація. Інакше кажучи, якщо популяція  $E$  достатньо ефективних хижаків, що полюють зростає на цій території, то популяція жертв зменшується безперервно тільки до значення  $\beta$  відповідно точці повороту на гістерезисній петлі. За подальшого зменшення відбувається стрибок і значення  $X$  різко спадає до нижньої гілки стаціонарних станів. Якщо  $\theta$  фіксоване за значення менше одиниці, то виникнення області бістабільності залежить від значення швидкості імміграції  $\alpha$  (рис. 21.4 б). Коли  $\alpha = 0$ , крива  $X$  має точку перетину з лінією  $x = 0$  – завжди є стаціонарним розв'язком; якщо точка  $\bar{X} = 0$  за  $\beta = 1$ , тоді точка перетину також завжди є стаціонарним розв'язком; точка  $\bar{X} = 0$  стійка за  $\beta > 1$ , і нестійка – в іншому випадку. Зростання імміграції на розглянутій території призводить до того, що точка перетину з  $X = 0$  прямує до нескінченності, що зумовлює зникнення бістабільності.

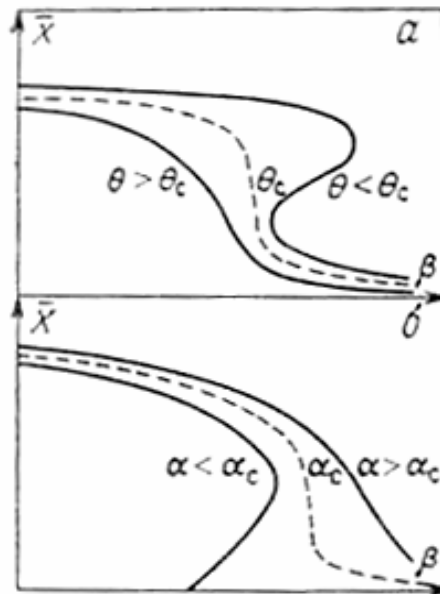


Рис. 21.4. Залежність стаціонарного значення  $X$  від  $\beta$ .

$a$  – за фіксованого  $\alpha$  та значень  $\theta$ , великих, рівних і менших  $\theta_c$ ;

$b$  – за фіксованого  $\theta$  ( $\theta < 1$ ) та значень  $\alpha$ , менших, рівних і більших  $\alpha_c$ .

Розглянемо тепер поведінку цієї системи, коли флуктуації щодо середнього значення відбуваються достатньо швидко для того, щоб можна було використовувати наближення білого шуму, тобто припустити  $\beta_t = \beta + \sigma \xi_t$ , де  $\xi_t$  – гаусівський білий шум. Детерміністичне кінетичне рівняння замінюється СДР

$$dX_t = \left[ a + (1 - \theta X_t) X_t - \beta \frac{X_t}{1 + X_t} \right] dt + \sigma \frac{X_t}{1 + X_t} dW_t.$$

Інтерпретуючи його в сенсі Іто розглянутим вище способом, отримуємо стаціонарну густину ймовірності. Її екстремуми як функції від  $\beta$  за різних значень дисперсії  $\sigma^2$  показано на рис. 21.5.

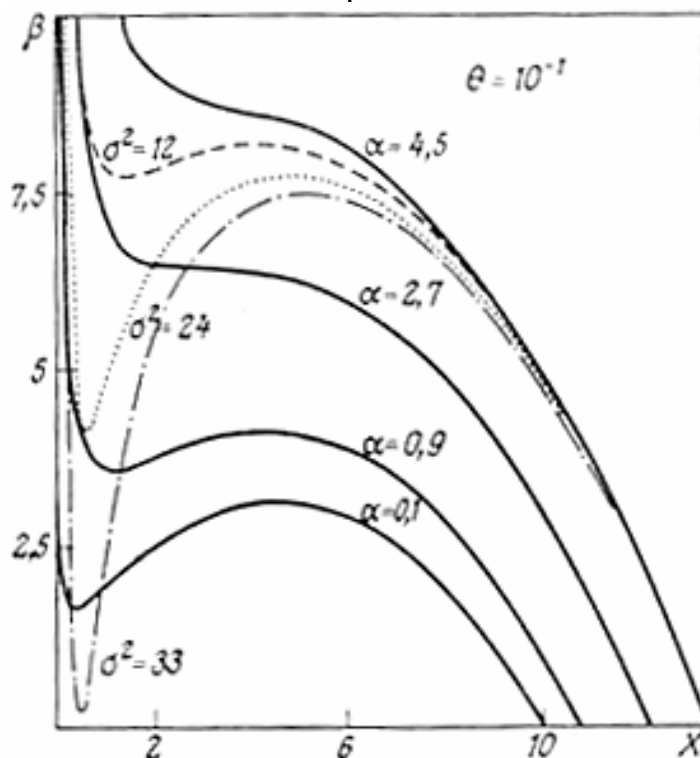


Рис. 21.5. Детермінований стаціонарний стан як функція  $\beta$  (розв'язок рівняння) за різних значень  $\sigma^2$  (суцільні криві). Штрихові криві – залежність екстремумів  $P_s(x)$  у відповідних випадках  $\alpha = 4,5 > \alpha_c$  і зазначених на малюнку значень  $\sigma^2$

Зовнішній шум дає два основних ефекти:

1. Область бістабільності зсувається в бік більш низьких значень  $\beta$ ;

2. S-подібний характер кривих посилюється для параметрів, що перевищують детерміністичне критичне значення. Ці ефекти призводять до бістабільності. Під час збільшення  $\sigma$  у функції  $p_s(x)$  з'являються два максимуми, навіть якщо в детермінованому стаціонарному випадку функція  $p_s(x)$  однозначна за всіх значень  $\beta$ . Очевидно, що шум зрушує точку детерміністичного фазового переходу, що дуже схоже на те, що спостерігається під час експериментального вивчення реакції Бріггса–Раушера. Поведінку функції  $p_s(x)$  під час збільшення параметра  $\sigma^2$  показано на рис. 21.6.

Якщо  $\sigma^2 = 3$ , розподіл має один максимум поблизу детерміністичного стаціонарного стану. Зі зростанням  $\sigma^2$  в області малих  $x$  з'являється і наростає новий пік, тоді як пік в області великих  $x$  зникає. Дивно те, що цей ефект, який сприяє знищенню популяції



жертв, спостерігається без зміни середньої швидкості знищення жертв. Зауважимо, що модель передбачає, що це явище відбувається, незважаючи на очевидний і неминучий недолік розгляду з використанням наближення білого шуму ( $\xi_t$  набуває негативних значень, що, безсумнівно, сприяє зростанню популяції  $X$ , а не її знищенню). Тому слід сподіватися, що в реальному випадку, коли значення  $\beta_t$  позитивні, зникнення популяції відбувається за значень  $\sigma^2$ , менших, ніж розглянуті вище.

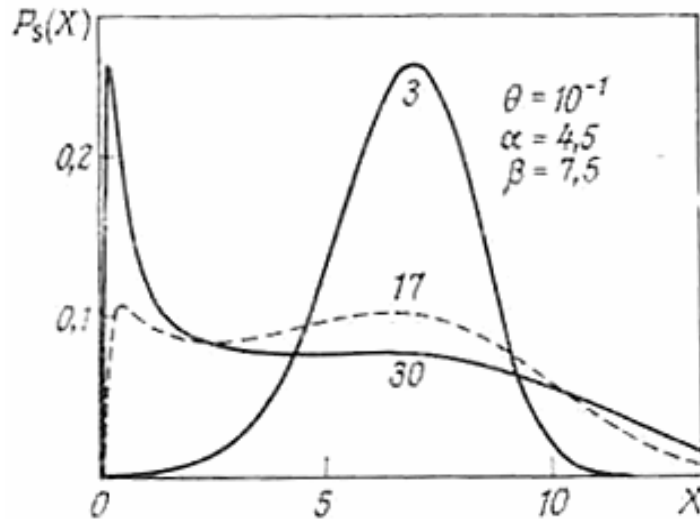


Рис. 21.6 Густина ймовірності за трьох значеннях дисперсії  $\sigma^2$

### Завдання

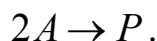
1. Знайти стаціонарний розв'язок РФП для допоміжної функції  $q = g^2(x)p_s(x)$ .
2. Провести аналіз стаціонарних станів рівняння Ферхюльста.
3. Знайти розв'язок рівняння Ферхюльста.
4. Провести аналіз внутрішніх меж дифузійного процесу, що відповідає стохастичному диференціальному рівнянню Ферхюльста.

## Додатки

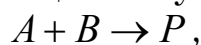
### ВІДПОВІДІ ТА РОЗВ'ЯЗКИ

#### Відповіді до розділу 1

**Кінетика реакції другого порядку.** Є два типи реакцій другого порядку: швидкість реакції може бути пропорційна добутку двох однакових або двох різних концентрацій. Перший випадок можливий, якщо в реакції приймає участь тільки одна вихідна речовина, тоді такий процес можна описати схемою



У другому випадку в реакцію вступають дві різні речовини



при цьому передбачається, що їхні вихідні концентрації однакові.

Рівняння для швидкості реакції для обох випадків різні.

#### Завдання 1

$2A \rightarrow P$ :

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2,$$

де  $x$  – кількість речовини  $A$ , що реагує в одиниці об'єму за час  $t$ , і  $a$  – початкова концентрація цієї речовини. Розділивши змінні, отримаємо

$$\frac{dx}{(a - x)^2} = k dt.$$

Після інтегрування маємо

$$\frac{1}{a - x} = kt + I.$$

Якщо  $t = 0$ , величина  $x = 0$ , тоді  $I = \frac{1}{a}$ .

Отже,

$$\frac{x}{a(a - x)} = kt,$$

тобто в цьому випадку експоненціальної залежності  $x$  від  $t$  немає.

Відповідність експериментальних даних цього рівняння можна також перевірити графічно, а також й отримати значення констан-

ти швидкості. Для цього побудуємо графік залежності  $\frac{x}{a(a - x)}$  від  $t$ ; експериментальні точки повинні бути на одній прямій,

що проходить через початок координат, при цьому нахил прямої визначає величину  $k$ .

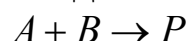
Можна небудувати графіки і обчислити значення функції  $\frac{x}{a(a-x)}$  в різні моменти часу. Якщо реакція, що відбувається, є реакцією другого порядку, то значення  $k$  немає змінюватися з часом, і тоді середню величину можна прийняти за величину константи швидкості реакції.

Вираз для часу напівперетворення можна отримати, підставивши в рівняння  $\frac{a}{2}$  замість  $x$ , і  $\tau$  замість  $t$ , тоді маємо

$$\tau = \frac{1}{ak}.$$

Час напівперетворення знову обернено пропорційний  $k$ , однак на відміну від реакції першого порядку, де  $\tau$  не залежить від  $a$ , воно обернено пропорційне  $a$ . Такий результат указує на те, що це реакція другого порядку.

## Завдання 2



Якщо швидкість реакції пропорційна концентрації двох різних компонентів, і ці концентрації не однакові в початковий момент часу, то інтегрування проводять інакше.

Припустимо, що  $a$  та  $y$  – вихідні концентрації; після того як в одиниці об'єму прореагувало  $x$  речовини, швидкість реакції становить

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x).$$

Розподіл змінних дає

$$\frac{dx}{(a-x)(b-x)} = kdt.$$

Ліву частину цього виразу можна інтегрувати методом підстановки, для цього вираз переписують так:

$$\frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x} = kdt.$$

Порівнюючи ці два вирази знаходимо, що

$$A = \frac{1}{b-a}; \quad B = \frac{1}{a-b},$$

тобто рівняння можна записати у такому вигляді:

$$\left[ \frac{1}{(b-a)(a-x)} + \frac{1}{(a-b)(b-x)} \right] dx = kdt$$

Інтегруючи його, отримаємо

$$-\frac{\ln(a-x)}{b-a} - \frac{\ln(b-x)}{a-b} = kt + I$$

або

$$\frac{1}{a-b} \ln \frac{a-x}{b-x} = kt + I.$$

Константу інтегрування визначимо з умови, що за  $t = 0$  величина  $x = 0$ , тоді

$$I = \frac{1}{a-b} \ln \frac{a}{b}.$$

У такий спосіб

$$\frac{1}{a-b} \ln \frac{b(a-x)}{a(b-x)} = kt.$$

Способи аналізу експериментальних результатів за цим рівнянням аналогічні описаним вище. Можна побудувати графік залежності величини, що перебуває ліворуч від  $t$ , або обчислювати за різних  $t$  такий вираз:

$$\frac{1}{t(a-b)} \ln \frac{b(a-x)}{a(b-x)} = k.$$

Оскільки в цьому випадку початкові концентрації не однакові, то поняття напівперетворення тут використовувати не зручно.

### Завдання 3

У загальному випадку для реакції  $n$ -го порядку з однаковими початковими концентраціями рівняння для швидкості реакції можна записати у вигляді

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)^n$$

або

$$\frac{dx}{(a-x)^n} = kdt.$$

Інтегруючи рівняння, отримаємо

$$\frac{1}{(n-1)(a-x)^{n-1}} = kt + I.$$

Якщо  $t = 0$ , то і величина  $x = 0$ , тому

$$I = \frac{1}{(n-1)a^{n-1}},$$

звідки

$$\frac{1}{n-1} \left[ \frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right] = kt.$$

Це рівняння справедливе для будь-яких  $n$ , крім  $n = 1$ .

У загальному випадку для реакції  $n$ -го порядку час напівперетворення  $\tau$  отримують замінивши  $x$  на  $\frac{a}{2}$ , тобто

$$\tau = \frac{2^{n-1} - 1}{(n-1)ka^{n-1}}.$$

Іноді ці співвідношення використовують для визначення порядків реакції за експериментальними даними.

## Відповіді до розділу 2

### Завдання 1

$$0 = -K_{+1}\bar{S}E_0 + K_{+1}\bar{S}[\bar{E}\bar{S}] + K_{-1} * [\bar{E}\bar{S}] + v$$

$$0 = K_{+1}\bar{S}E_0 - [\bar{E}\bar{S}](K_{-1} + K_{+2} + K_{+1}\bar{S});$$

Склавши ці рівняння, отримаємо

$$0 = -[\bar{E}\bar{S}]K_{+2} + v; \quad [\bar{E}\bar{S}] = \frac{v}{K_{+2}}.$$

$$0 = K_{+1} \left( \bar{S}E_0 - [\bar{E}\bar{S}] \left\{ \frac{K_{-1} + K_{+2}}{K_{+1}} + \bar{S} \right\} \right);$$

$$\frac{(K_{-1} + K_{+2})}{K_{+1}} = K_m;$$

$$\bar{S}E_0 = [\bar{E}\bar{S}]\{K_m + \bar{S}\};$$

$$[\bar{E}\bar{S}] = \frac{v}{k_{+2}} = \frac{\bar{S}E_0}{\{K_m + \bar{S}\}};$$

$$K_m v + \bar{S}v = K_{+2}E_0\bar{S};$$

$$\bar{S} = \frac{K_m v}{(K_{+2}E_0 - v)}.$$

**Завдання 2**  $x = \frac{[ES]}{[\bar{ES}]}; \quad y = \frac{S}{\bar{S}};$

$$\frac{d[ES]}{dt} = K_{+1}SE_0 - [ES](K_{+1}SK_{-1} + K_{+2});$$

$$\frac{d[ES]}{dt[\bar{ES}]} = \frac{E}{[\bar{ES}]} \frac{S}{\bar{S}} \bar{S}K_{+1} - \frac{[ES]}{[\bar{ES}]} K_{+1} \bar{S} \left( \frac{K_{-1} + K_{+2}}{K_{+1}\bar{S}} + \frac{S}{\bar{S}} \right);$$

$$\dot{x} = \frac{1}{T_x} \left[ ay - x \left( \frac{K_m}{\bar{S}} + y \right) \right];$$

$$\bar{S} = \frac{1}{T_x};$$

$$\frac{E_0}{[\bar{ES}]} = a = \frac{E_0 K_{+2}}{\nu};$$

$$\frac{K_m}{\bar{S}} = \frac{K_m(K_{+2}E_0 - \nu)}{K_m\nu} = \frac{K_{+2}}{\nu} E_0 - 1 = a - 1;$$

$$\dot{x} = \frac{1}{T_x} [ay - x(a - 1 + y)].$$

### Відповіді до розділу 3

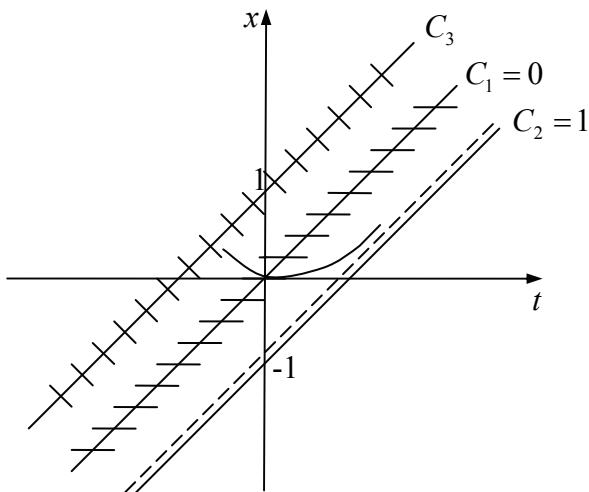


Рис. Д.1. Графічний розв'язок рівняння методом ізоклін (до завдання 1)

### Завдання 1

Розв'язки рівнянь методом ізоклін.

$$\frac{dx}{dt} = -x + t; \quad x_0 = 0, \quad t_0 = 0.$$

$$-x + t = C_i; \quad \frac{dx}{dt} = C_i.$$

$$C_1 = 0; \quad x = t; \quad \frac{dx}{dt} = 0;$$

$$C_1 = 1; \quad x = t - 1; \quad \frac{dx}{dt} = 1; \quad \angle 45^\circ;$$

$$C_1 = -1; \quad x = t + 1; \quad \frac{dx}{dt} = -1;$$

$$\angle -45^\circ.$$

## Завдання 2

2.1.  $\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2 - 16$  з  $x_{\min} = 2$ .

Екстремальна точка має дотичну  $\frac{dx}{dt} = 0$ . Для точки мінімуму знаки дотичних змінюються:  $-; 0; +$ .

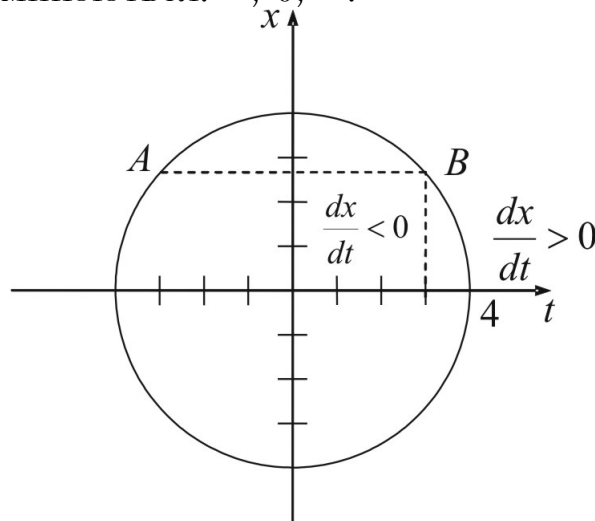


Рис. Д.2. Графічний розв'язок рівняння методом ізоклін (до завдання 2)

$$x^2 + t^2 - 16 = 0; \quad \frac{dx}{dt} = 0.$$

Всередині кола:  $\frac{dx}{dt} < 0$ . Поза колом:  $\frac{dx}{dt} > 0$ .

Точка мінімуму  $B(-; 0; +)$  (зліва направо) становить  $(2, \sqrt{12})$ ;

2.2.  $A = (4, -3)$ ;

2.3.  $B = (6, 8)$ ;

2.4.  $A = (5, -9)$ ;

2.5.  $B = (5, \sqrt{39})$ .

## Завдання 3.

3.1; 3.7; 3.10.

Для системи знайдемо межу сідел, стійкість вузлів і фокусів:

$$\dot{x} = 1 - y \ln|x| = P(x, y);$$

$$\dot{y} = x(x^2 + 2y - a^2) = Q(x, y).$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_S \eta = \left(-y \frac{1}{x}\right) \zeta + (-\ln|x|) \eta;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_S \eta = (3x^2 + 2y - a^2)\zeta + (2x)\eta.$$

$$a = -y \frac{1}{x}; \quad b = -\ln|x|;$$

$$c = 3x^2 + 2y - a^2; \quad d = 2x.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - cb)} \right];$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \left( -y \frac{1}{x} + 2x \right) \pm \sqrt{\left( -y \frac{1}{x} + 2x \right)^2 - 4 \left( -y \frac{1}{x} 2x + (3x^2 + 2y - a^2) \ln|x| \right)} \right].$$

$$G = a + d = 0; \quad 2x - \frac{y}{x} = 0.$$

Межа сідел:

$$\Delta = -4(ad - cb) = 4(cb - ad) = 0;$$

$$2y - \ln|x|(3x^2 + 2y - a^2) = 0.$$

Межа фокусів:

$$4(bc - ad) = -(a + d)^2;$$

$$(2x^2 - y)^2 - 4x^2(\ln|x|(3x^2 + 2y - a^2) - 2y) = 0.$$

### 3.2.

$$\dot{x} = x + 8 - y = P(x, y);$$

$$\dot{y} = xy + 7 = Q(x, y).$$

$$x_S - y_S + 8 = 0;$$

$$y_S = x_S + 8;$$

$$x_S y_S + 7 = 0;$$

$$x_S(x_S + 8) + 7 = 0;$$

$$x_{S1,2} = -4 \pm \sqrt{16 - 7} = -4 \pm 3;$$

$$x_{S1} = -1;$$

$$x_{S2} = -7;$$

$$y_{S1} = 7;$$

$$y_{S2} = 1.$$



$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_S \eta = 1\zeta - 1\eta;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_S \eta = y\zeta + x\eta.$$

### 3.2.1. $(x_{s1}; y_{s1})$ :

$$x = -1; y = 7;$$

$$a_1 = 1; a_2 = -1;$$

$$b_1 = 7; b_2 = -1.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + (-1) \pm \sqrt{[1 - (-1)]^2 + 4(-1)7} \right] = \frac{1}{2} \left[ 0 \pm \sqrt{4 - 28} \right];$$

$$\lambda_1 = \frac{j}{2} \sqrt{24};$$

$$\lambda_2 = -\frac{j}{2} \sqrt{24}.$$

Центр.

### 3.2.2. $(x_{s2}; y_{s2})$ :

$$x = -7; y = 1;$$

$$a_1 = 1; a_2 = -1;$$

$$b_1 = 1; b_2 = -7.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ 1 + (-7) \pm \sqrt{[1 - (-7)]^2 + 4(-1)1} \right] = \frac{1}{2} \left[ -6 \pm \sqrt{64 - 4} \right];$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \frac{\sqrt{60}}{2} = -3 \pm 3,87;$$

$$\lambda_1 = 0,87;$$

$$\lambda_2 = -6,87.$$

Сідло.

### 3.3. Знайдемо межу стійкості вузлів та фокусів системи.

$$\dot{x} = -x + xy^2 = P(x, y);$$

$$\dot{y} = x + y = Q(x, y).$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_S \eta = (-1 + y^2)\zeta + 2xy\eta;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_S \eta = 1\zeta + 1\eta.$$

$$a = (-1 + y_S^2);$$

$$b = 2xy;$$

$$c = 1;$$

$$d = 1.$$

Межа стійкості фокусів та вузлів:

$$G = a + d = 0;$$

$$y^2 - 1 + 1 = 0, \quad y = 0.$$

**3.4.** Знайдемо межу сідел системи.

$$\dot{x} = -x + 5y^2 = P(x, y);$$

$$\dot{y} = x^2 + xy = Q(x, y).$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_S \eta = 1\zeta + 10y_S \eta;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_S \eta = (2x + y)_S \zeta + x_S \eta.$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 10y_S;$$

$$b_1 = 2x_S + y_S; \quad b_2 = x_S.$$

Межа сідел:  $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0;$

$$(2x_S + y_S)10y_S - 1x_S = 0;$$

$$10y(2x + y) - x = 0;$$

$$10y^2 + 20xy - x = 0;$$

$$y_{1,2} = -x \pm \sqrt{x^2 + \frac{x}{10}}.$$

**3.5.** Знайдемо межу фокусів системи:

$$\dot{x} = y(x + y + 4) + x^2 = P(x, y);$$

$$\dot{y} = 5x + 4y - 6 = Q(x, y).$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_S \eta = (2x + y)\zeta + (x + 2y + 4)\eta;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_S \eta = 5\zeta + x_S 4\eta.$$

$$a = 2x + y;$$

$$b = x + 2y + 4;$$

$$c = 5;$$

$$d = 4.$$

$$\text{Межа фокусів: } (a + d)^2 = 4(ad - bc);$$

$$(2x + y + 4)^2 = 4[(2x + y)4 - (x + 2y + 4)5];$$

$$4x^2 + y^2 + 16 + 4xy + 16x + 8y = 32x + 16y - 20x - 40y - 80;$$

$$4x^2 + y^2 + 4x + 32y + 4xy + 96 = 0;$$

$$4x[x + y + 1] + y[y + 32] + 96 = 0.$$

**3.6.** Знайдемо умови стійкості розв'язків системи.

$$\dot{x} = y(5 + x + x^2) - 2x = P(x, y);$$

$$\dot{y} = (y + 2y^2) + x + x^2 = Q(x, y).$$

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \right|_S \zeta + \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_S \eta = (2xy + y - 2)\zeta + (5 + x + x^2)\eta;$$

$$\left. \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_S \zeta + \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_S \eta = (2x + 1)\zeta + x_S(1 + 4y)\eta.$$

$$a_1 = 2xy + y - 2;$$

$$a_2 = 5 + x + x^2;$$

$$b_1 = 2x + 1;$$

$$b_2 = 4y + 1;$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \right].$$

Умова стійкості:  $a + d < 0$ .

$$-2 + y + 2xy + 1 + 4y = 0;$$

$$-1 + 5y + 2xy = 0;$$

$$x = \frac{1 - 5y}{2y};$$

$$x < \frac{1 - 5y}{2y} - \text{стійка.}$$

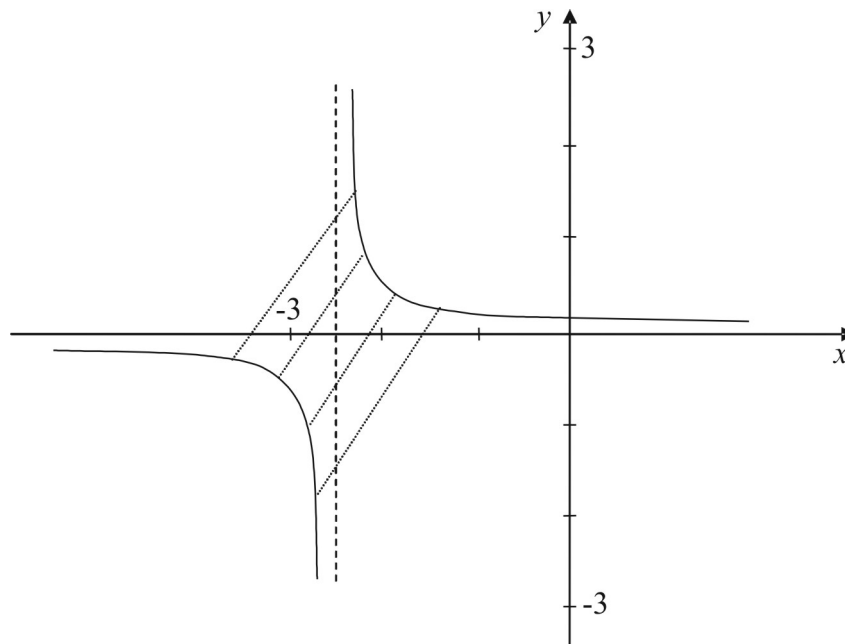


Рис. Д.3. Графічне зображення області стійкості

**3.8.** Дослідимо стаціонарні точки системи.

$$\dot{x} = x + y + 6 = P(x, y);$$

$$\dot{y} = y(x + y^2) = Q(x, y).$$

$$x_S + y_S + 6 = 0;$$

$$y_S(x_S + y_S^2) = 0;$$

$$x = -y - 6;$$

$$(y^2 - y - 6)y = 0;$$

$$y^2 - y - 6 = 0;$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}.$$

$$y_{S1} = 0;$$

$$x_{S1} = -6;$$

$$y_{S2} = 3;$$

$$x_{S2} = -9;$$

$$y_{S3} = -2;$$

$$x_{S3} = -4.$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_S \eta = 1\zeta + 1\eta;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_S \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_S \eta = y_S \zeta + (x_S + 3y_S^2)\eta.$$

$$a_1 = 1, a_2 = 1;$$

$$b_1 = y_s, b_2 = x_s + 3y_s^2.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \right].$$

$$y_{s1} = 0; \quad x_{s1} = -6;$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1; \quad b_1 = 0,5; \quad b_2 = -6.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (1 + (-6)) \pm \sqrt{(1 - (-6))^2} \right] = \frac{1}{2} (-5 \pm 7).$$

$$\lambda_1 = 1;$$

$$\lambda_2 = -6.$$

Корені дійсні для різних знаків – сідло.

$$y_{s1} = 3; \quad x_{s1} = -9;$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1; \quad b_1 = 3; \quad b_2 = 18.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ 19 \pm \sqrt{17^2 + 4 \cdot 1 \cdot 3} \right] = \frac{1}{2} (19 \pm \sqrt{301}) = \frac{1}{2} (19 \pm 17,4).$$

$$\lambda_1 > 0;$$

$$\lambda_2 > 0.$$

Корені дійсні і додатні – нестійкий вузол.

$$y_{s1} = -2; \quad x_{s1} = -4;$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1; \quad b_1 = -2; \quad b_2 = 8.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ 9 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2} \right] = \frac{1}{2} (9 \pm 6,4).$$

$$\lambda_1 > 0;$$

$$\lambda_2 > 0.$$

Корені дійсні і додатні – нестійкий вузол.

### 3.9. Дослідимо стаціонарні точки системи.

$$\dot{x} = xy = P(x, y);$$

$$\dot{y} = y - 6 = Q(x, y).$$

$$y_s = 6;$$

$$x_s = 0.$$

$$x_s = 0; \quad y_s = 6.$$

$$a_1 = 6; \quad a_2 = 0; \quad b_1 = 0; \quad b_2 = 1.$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_s \zeta + \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_s \eta = y_s \zeta + x_s \eta;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_s \zeta + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_s \eta = 0 \zeta + 1 \eta.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ (a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)} \right];$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ 7 \pm \sqrt{5^2 + 4 \cdot 0 \cdot 0} \right] = \frac{1}{2} (7 \pm 5).$$

$$\lambda_1 = 6;$$

$$\lambda_2 = 1.$$

Обидва корені дійсні та додатні (одного знаку). Особлива точка – нестійкий вузол.

## Відповіді до розділу 5

### Завдання 1

$$0 = -x^3 + \lambda x;$$

$$x(\lambda - x^2) = 0;$$

$$x_1 = 0;$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{\lambda}.$$

$$x = x_s + u;$$

$$u = x - x_s;$$

$$\frac{du}{dt} = -3x_s^2 u + \lambda u = u(\lambda - 3x_s^2);$$

$$u = u_0 \exp\{(\lambda - 3x_s^2)t\};$$

$$x_s = 0, \quad \text{розв'язок стійкий, якщо } \lambda < 0;$$

$$\text{розв'язок нестійкий, якщо } \lambda > 0;$$

$$x_s = \pm\sqrt{\lambda}, \quad \text{асимптотично стійке } (t \rightarrow \infty).$$

### Завдання 2

$$0 = -x^2 + \mu;$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\mu};$$

$$\frac{du}{dt} = -2x_s \cdot u;$$

$$u = u_0 \cdot e^{-2x_s \cdot t};$$

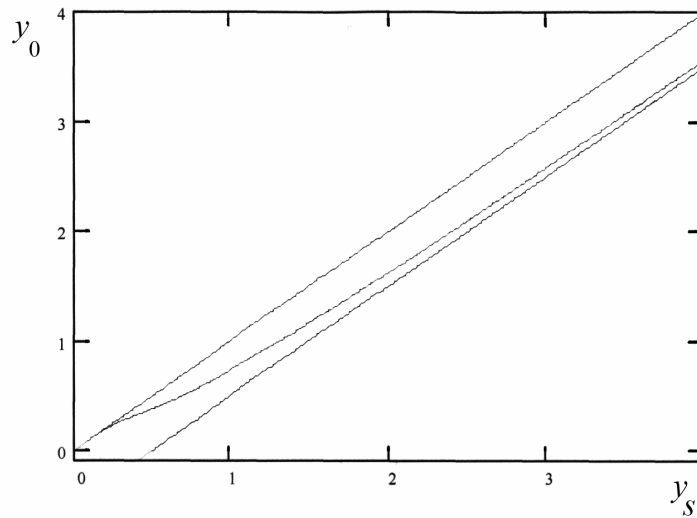
$$x = +\sqrt{\mu}, \quad \text{стійкий розв'язок};$$

$$x = -\sqrt{\mu}, \quad \text{нестійкий розв'язок}.$$

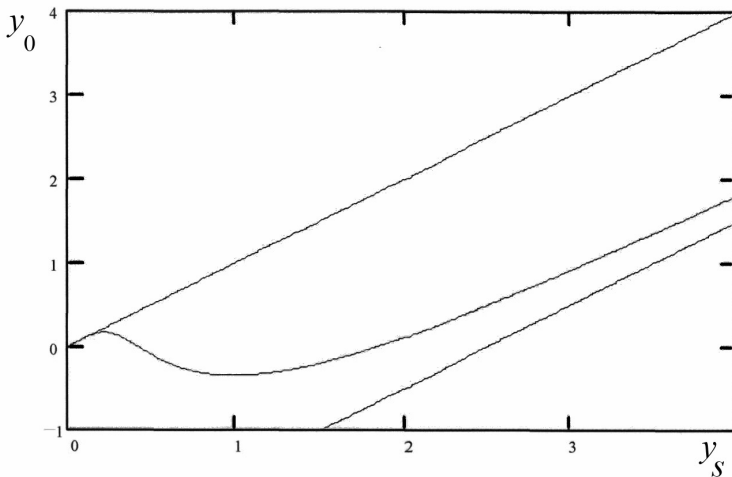
## Відповіді до розділу 6

### Завдання 1

а)  $x_0 = 1$



б)  $x_0 = 5$



в)  $x_0 = 10$

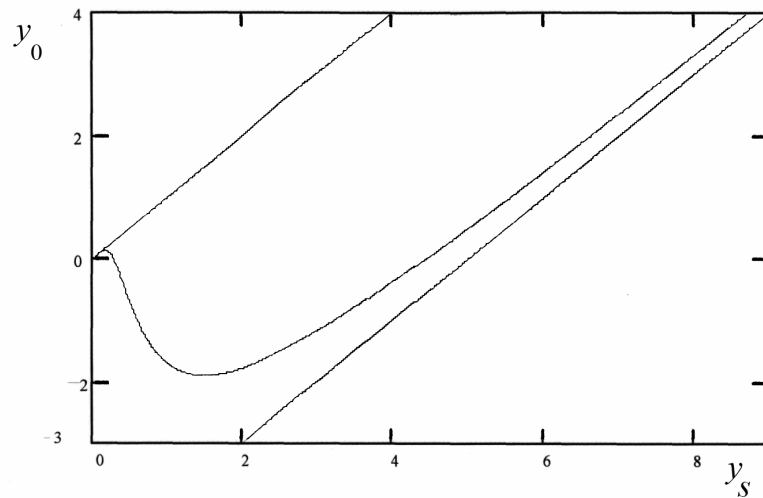


Рис. Д.4. Залежності  $\varphi_0 = f(\varphi_s)$  отримані числовими методами

## Завдання 2

$$x_s = y_s[(1 + \lambda e^{1/y_s}) + \beta e^{1/y_s}].$$

З виразу випливає:

$$x_s = x_0 + (\beta / \lambda)(y_0 - y_s);$$

$$x_0 = (y_s - y_0)(\beta / \lambda)(1 + \lambda e^{1/y_s}).$$

Підставляємо:

$$x_0 + (\beta / \lambda)(y_0 - y_s) = y_s^2[(1 + \lambda e^{1/y_s}) + \beta e^{1/y_s}] \equiv A;$$

$$(y_s - y_0)(\beta / \lambda)(1 + \lambda e^{1/y_s}) + (\beta / \lambda)(y_0 - y_s) = A;$$

$$(\beta / \lambda)(1 + \lambda e^{1/y_s})y_s - (\beta / \lambda)(1 + \lambda e^{1/y_s})y_0 + (\beta / \lambda)y_0 - (\beta / \lambda)y_s = A;$$

$$(\beta / \lambda)y_0[1 - (1 + \lambda e^{1/y_s})] + (\beta / \lambda)y_s[(1 + \lambda e^{1/y_s}) - 1] = A;$$

$$y_0 = \frac{y_s^2[1 - (1 + \lambda e^{1/y_s})] + \beta e^{1/y_s} - y_s(\beta / \lambda)[(1 + \lambda e^{1/y_s}) - 1]}{(\beta / \lambda)[1 - (1 + \lambda e^{1/y_s})]};$$

$$y_0 = y_s[1 - y_s\beta^{-1}(e^{-1/y_s} + \lambda + \beta)];$$

$$(y_s - y_0) = -\frac{x_0}{(\beta / \lambda)(1 + \lambda e^{1/y_s})};$$

$$x_0 - (\beta / \lambda)\frac{x_0}{(\beta / \lambda)(1 + \lambda e^{1/y_s})} = A;$$

$$x_0[1 - 1 / (1 + \lambda e^{1/y_s})] = x_0 \frac{\lambda e^{1/y_s}}{(1 + \lambda e^{1/y_s})};$$

$$x_0 = \frac{\lambda e^{1/y_s}}{(1 + \lambda e^{1/y_s})} y_s^2[(1 + \lambda e^{1/y_s})] + \beta e^{1/y_s} = y_s^2 \lambda^{-1} [e^{-1/y_s} + 2\lambda + \lambda^2 e^{1/y_s} + \beta + \lambda \beta e^{1/y_s}].$$

## Відповіді до розділу 7

### Завдання 1

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left( \frac{y_s}{1 + y_s} - D \right) \xi + \frac{x_s}{(1 + y_s)^2} \eta;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{y_s}{1 + y_s} \xi + \left( -\frac{x_s}{(1 + y_s)^2} - D \right) \eta.$$

$$\bar{x}_2 = x_{s2} = y_0 - \frac{D}{1 - D}; \quad y_{s2} = \frac{D}{1 - D};$$

$$x_{s2} = y_0 - y_s; \quad y_{s2} = y_s;$$

$$a_1 = \frac{y_s}{1 + y_s} - D; \quad a_2 = \frac{y_0 - y_s}{(1 + y_s)^2};$$



$$b_1 = -\frac{y_s}{1+y_s}; \quad b_2 = -\frac{y_0 - y_s}{(1+y_s)^2} - D.$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{y_s}{1+y_s} - 2D - \frac{y_0 - y_s}{(1+y_s)^2} \dots \pm \sqrt{\left( \frac{y_s}{1+y_s} - D + \frac{y_0 - y_s}{(1+y_s)^2} + D \right)^2 - 4 \frac{y_0 - y_s}{(1+y_s)^2} \frac{y_s}{1+y_s}} \right];$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{y_s}{1+y_s} - 2D - \frac{y_0 - y_s}{(1+y_s)^2} \pm \left( \frac{y_s}{1+y_s} - \frac{y_0 - y_s}{(1+y_s)^2} \right) \right];$$

$$\lambda_1 = -D;$$

$$\lambda_2 = \frac{y_s}{1+y_s} - \frac{y_0 - y_s}{(1+y_s)^2} - D \equiv -(1-D)(y_{0+1})(D_e - D).$$

### Завдання 2

Головні ізокліни.

$$\frac{dy}{dx} = 0 \text{ — ізокліна горизонтальних дотичних;}$$

$$\frac{dy}{dx} = \infty \text{ — ізокліна вертикальних дотичних.}$$

Ізокліна горизонтальних дотичних:

$$\frac{xy}{1+y} = D(y_0 - y); \quad x = D(y_0 - y) \frac{1}{y}.$$

Ізокліна вертикальних дотичних:

$$\frac{xy}{1+y} = Dx; \quad \frac{y}{1+y} = D; \quad y = \frac{D}{1-D}.$$

### Завдання 3

Непроточна культура

$$\frac{dx}{dt} = \frac{xy}{1+y}; \quad x(0) = x_0;$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{xy}{1+y}; \quad y(0) = y_0.$$

$$a) \frac{dy}{dx} = -1; \quad dy = -dx; \quad y = -x + c; \quad y_0 = -x_0 + c; \quad c = x_0 + y_0.$$

$$б) \frac{dx}{dt} = \frac{x(c-x)}{1+c-x};$$

$$dt = \frac{1+c-x}{x(c-x)} dx = \left[ \frac{1}{x(c-x)} + \frac{1}{x} \right] dx = \left[ \frac{1}{cx-x^2} + \frac{1}{x} \right] dx =$$

$$= \left[ \frac{1}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 + cx - x^2} + \frac{1}{x} \right] dx = \left[ \frac{1}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2} + \frac{1}{x} \right] dx;$$

$$t(x) = \frac{1}{2\left(\frac{c}{2}\right)} \ln \left| \frac{\frac{c}{2} + \left(x - \frac{c}{2}\right)}{\frac{c}{2} - \left(x - \frac{c}{2}\right)} \right| + \ln x + K;$$

$$t(x) = \frac{1}{c} \ln \left| \frac{x}{c-x} \right| + \ln x + K;$$

$$t=0 = \frac{1}{c} \ln \frac{x_0}{x_0+y_0-x_0} + \ln x_0 + K;$$

$$K = -\frac{1}{x_0+y_0} \ln \frac{x_0}{y_0} - \ln x_0;$$

$$t(x) = \frac{1}{x_0+y_0} \ln \frac{x}{x_0+y_0-x} + \ln x - \frac{1}{x_0+y_0} \ln \frac{x_0}{y_0} - \ln x_0;$$

$$t(x) = \frac{1}{x_0+y_0} \ln x - \frac{1}{x_0+y_0} \ln(x_0+y_0-x) + \ln x - \ln x_0 - \frac{1}{x_0+y_0} \ln x_0 + \frac{1}{x_0+y_0} \ln y_0;$$

$$t(x) = \frac{1+x_0+y_0}{x_0+y_0} \ln \frac{x}{x_0} + \frac{1}{x_0+y_0} \ln \frac{y_0}{x_0+y_0-x}.$$

## Відповіді до розділу 8

### Завдання 1

Припустимо, що деяка кількість особин жертви  $x_r$  може знайти сховище або укриття, яке зробить їх недосяжними для хижака. У цьому разі рівняння Вольтерра без демпферування набуває вигляду

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= ax - cy(x - x_r) \\ \dot{y} &= ex - c'y(x - x_r) \end{aligned} \right\}$$

Слід розглядати два випадки. В першому випадку кількість жертви, що перебуває у сховищі, може становити деяку постійну частку від її усієї зграї: інакше кажучи  $x_r = kx$ . Це рівноцінно заміні постійних  $c$  і  $c'$  в рівняннях на  $c(1-k)$  і  $c'(1-k)$ . Цілком очевидно, що характер рівноваги у цьому разі не зміниться.

Більш цікаві висновки можна зробити в другому випадку: якщо кількість жертви, що перебуває у сховищі, постійна, тобто  $x_r = k$ , у цьому разі крива  $\dot{x} = 0$  на площині  $(x, y)$  задається рівнянням  $y = ax / c(x-k)$ , а крива  $\dot{y} = 0$  – рівнянням  $x = k + \frac{e}{c'}$ . Ці криві зображено на рис. Д.5, з якого видно, що наявність сховищ спричиняє стабілізуючий вплив, оскільки при цьому консервативні коливання стають загасаючими.

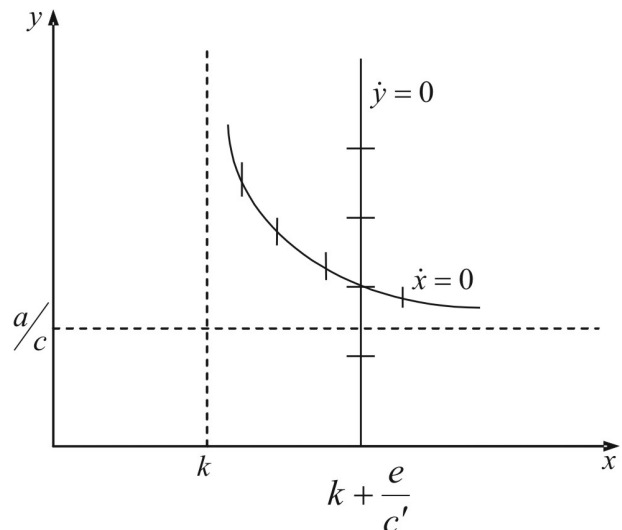


Рис. Д.5. Рівняння Вольтерра за наявності сховищ для жертви

## Завдання 2

Побудуємо фазові траєкторії для рівнянь Вольтерра, що описують боротьбу між двома видами тварин. У цих рівняннях  $N_1$  і  $N_2$  – кількість двох видів, які живуть на певній території й перебувають у конкурентній боротьбі один з одним хоча б тому, що вони вживають один і той самий корм.

За відомих умов величини  $N_1$  і  $N_2$  як функції часу задовольняють рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= k_1 N_1 - k_3 N_1 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} &= k_2 N_2 - k_4 N_1 N_2 \end{aligned} \right\},$$

де  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – додатні дійсні параметри,  $k_1 > k_2$ .

Ліва частина рівняння визначає миттєву швидкість змінні кількості жертв, де перший член правої частини відповідає нормальному збільшенню (без обмежень), а другий – виражає зменшення, що виникає в процесі конкурентної боротьби двох видів:

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{k_2 N_2 - k_4 N_1 N_2}{k_1 N_1 - k_3 N_1 N_2}.$$

Особливістю цього рівняння є точки  $N_{1S} = N_{2S} = 0$  та  $N_{1S} = \frac{k_2}{k_4}$ ;

$$N_{2S} = \frac{k_1}{k_3}.$$

Поблизу першої особливої точки  $(0,0)$ ,  $N_1$  і  $N_2$  достатньо малі, й рівняння після лінеаризації набуває вигляду

$$\frac{dN_2}{dN_1} = \frac{k_2 N_2}{k_1 N_1}.$$

Тип кожної з особливостей у такому разі знаходять за допомогою заміни змінних  $x = x_S + u$ ;  $y = y_S + v$ , які призводять після лінеаризації до системи

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= a_1 u + a_2 v; \\ \frac{dv}{dt} &= b_1 u + b_2 v. \end{aligned}$$

Корені характеристичного рівняння визначаються рівністю

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ (a_1 + b_2) \pm \sqrt{(a_1 + b_2)^2 - 4(a_1 b_2 - b_1 a_2)} \right\}.$$

У нашому випадку коефіцієнти виражаються так:

$$\begin{aligned} a_1 &= k_1; & a_2 &= 0; \\ b_1 &= 0; & b_2 &= k_2. \end{aligned}$$

Корені:  $p_1 = k_1$ ;  $p_2 = k_2$ .

Паралельно ми припустили, що якщо  $k_2 > k_1 > 0$ , то обидва корені дійсні й додатні, і особлива точка – нестійкий вузол.

Напрямок фазових траєкторій у випадку вузла або сідла за  $t \rightarrow \infty$  знаходять із співвідношення

$$v = m_1 u = \frac{(\lambda_1 - a_1)u}{a_2} = \frac{b_1 u}{\lambda_2 - b_2},$$

якщо  $t \rightarrow -\infty$ ,

$$v = m_2 u = \frac{(\lambda_2 - a_1)u}{a_2} = \frac{b_1 u}{\lambda_2 - b_2}.$$

Нахил фазових траєкторій за  $t \rightarrow \infty$  як  $m_1 = (\lambda_1 - a_1) / a_2 = \frac{k_1 - k_2}{0} = \infty$ , тоді як за  $t \rightarrow -\infty$ ,  $m_2 = b_1 / (\lambda_2 - b_2) = \frac{0}{k_1 - k_2} = 0$ . Звідси

випливає, що  $\frac{dN_2}{dN_1} = 0$  уздовж осі  $N_1$  і  $\frac{dN_2}{dN_1} = \infty$  уздовж осі  $N_2$  (рис. Д.6).

Поблизу другої особливої точки припустимо  $N_1 = n_1 + \frac{k_2}{k_4}$  та  $N_2 = n_2 + \frac{k_1}{k_3}$ , де  $n_1$  і  $n_2$  малі величини. Ця заміна відповідає переходу до нової системи координат із початком у другій особливій точці.

Лінеаризоване рівняння біля цієї точки має вигляд

$$\frac{dn_2}{dn_1} = \frac{-(k_1 k_4 / k_3) n_1}{-(k_2 k_3 / k_4) n_2}.$$

Це відповідає загальному вигляду рівняння з коефіцієнтами

$$a_1 = 0; \quad a_2 = -\frac{k_2 k_3}{k_4};$$

$$b_1 = -\frac{k_1 k_4}{k_3}; \quad b_2 = 0.$$

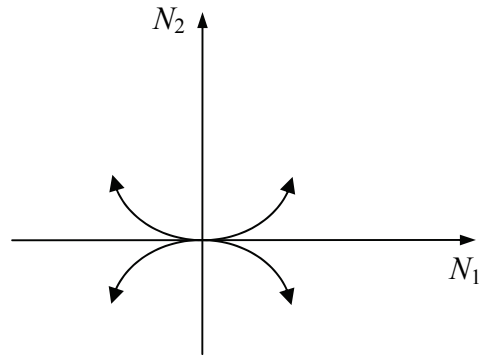


Рис. Д.6. Фазові траєкторії поблизу першої особливої точки

Корені характеристичного рівняння  $\lambda_1 = \sqrt{k_1 k_2}$ ;  $\lambda_2 = -\sqrt{k_1 k_2}$ .

Для особливої точки, що є сідлом, корені дійсні і різних знаків. Нахил фазових траєкторій за  $t \rightarrow \infty$  становить

$$m_1 = (\lambda_1 - a_1) / a_2 = -\frac{k_4}{k_3} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}};$$

якщо  $t \rightarrow -\infty$ , то

$$m_1 = (\lambda_2 - a_1) / a_2 = \frac{k_4}{k_3} \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далі  $\frac{dn_2}{dn_1} = 0$  уздовж прямої  $n_1 = 0$  або  $N_1 = k_2/k_4$ , тоді як  $\frac{dn_2}{dn_1} = \infty$

уздовж прямої  $n_2 = 0$  або  $N_2 = k_1/k_3$  (рис. Д.7).

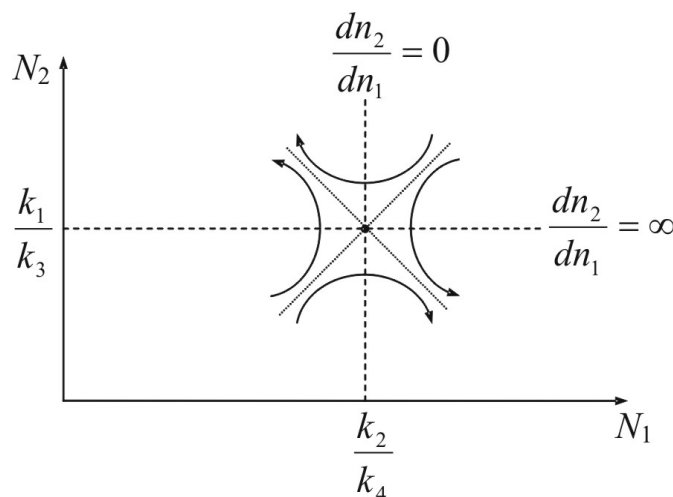


Рис. Д.7. Фазові траєкторії поблизу другої особливої точки

Фазовий портрет дає суттєве уявлення про розв'язки, до яких призводять рівняння міжвидової боротьби. Очевидно, що за будь-яких

умов кількість одного з видів  $N_1$  і  $N_2$  вресі-ресі дорівнюватиме нулю, тоді як кількість іншого виду безмежно зростає.

Конкретні початкові умови визначають, який вид збережеться (рис. Д.8). Зовсім не завжди вимирає той, початкова кількість якого менша.

Можна знайти сепаратрису, тобто першу відокремлюючу область початкових умов для яких вид  $N_1$  вимирає, від області, де вимирає вид  $N_2$ . Це єдина фазова траєкторія, що з'єднує особливі точки.

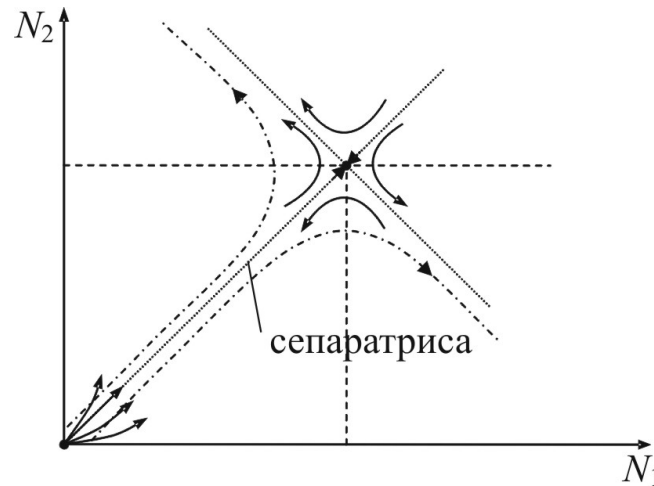


Рис. Д.8. Фазовий портрет рівняння Вольтерра

## Відповіді до розділу 9

### Завдання 1

$$\frac{dx}{dt} = (1 - \theta x)x - \frac{\beta x}{1 + x};$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi \left[ 1 - 2\theta x - \frac{\beta x}{(1 + x)^2} \right];$$

$$\xi = \xi_0 \exp \left\{ \left[ 1 - 2\theta x - \frac{\beta x}{(1 + x)^2} \right] t \right\}.$$

Якщо  $1 - 2\theta x - \frac{\beta}{(1 + x)^2} < 0$  – режим стійкий;

якщо  $1 - 2\theta x - \frac{\beta}{(1 + x)^2} > 0$  – режим нестійкий.

Якщо  $x_s = 0$  (здоровий організм), незалежно від  $\theta$ , режим визначають так:

за  $1 - \beta < 0$  або  $\beta > 1$  – режим стійкий;

за  $1 - \beta > 0$  або  $\beta < 1$  – режим нестійкий.

## Завдання 2

Для  $x_S \neq 0$  (свідчить про наявність пухлини) розглянемо такі рівняння:

$$(1 + x_S)^2(1 - 2\theta x) - \beta = 0;$$

$$(1 + 2x_S + x^2)(1 - 2\theta x) \leq \beta;$$

$$1 + 2x + x^2 - 2\theta x - 4\theta x^2 - 2\theta x^3 \leq \beta;$$

$$x \left[ 2(1 - \theta) + x(1 - 4\theta) - 2\theta x^2 \right] \leq \beta - 1;$$

$$2\theta x \left[ \frac{1 - \theta}{\theta} + x \frac{1 - 4\theta}{2\theta} - x^2 \right] \leq \beta - 1;$$

$$\beta = 1 + 2\theta x \left[ \frac{1 - \theta}{\theta} + x \frac{1 - 4\theta}{2\theta} - x^2 \right] = f(x, \theta);$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = 0;$$

$$0 = \frac{1 - \theta}{\theta} + 2x \frac{1 - 4\theta}{2\theta} - 3x^2;$$

$$x^2 - \frac{2}{3} \frac{1 - 4\theta}{2\theta} x - \frac{1 - \theta}{3\theta} = 0.$$

$$x^2 - \frac{1}{3} \frac{1 - 4\theta}{\theta} x - \frac{1 - \theta}{3\theta} = 0;$$

$$x = \frac{1}{6} \frac{1 - 4\theta}{\theta} \pm \sqrt{\left( \frac{1 - 4\theta}{6\theta} \right)^2 + \frac{1 - \theta}{3\theta}} = \frac{1 - 4\theta}{6\theta} \pm \frac{\sqrt{1 - 8\theta + 16\theta^2 + 12\theta - 12\theta^2}}{6\theta};$$

$$x = \frac{1 - 4\theta \pm \sqrt{1 + 4\theta + 4\theta^2}}{6\theta} = \frac{1 - 4\theta \pm 1 + 2\theta}{6\theta}.$$

$$x_{S \max 1} = \frac{2 - 2\theta}{6\theta} = \frac{1 - \theta}{3\theta} \text{ за } \theta < 1;$$

$$x_{S \max 2} = \frac{-6\theta}{6\theta} = -1.$$

## Завдання 3.

$$\beta = 1 + 2\theta \frac{1 - \theta}{3\theta} \left[ \frac{1 - \theta}{\theta} + \frac{1 - \theta}{3\theta} \frac{1 - 4\theta}{2\theta} - \left( \frac{1 - \theta}{3\theta} \right)^2 \right];$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{3}(1 - \theta) \left[ \frac{18\theta - 18\theta^2 + 3 - 3\theta - 12\theta + 12\theta^2 - 2 + 4\theta - 2\theta^2}{18\theta^2} \right];$$

$$\beta = 1 + \frac{2}{3}(1-\theta) \left[ \frac{-8\theta^2 + 7\theta + 1}{18\theta^2} \right] = 1 + \frac{-8\theta^2 + 7\theta + 1 + 8\theta^3 - 7\theta^2 - \theta}{27\theta^2};$$

$$\beta_c = \frac{8\theta^3 + 12\theta^2 + 6\theta + 1}{27\theta^2} = \frac{(2\theta + 1)^3}{27\theta^2} = \left( \frac{2\theta + 1}{3} \right)^3 \frac{1}{\theta^2}.$$

## Відповіді до розділу 10

### Завдання 1

а) Розв'язок аналітично.

$$\frac{dx}{1-x^2} = dt;$$

$$\frac{dx}{(1+x)(1-x)} = dt;$$

$$\frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A - Ax + B + Bx}{(1+x)(1-x)};$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-x} = \int dt;$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = t + C.$$

Враховуючи, що  $\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \operatorname{arth} z$  та  $\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{z-1} = \operatorname{arch} z$ :

$$\operatorname{arth} x = t + C.$$

Якщо  $t = t_0 = 0$ ;  $C = \operatorname{arth} x(0)$ :

$$x = \operatorname{th}(t - t_0 + C);$$

б) Розв'язок методом ізоклін (рис. Д.9).

Рівняння ізокліни  $1 - x^2 = C_i \Rightarrow x^2 = 1 - C$  нахил дотичної

$$\frac{dx}{dt} = C_i.$$

$$C_1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1;$$

$$C_2 = 1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0;$$

$$C_3 = -1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1,4; x_2 = -1,4;$$

$$C_4 = -2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_1 = 1,7; x_2 = -1,7.$$

Якщо  $t \rightarrow +\infty$  траєкторії наближаються до  $x = +1$  (стійка траєкторія).

Якщо  $t \rightarrow -\infty$  траєкторії наближаються до  $x = -1$  (нестійка траєкторія).



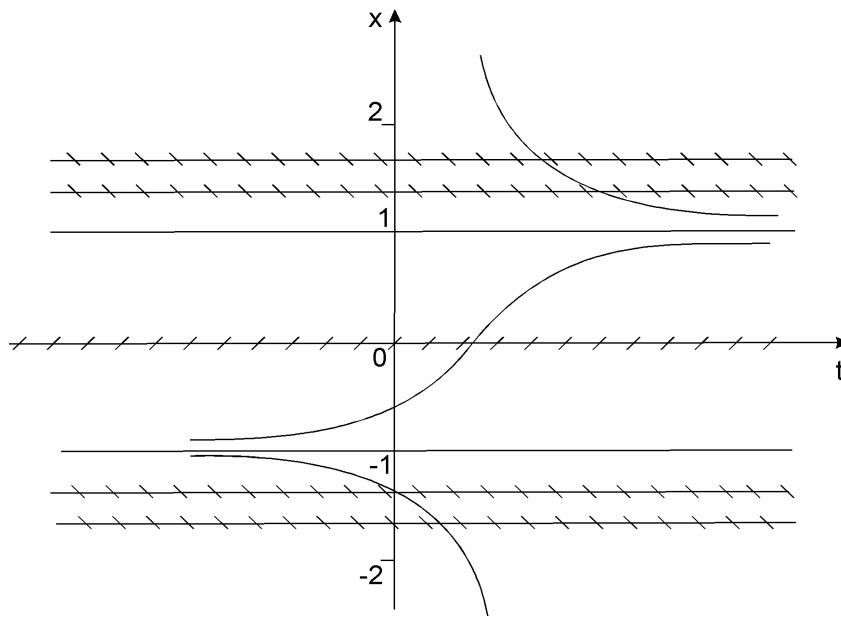


Рис. Д.9. Графічний розв'язок рівняння  $dx/dt = 1 - x^2$  методом ізоклін

### Завдання 2

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x^2) \\ \frac{dy}{dt} = -1 \end{cases} \quad x = 1 \text{ стійкий розв'язок;}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x(1 - x^2)} = \frac{1}{x(x^2 - 1)}.$$

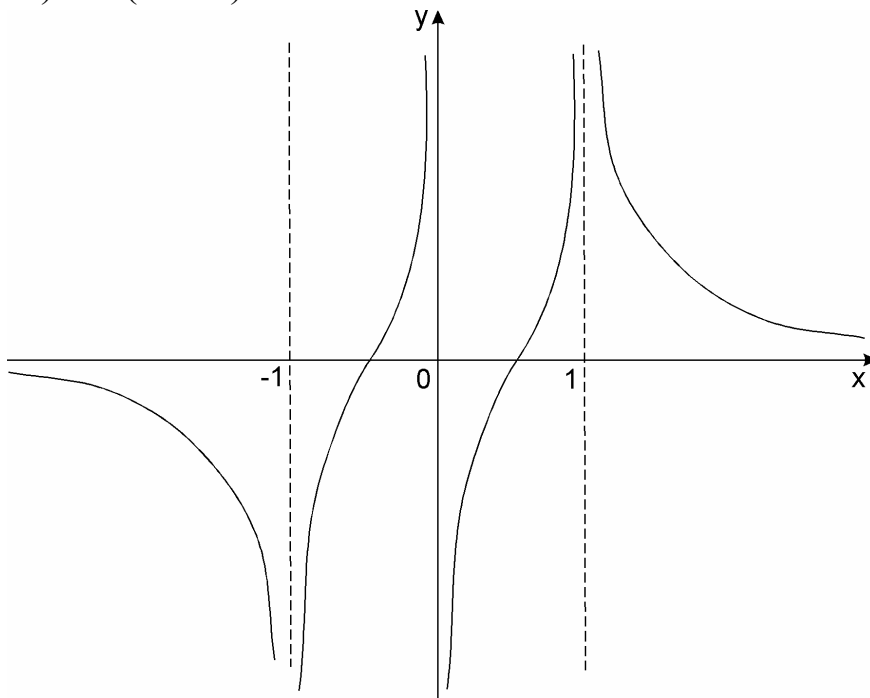


Рис. Д.10. Графічний розв'язок системи рівнянь

## Відповіді до розділу 11

Гradient скалярної функції точки  $\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z)$  є векторна функція точки, яку визначають співвідношенням

$$\text{grad}\Phi(\vec{r}) \equiv \nabla\Phi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int_S \Phi(\vec{r}) dS}{\int_V dV}.$$

У прямокутних декартових координатах лінійний оператор  $\nabla$  (набла) визначають за формулами

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k};$$
$$\nabla\Phi(x, y, z) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \vec{k}.$$

Дивергенція векторної функції точки  $\vec{F}(\vec{r})$  є скалярна функція, яка визначають виразами

$$\text{div}\vec{F}(\vec{r}) \equiv \nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\int dS \cdot \vec{F}(\vec{r})}{\int_V dV};$$
$$\nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

$U_{xx} - U_{yy} = 0$  – Рівняння гіперболічного типу;

$U_{xx} - U_y = 0$  – Рівняння параболічного типу;

$\Delta U = 0$  – Рівняння еліптичного типу.

### Рівняння параболічного типу.

Рівняння з частковими похідними другого порядку параболічного типу найчастіше трапляються під час вивчення процесів теплопровідності та дифузії. Найпростіше рівняння параболічного типу

$$U_{xx} - U_y = 0.$$

Якщо коефіцієнт дифузії постійний, то рівняння дифузії має вигляд

$$U_t = DU_{xx}.$$

Рівняння для теплопровідності стержня з боковим теплообміном має такий вигляд:

$$\rho t = a^2 U_{xx} - \alpha U + f(x, t).$$

Для виділення єдиного розв'язку рівняння параболічного типу необхідно приєднати початкові та граничні умови. Початкові умови полягають у заданні функції  $U(x,t)$  у початковий момент  $t_0$ .

Граничні умови можуть бути різними залежно від режимів на границі. Якщо функція  $U(x,t)$  визначена та неперервна в області  $0 \leq t \leq T$ ;  $0 \leq x \leq l$ , і задовольняє рівняння параболічного типу, то максимальне та мінімальне значення функції  $U(x,t)$  досягається або в початковий момент, або в точках межі  $x = 0$  або  $x = l$ .

Перейдемо до вирішення межові задачі для рівняння параболічного типу

$$U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t) \quad (0 < x < l, t > 0),$$

з початковими умовами

$$U(x,0) = J(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

та граничними умовами

$$\left. \begin{array}{l} U(0,t) = \mu_1(t) \\ U(l,t) = \mu_2(t) \end{array} \right\} t \geq 0.$$

Вивчення загальної межові задачі почнемо з розв'язку найпростішої задачі: знайти неперервне у замкненій області ( $0 \leq t \leq T$  та  $0 \leq x \leq l$ ) розв'язку однорідного рівняння

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad \text{якщо } 0 \leq t \leq T; \quad 0 \leq x \leq l,$$

які задовольняють початкову умову

$$U(x,0) = J(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

та однорідні граничні умови

$$U(0,t) = 0, \quad U(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Знаходимо нетривіальний розв'язок у вигляді

$$U(x,t) = X(x)T(t),$$

де  $X(x)$  – функція тільки змінної  $x$ ;  $T(t)$  – функція тільки змінної  $t$ .

Підставляючи можливу форму розв'язку у первісне однорідне рівняння та поділивши обидві частини рівняння на  $a^2 XT$ , отримаємо

$$\frac{1}{a^2} \frac{\dot{T}}{T} = \frac{\ddot{X}}{X} = -\lambda,$$

де  $\lambda = \text{const}$ , оскільки ліва частина рівняння залежить тільки від  $t$ , а права – від  $x$ .

Звідси отримаємо

$$\ddot{X} + \lambda X = 0;$$

$$\dot{T} + a^2 \lambda T = 0.$$

Граничні умови становлять:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0; \\ X(l) &= 0. \end{aligned}$$

Для визначення функції  $X(x)$  можна поставити задачу про власні значення (задача Штурма–Ліувілля): знайти ті значення параметра  $\lambda$ , за яких існує нетривіальний розв'язок задачі

$$\ddot{X} + \lambda X = 0 \quad X(0) = 0 \quad X(l) = 0.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Граничні умови становлять

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \quad (\alpha = l\sqrt{-\lambda})$$

тобто  $C_1 = -C_2$   $C_1(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0$ .

Розглянемо випадки, коли  $\lambda$  має різні значення.

1. Якщо  $\lambda < 0$ , то  $\alpha$  – дійсне та додатне, тоді  $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$ , тобто  $C_1 = 0$ ;  $C_2 = 0$ , звідки  $X(x) = 0$ .

2. Якщо  $\lambda = 0$ , то загальний розв'язок  $\ddot{X} + 0 \cdot X = 0$  становить  $X(x) = C_1 + C_2$ .

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \quad C_2 = 0$$

Граничні умови становлять:  $X(l) = C_1 l = 0$   $C_1 = 0$

$$X(x) = 0$$

3. Якщо  $\lambda > 0$ , загальний розв'язок можна записати так:

$$X(x) = D_1 \cos \sqrt{\lambda}x + D_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Граничні умови становлять:

$$X(0) = D_1 = 0;$$

$$X(l) = D_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0; \quad \text{якщо } D_2 \neq 0, \text{ тобто } X(x) \neq 0,$$

тоді  $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$  або  $\sqrt{\lambda}l = n\pi \rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$ .

Отже, нетривіальні розв'язки задачі Штурма–Ліувілля можливі лише тоді, коли значення

$$\lambda = \lambda_n = \left( \frac{n\pi}{l} \right)^2.$$

Цим власним значенням відповідає власна функція

$$\chi_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad \text{де } D_n \equiv \text{const}.$$

Також цим значенням  $\lambda_n$  відповідає розв'язок рівняння для  $T$ :

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t},$$

де  $C_n$  – невизначені коефіцієнти.

Отже,

$$U_n(x,t) = X(x)T(t) = C_n e^{-a^2 \lambda_n t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

є частковим розв'язком однорідного рівняння параболічного типу.

Для загального випадку  $U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t)$  ( $0 < x < l, t > 0$ ).

Сформуємо формально ряд

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Функція  $U(x,t)$  – задовольняє граничні умови та всі члени ряду. Виконаємо початкові умови

$$J(x) = U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

де  $C_n$  – коефіцієнти Фур'є функції  $J(x)$  під час розкладення її в ряд по синусам на інтервалі  $(0,l)$ :

$$C_n = J_n = \frac{2}{l} \int_0^l J(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi.$$

Можна показати, що функція  $U(x,t)$ , що подана рядом із коефіцієнтами  $C_n$ , які знаходять за формулою Фур'є, задовольняє усі вимоги загальної задачі (тобто вона диференціюється).

**Власні значення та власні вектори.** Якщо оператор  $A$  відносно базиса  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  є матрицею  $n \times n$ ,  $A = [a_{ik}]$ , то власні значення  $\lambda$  та власні вектори  $\bar{y} = \eta_1 \bar{e}_1 + \eta_2 \bar{e}_2 + \dots + \eta_n \bar{e}_n$  оператора  $A$  визначають так:

1. Власні значення знаходять як норми характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

2. Координати  $\eta_1^{(j)}, \eta_2^{(j)}, \dots, \eta_n^{(j)}$  для всіх лінійно незалежних власних векторів

$$\bar{y}^{(j)} = \eta_1^{(j)} \bar{e}_1 + \eta_2^{(j)} \bar{e}_2 + \dots + \eta_n^{(j)} \bar{e}_n$$

відповідних кожному окремо власному значенню  $\lambda_{ji}$ , отримують

розв'язуючи систему  $n$ -однорідних рівнянь:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda_j) \eta_1^{(j)} + a_{12} \eta_2^{(j)} + \dots + a_{1n} \eta_n^{(j)} &= 0; \\ \dots & \\ \dots & \\ a_{n1} \eta_1^{(j)} + a_{n2} \eta_2^{(j)} + \dots + (a_{nn} - \lambda_j) \eta_n^{(j)} &= 0, \end{aligned}$$

$m_j$  матриць-стовпців називають власними векторами матриці  $\mathbf{A}$ , відповідно власному значенню  $\lambda_j$ ,

$$y^{(j)} = \begin{pmatrix} \eta_1^{(j)} \\ \eta_2^{(j)} \\ \dots \\ \eta_n^{(j)} \end{pmatrix}.$$

Розв'язок однорідного лінійного рівняння з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \lambda \frac{d\xi}{dt} + \Omega^2 \xi = 0.$$

Рівняння другого порядку

$$a_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = 0, \text{ якщо } a_0 \neq 0,$$

має розв'язок:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t}; \\ s_{1,2} &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}; \quad (a_1^2 - 4a_0 a_2 \neq 0); \\ y &= (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{a_1}{2a_0} t}; \quad (a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0). \end{aligned}$$

Якщо  $a_0, a_1, a_2$  — дійсні, то за  $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$  корені  $s_{1,2}$  будуть комплексними, тоді розв'язок запишемо у вигляді

$$y = e^{Gt} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = \operatorname{Re} e^{Gt} \sin(\omega t + \alpha),$$

де величини

$$G = -\frac{a_1}{2a_0}; \quad \omega = \frac{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}}{2a_0}$$

мають назви постійної загасання та власної кругової частоти.

Вхідні константи визначають за початковими або граничними умовами.

Для заданого рівняння другого порядку:  $a_0 = 1$ ;  $a_1 = \lambda$ ;  $a_2 = \Omega^2$ .

Якщо  $\lambda - 4\Omega^2 < 0$ , то

$$\xi = e^{-\frac{\lambda t}{2}} \left( A \cos \frac{\sqrt{4\Omega^2 - \lambda^2}}{2} t + B \sin \frac{\sqrt{4\Omega^2 - \lambda^2}}{2} t \right) = \xi_0 e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cos \left( \sqrt{\Omega^2 - \frac{\lambda^2}{4}} t + \alpha_0 \right).$$

### Завдання 1

$$\begin{vmatrix} B - 1 + D_1 \nabla^2 - \omega_m & A^2 \\ -B & -A^2 + D_2 \nabla^2 - \omega_m \end{vmatrix} = 0;$$

$$\nabla^2 \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = \nabla^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \sin \frac{m\pi r}{l} = - \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \sin \frac{m\pi r}{l};$$

$$\nabla^2 = - \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2.$$

Відкриваємо визначник:

$$\begin{aligned} \text{а) } & -A^2 B + A^2 + A^2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 D_1 + A^2 \omega_m - D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 (B - 1) + \\ & + D_1 D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 + D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \omega_m - \omega_m (B - 1) + \omega_m D_1 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 + \omega_m^2 + A^2 B = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & \omega_m^2 + \omega_m \left[ A^2 + D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 + D_1 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 - (B - 1) \right] + A^2 B - A^2 (B - 1) - \\ & - D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 (B - 1) + D_1 D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 + A^2 D_1 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Вводимо позначення:

$$\beta_m = A^2 + D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2;$$

$$\alpha_m = (B - 1) - D_1 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2;$$

$$\alpha_m \beta_m = A^2 (B - 1) + D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 (B - 1) - A^2 D_1 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 - D_1 D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4,$$

тоді

$$\omega_m^2 + \omega_m [\beta_m - \alpha_m] + A^2 B - \alpha_m \beta_m = 0.$$

Звідси

$$\omega_m^\pm = \frac{1}{2} \left[ \alpha_m - \beta_m \pm \sqrt{(\alpha_m - \beta_m)^2 - 4(A^2 B - \alpha_m \beta_m)} \right];$$

$$\omega_m^\pm = \frac{1}{2} \left[ \alpha_m - \beta_m \pm \sqrt{(\alpha_m + \beta_m)^2 - 4A^2 B} \right].$$

## Завдання 2

**2.1.** Якщо  $m \rightarrow \infty$  та  $A$  й  $B$  кінцеві величини, то

$$(\alpha_m + \beta_m)^2 \rightarrow (D_2 - D_1)^2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 \rightarrow \infty,$$

тобто  $\omega_m^\pm$  має завжди дійсні значення (підкорінний вираз більше нуля).

$$\alpha_m - \beta_m \pm \alpha_m + \beta_m \rightarrow -(D_1 + D_2) \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \pm (D_2 - D_1) \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2;$$

$$\omega_m^+ \approx \alpha_m \approx -D_1 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 < 0;$$

$$\omega_m^- \approx -\beta_m \approx -D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 < 0.$$

$\omega_m^\pm$  має завжди від'ємні значення.

Якщо  $m \rightarrow \infty$  – стійкі рішення.

**2.2.**  $\omega_m$  – комплексне значення, якщо  $(\alpha_m + \beta_m)^2 - 4A^2 B < 0$ ;

$$\left[ (B - 1) - D_1 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 + A^2 + D_2 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \right]^2 - 4A^2 B < 0.$$

Введемо позначення:  $1 + \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 (D_1 - D_2) = \delta_m$ ,

тоді  $\left[ B - \delta_m + A^2 \right]^2 - 4A^2 B < 0$ ;

$$B^2 + \delta_m^2 + A^4 - 2B\delta_m + 2A^2 B - 2A\delta_m - 4A^2 B < 0;$$

$$B^2 - 2B(A^2 + \delta_m) + (A^2 - \delta_m)^2 < 0.$$

Квадратичний тричлен  $B^2 - 2B(A^2 + \delta_m) + (A^2 - \delta_m)^2 = 0$  має корені:

$$B_\pm = A^2 + \delta_m \pm \sqrt{(A^2 + \delta_m)^2 - (A^2 - \delta_m)^2};$$



$$B_{\pm} = A^2 + \delta_m \pm 2A\sqrt{\delta_m} = (A \pm \sqrt{\delta_m})^2.$$

Для того щоб  $\omega_m$  було комплексним, мають виконуватись нерівності:

$$\delta_m > 0;$$

$$(A - \sqrt{\delta_m})^2 < B < (A + \sqrt{\delta_m})^2,$$

тобто  $D_2 - D_1 \leq \left(\frac{l}{m\pi}\right)^2$ .

**2.3.** Дійсна частина комплексного  $\omega_m$  додатна (нестійкі фокуси), якщо

$$\alpha_m - \beta_m > 0,$$

або

$$B - 1 - D_1 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - A^2 - D_2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 > 0;$$

$$B > A^2 + 1 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 (D_1 + D_2).$$

Критична крива (границя стійкості)

$$B_m = A^2 + 1 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 (D_1 + D_2).$$

Уявні власні значення (центри) є простими

$$\alpha_m - \beta_m = 0.$$

**2.4.** Якщо  $\omega_m$  – дійсне число, то може виникнути один додатний корінь (нестійкий вузол), коли:

$$(\alpha_m + \beta_m)^2 - 4A^2B > 0;$$

$$(\alpha_m + \beta_m)^2 - 4A^2B > (\alpha_m - \beta_m)^2,$$

тобто  $\alpha_m\beta_m - A^2B > 0$  (див. п. 2.2),

$$A^2B - A^2 + (B-1)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 D_2 - A^2 D_1 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 - D_1 D_2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 - A^2 B > 0.$$

Ділимо на додатну величину  $D_2 \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2$ , отримаємо:

$$-\frac{A^2 l^2}{D_2 (m\pi)^2} + B - 1 - A^2 \frac{D_1}{D_2} - D_1 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 > 0;$$

$$B > 1 + A^2 \frac{D_1}{D_2} + \frac{A^2 l^2}{D_2 (m\pi)^2} + D_1 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2.$$

Критична крива має вигляд

$$B_m = 1 + A^2 \frac{D_1}{D_2} + \frac{A^2 l^2}{D_2 (m\pi)^2} + D_1 \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2,$$

а мінімум критичної кривої за  $\frac{dB_m}{dm} = 0$ :

$$\frac{2D_1 m \pi^2}{l^2} - 2 \frac{A^2 l^2}{D_2 \pi} \frac{1}{m^3} = 0 \rightarrow \frac{D_1 m^4 \pi^4 D_2 - A^2 l^4}{D_2 \pi^2 l^2 m^3} = 0.$$

Якщо  $m \rightarrow \mu$ , то

$$\mu^2 = \frac{A l^2}{\sqrt{D_1 D_2} \pi^2}; \quad B_\mu = 1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + A \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} + A \sqrt{\frac{D_1}{D_2}};$$

$$B_\mu = \left[ 1 + \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} A \right]^2.$$

$$2.5. \quad D_2 - D_1 < \frac{l^2}{\pi^2}.$$

$$\tilde{B}_1 < B_\mu;$$

$$\tilde{B}_1 = A^2 + 1 + \frac{\pi^2}{l^2} (D_1 + D_2);$$

$$A^2 + 1 + \frac{\pi^2}{l^2} (D_1 + D_2) < \left[ 1 + \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} A \right]^2;$$

$$\left[ \frac{1}{A} + \sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \right]^2 > 1 + \frac{1}{A^2} + \frac{\pi^2}{A^2 l^2} (D_1 + D_2);$$

$$\left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} > \sqrt{1 + \frac{1 + \pi^2 (D_1 + D_2 / l^2)}{A^2}} - \frac{1}{A}.$$

Якщо  $D_1 = D_2 = D$ , то

$$\left[ \frac{1}{A} + 1 \right]^2 > 1 + \frac{1}{A^2} + \frac{2D\pi^2}{A^2 l^2};$$

$$\frac{1}{A^2} + \frac{2}{A} + 1 > 1 + \frac{1}{A^2} + 2D \frac{\pi^2}{A^2 l^2};$$

$$\frac{2}{A} > 2D \frac{\pi^2}{A^2 l^2} \rightarrow D < \frac{Al^2}{\pi^2}.$$

**2.6.** Рівняння  $B_m = 1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + \frac{A^2 l^2}{D_2 m^2 \pi^2} + \frac{D_1 m^2 \pi^2}{l^2}$  розглянемо відносно  $m$  і знайдемо умову двократного виродження

$$\left[ B_m - 1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 \right] m^2 = \frac{A^2 l^2}{D_2 \pi^2} + \frac{D_1 \pi^2}{l^2} m^4;$$

$$am^4 - bm^2 + c = 0;$$

$$(m^2 - m_1^2)(m^2 - m_2^2) = 0.$$

Якщо  $m_1 = m_c$ , то  $m_2 = m_c + 1$ , тоді  $m_+ m_- = m_c(m_c + 1)$ :

$$m_+ = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \quad m_- = \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$m_+ m_- = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \sqrt{\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = \sqrt{\frac{b - (b^2 - 4ac)}{4a^2}} = \sqrt{\frac{c}{a}};$$

$$\sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{A^2 l^2 / D_2 \pi^2}{D_1 \pi^2 / l^2}} = \sqrt{\frac{A^2 l^4}{D_1 D_2 \pi^4}} = \frac{Al^2}{\pi^2 (D_1 D_2)^{1/2}};$$

$$\frac{Al^2}{\pi^2 (D_1 D_2)^{1/2}} = m_c (m_c + 1).$$

### Завдання 3

Для власних векторів оператора  $L$  маємо

$$(B - 1 + D_1 \nabla^2 - \omega_m) c_1 \sin \frac{m\pi}{e} r + A^2 c_2 \sin \frac{m\pi}{e} r = 0;$$

$$-B c_1 \sin \frac{m\pi}{e} r + [-A^2 + D_2 \nabla^2 - \omega_m] c_2 \sin \frac{m\pi}{e} r = 0.$$

Якщо  $B = B_m$  ( $\omega_m = 0$ ), то

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{1 - B_m + D_1 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2}{A^2}.$$

Якщо  $m = m_e \approx \mu$ , враховуючи, що  $\mu^2 = \frac{Ae^2}{\pi^2 (D_1 D_2)^{1/2}}$  та

$$\begin{aligned}
 B_m \approx B_\mu &= \left[ 1 + \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} A \right]^2 \text{ маємо:} \\
 \frac{c_2}{c_1} &= \frac{1}{A^2} \left[ 1 - \left[ 1 + \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} A \right]^2 + D_1 \frac{\pi^2}{e^2} \frac{Ae^2}{\pi^2 (D_1 D_2)^{1/2}} \right]; \\
 \frac{c_2}{c_1} &\approx \frac{1}{A^2} \left[ 1 - 1 - 2A \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} - \frac{D_1}{D_2} A^2 + A \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} \right] = \\
 &= -\frac{1}{A} \left[ 2 \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} + \frac{D_1}{D_2} A - \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} \right] = -\frac{1}{A} \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} \left[ 1 + \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} A \right]; \\
 \frac{c_2}{c_1} &\cong -\frac{1}{A} \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} \left[ 1 + \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1/2} A \right] < 0.
 \end{aligned}$$

Для оператора  $L^*$

$$(D_i \nabla^2 + B - 1 - \omega_m) d_1 \sin \frac{m\pi}{e} r - B d_2 \sin \frac{m\pi}{e} r = 0.$$

Якщо  $B = B_m$  ( $\omega_m = 0$ ), то

$$\begin{aligned}
 \frac{d_2}{d_1} &= \frac{B_m - 1 - D_1 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2}{B_m} = \frac{1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + \frac{A^2 e^2}{D_2 (m\pi)^2} + D_1 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2 - 1 - D_1 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2}{1 + \frac{D_1}{D_2} A^2 + \frac{A^2 e^2}{D_2 (m\pi)^2} + D_1 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2} = \\
 &= \frac{\frac{A^2 e^2}{D_2 (m\pi)^2} \left[ D_1 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2 + 1 \right]}{\frac{A^2 e^2}{D_2 (m\pi)^2} \left[ D_1 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2 + 1 \right] + 1 + D_1 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2} = \frac{\frac{A^2 e^2}{D_2 (m\pi)^2} \left[ D_1 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2 + 1 \right]}{\left[ D_1 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2 + 1 \right] \left[ 1 + \frac{A^2 e^2}{D_2 (m\pi)^2} \right]} = \\
 &= \frac{A^2}{D_2 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2 \left[ 1 + \frac{A^2 e^2}{D_2 (m\pi)^2} \right]} = \frac{A^2}{D_2 \left( \frac{m\pi}{e} \right)^2 + A^2}.
 \end{aligned}$$

#### Завдання 4

$$\begin{aligned} X = A + x & \quad \frac{\partial x}{\partial t} = A - (B + 1)x + x^2 y + D_1 \nabla^2 x \\ Y = \frac{B}{A} + y & \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial t} = Bx - x^2 y + D_2 \nabla^2 y \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A - (B + 1)(A + x) + (A + x)^2 \left( \frac{B}{A} + y \right) + D_1 \nabla^2 x;$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = B(A + x) - (A + x)^2 \left( \frac{B}{A} + y \right) + D_2 \nabla^2 y;$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = A - BA - A - Bx - x + \left( \frac{B}{A} + y \right) (A^2 + 2Ax + x^2) + D_1 \nabla^2 x;$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = BA - (B + 1)x + BA + 2Bx + \frac{B}{A}x^2 + x^2 y + 2Axy + A^2 y + D_1 \nabla^2 x;$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = x \left[ -B - 1 + 2B + D_1 \nabla^2 \right] + \frac{B}{A}x^2 + x^2 y + 2Axy + A^2 y;$$

$$\left\| \frac{\partial x}{\partial t} = x \left[ B - 1 + D_1 \nabla^2 \right] + \left( \frac{B}{A} + y \right) x^2 + 2Axy + A^2 y \right\|;$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = BA + Bx - BA - 2Bx - \frac{B}{A}x^2 - A^2 y - x^2 y + D_2 \nabla^2 y;$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -Bx - \frac{B}{A}x^2 - (A^2 y + D_2 \nabla^2) y - 2Axy - x^2 y;$$

$$\left\| \frac{\partial y}{\partial t} = -Bx - \left( \frac{B}{A} + y \right) x^2 - (A^2 y + D_2 \nabla^2) y - 2Axy \right\|.$$

Для лінійної системи  $L = \begin{pmatrix} B - 1 + D_1 \nabla^2 & A^2 \\ -B & -A^2 + D_2 \nabla^2 \end{pmatrix};$

$$L_C \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h(x, y) \\ h(x, y) \end{pmatrix};$$

$$h(x, y) = (B - B_C)x + 2Axy + \frac{B}{A}x^2 + x^2 y.$$

Нехай

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \dots;$$

$$\gamma = B - B_C = \varepsilon \gamma_1 + \varepsilon^2 \gamma_2 + \dots;$$

$$L_C \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_K \\ a_K \end{pmatrix}$$

із граничними умовами

$$x_K(0) = x_K(l) = \dots = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dx_K(0)}{dr} = \frac{dx_K(l)}{dr} = \dots = 0;$$

$$h = (B - B_C)x + 2Axy + \frac{B}{A}x^2 + x^2y;$$

$$h = (\varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2\gamma_2 + \dots)(\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \dots) +$$

$$+ 2A(\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \dots)(\varepsilon y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \dots) + \frac{B_C}{A}(\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \dots)(\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \dots) +$$

$$+ (\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \dots)(\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \dots)(\varepsilon y_0 + \varepsilon^2 y_1 + \dots);$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = \gamma_1 x_0 + 2Ax_0 y_0 + \frac{B_C}{A} x_0^2; \\ a_2 = \gamma_2 x_0 + \gamma_1 x_1 + 2A(x_0 y_1 + x_1 y_0) + \frac{B_C}{A}(x_0 x_1 + x_1 x_0) + x_0^2 y_0 = \\ = \gamma_2 x_0 + x_1 \left( \gamma_1 + 2Ay_0 + \frac{2B_C}{A} x_0 \right) + 2Ay_1 + \frac{\gamma_1 x_0^2}{A}. \end{array}$$

Отже,  $L_C \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$  за  $k > 1$  має неоднорідну систему лінійних рівнянь.

## Відповіді до розділу 12

### Завдання 1

Програмний код для системи Matlab 6.0, що моделює поведінку системи диференціальних рівнянь Лоренца може бути у вигляді:  
 clc; clear all; close all.

```
global S R B
[t DD]=ode15s(@F1,[0 17.8],[0 1 0]);
x=DD(:,1); y=DD(:,2); z=DD(:,3);
figure (1)
plot3(x,y,z); grid on;
title('Завдання №1')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
```

## Завдання 2

```
S=5; B=1;
Rn=[0.3 1.8 3.7 10 16 24.06 28];
for i = 1:length(Rn);
    R=Rn(i);
    [t DD]=ode45(@F2,[0 100],[10 10 10]);
    x=DD(:,1); y=DD(:,2); z=DD(:,3);
    figure
    plot3(x,y,z); grid on;
    title(R)
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    zlabel('z')
end
```

де F1 – ім'я *m*-файла функції для завдання 1 (F1.m), F2 – ім'я *m*-файла функції для завдання 2 (F2.m).

Програмний код файла F1.m:

```
function dsdt=F(t,s)
n=length(s)/3;
X=s(1:n);
Y=s(n+1:2*n);
Z=s(2*n+1:3*n);
dXdt=10.*(Y-X);
dYdt=56*X-Y-X.*Z;
dZdt=-(8.*(Z+2.*sin(2.*pi.*t)))./3+X.*Y;
dsdt=[dXdt;dYdt;dZdt];
```

Програмний код файла F2.m:

```
function dsdt=F(t,s)
global S R B
n=length(s)/3;
X=s(1:n);
Y=s(n+1:2*n);
Z=s(2*n+1:3*n);
dXdt=S.*(Y-X);
dYdt=X.*(R-Z)-Y;
dZdt=X.*Y-B.*Z;
dsdt=[dXdt;dYdt;dZdt];
```

Результати моделювання системи диференціальних рівнянь Лоренца наведені на рис. Д.11 та Д.12.

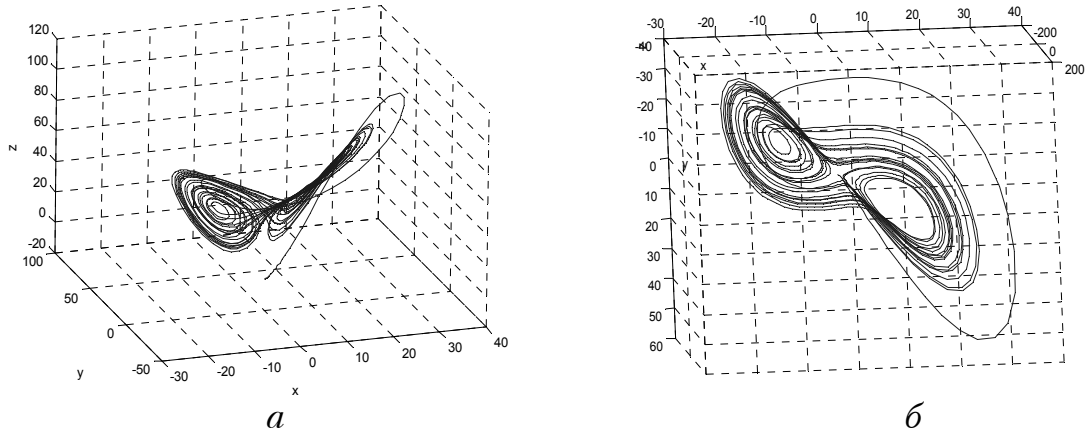


Рис. Д.11. Розв'язок системи диференціальних рівнянь для завдання 1 різними способами

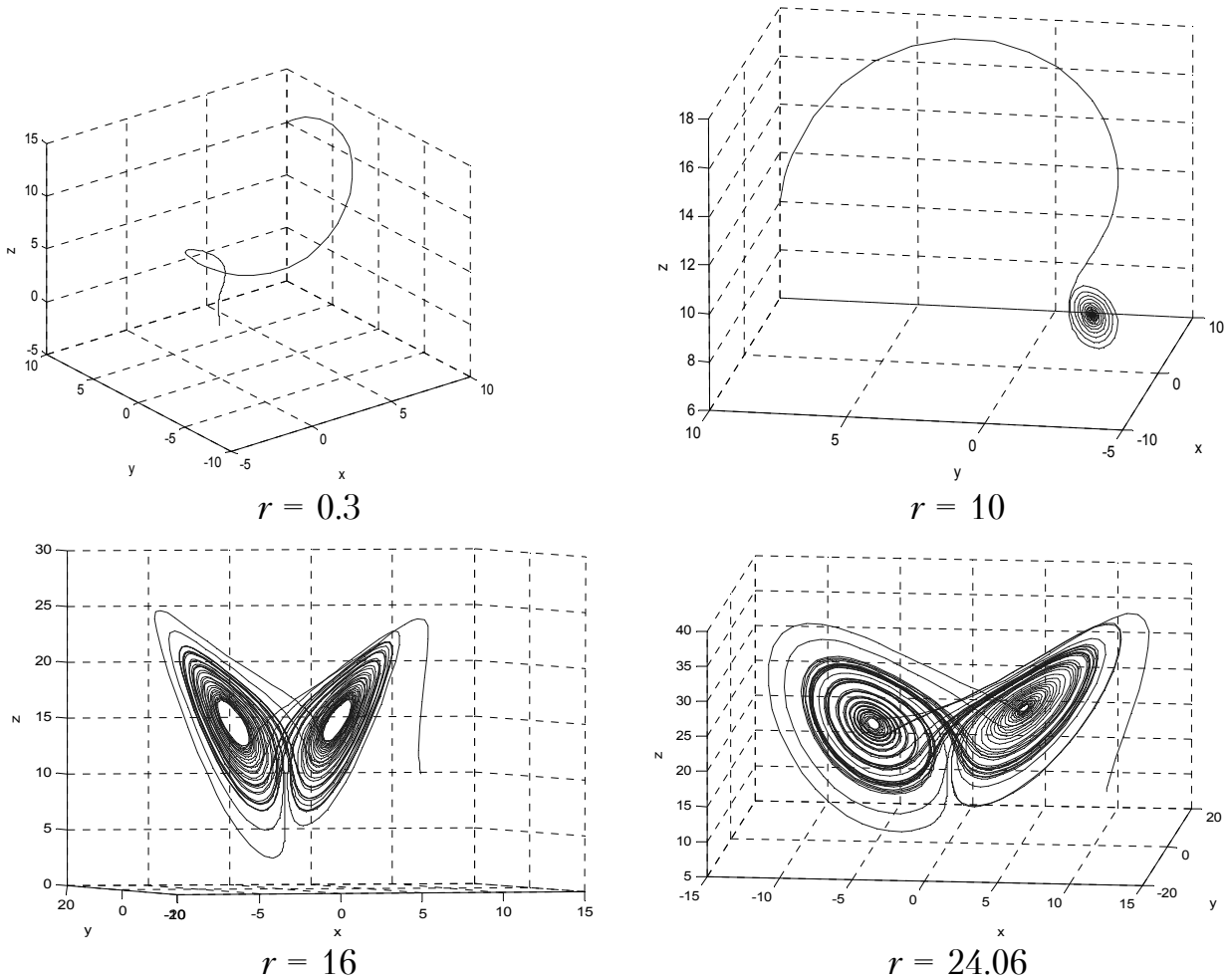


Рис. Д.12. Варіанти роз'язку системи диференціальних рівнянь Лоренца для завдання 2 за різних значень параметра  $r$



## Відповіді до розділу 14

Роз'язки на завдання див. у табл. 14.4–14.7.

## Відповіді до розділу 17

### Завдання 1

*Вибір із поверненням* – це експеримент, в якому на кожному кроці витягів куля повертається назад. У цьому разі кожна вибірку з  $n$  куль можна записати у вигляді  $(a_1, \dots, a_n)$ , де  $a_i$  – номер кулі, отриманої на  $i$ -му кроці. Кожна  $a_i$  може приймати будь-яке з  $M$  значень  $1, 2, \dots, M$ .

Простір елементарних подій істотно залежить від того, чи вважаються вибірки тотожного складу, такі як наприклад  $4, 1, 2, 1$  та  $1, 4, 2, 1$ , різними або однаковими. У зв'язку з цим розрізняють два випадки: *впорядковані* і *невпорядковані* вибірки. *Впорядковані* – складаються з одних і тих самих елементів, але відрізняються порядком проходження цих елементів, вважаються різними. Для *невпорядкованих* вибірок порядок проходження елементів не беруть до уваги, тому такі вибірки вважаються тотожними.

У разі впорядкованих вибірок простір елементарних подій має таку структуру:

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \dots, a_n), a_i = 1, \dots, M\}$$

і кількість різних результатів

$$N(\Omega) = M^n.$$

У випадку неупорядкованих вибірок простір елементарних подій  $\Omega$  має таку структуру:

$$\Omega = \{\omega : \omega = [a_1, \dots, a_n], a_i = 1, \dots, M\}.$$

Кількість  $N(\Omega)$  різних неупорядкованих вибірок менше, ніж впорядкованих. У цьому випадку  $N(\Omega) = C_{M+n-1}^n$ .

Наведений вираз доводять за індукцією.

Під час розгляду неупорядкованих вибірок  $[a_1, \dots, a_{n+1}]$  можна вважати, що їх елементи розташовані в порядку зростання:  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1}$ .

Кількість неупорядкованих вибірок із  $a_1 = 1$  становить  $N(M, n)$ , із  $a_1 = 2$  –  $N(M-1, n)$  тощо. Отже,

$$\begin{aligned} N(M, n+1) &= N(M, n) + N(M-1, n) + \dots + N(1, n) = \\ &= C_{M+n-1}^n + C_{M-1+n-1}^n + \dots + C_n^n = \\ &= (C_{M+n}^{n+1} - C_{M+n-1}^{n+1}) + (C_{M-1+n}^{n+1} + C_{M-1+n-1}^{n+1}) + \dots + (C_{n+1}^{n+1} - C_n^n) + C_n^n = C_{M+n}^{n+1}, \end{aligned}$$

де використано властивість біноміальних коефіцієнтів

$$C_k^{l-1} + C_k^l = C_{k+1}^l.$$

### Завдання 2

Нехай  $A$ -подія «перша куля – вдача»;  $B$ -подія «друга куля – вдача», тоді

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} = \frac{\frac{m(m-1)}{M(M-1)}}{\frac{m}{M}} = \frac{m-1}{M-1};$$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B\bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{(M-m)m}{M(M-1)}}{\frac{M-m}{M}} = \frac{m}{M-1};$$

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{m-1}{M-1} \frac{m}{M} + \frac{m}{M-1} \frac{M-m}{M} = \frac{m}{M}.$$

### Завдання 3

Із закону великих чисел випливає, що для будь-якого  $\varepsilon > 0$  за достатньо великих  $n$ , ймовірність множини  $C(n, \varepsilon)$  близька до одиниці. У цьому випадку реалізації  $\omega$  з  $C(n, \varepsilon)$  називають *типовими*.

Загальна кількість  $N(\Omega) = 2^n$ , і якщо  $p = 0$  або  $1$ , то безліч типових траєкторій  $C(n, \varepsilon)$  складається всього з однієї траєкторії  $(0, 0, \dots, 0)$  або  $(1, 1, \dots, 1)$ . Але якщо  $p = 1/2$ , то майже усі траєкторії (за винятком траєкторій типу  $(0, 0, \dots, 0)$  або  $(1, 1, \dots, 1)$ ) будуть типовими й їх кількість приблизно становить  $2^n$ . Для довільних  $0 < p < 1$  кількість типових реалізацій і їх значущості  $p(\omega)$  визначають спеціальною функцією від  $p$ , яку називають *ентропією*.

Нехай  $(p_1, p_2, \dots, p_z)$  – деякий кінцевий розподіл імовірностей, що задовольняє умову  $p_1 + p_2 + \dots + p_z = 1$ .

Ентропією цього розподілу називають величину  $H$ :

$$H = -\sum_{i=1}^z p_i \ln p_i,$$

де  $H \geq 0$ , причому  $H = 0$  тоді, коли всі ймовірності  $p_i$ , крім однієї, дорівнюють нулю. Функція  $f(x) = -x \ln x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , опукла до верху, і як відомо з властивостей опуклій функції

$$\frac{f(x_1) + \dots + f(x_z)}{z} \leq f\left(\frac{x_1 + \dots + x_z}{z}\right).$$

Отже,  $H = -\sum_{i=1}^z p_i \ln p_i \leq -z \frac{p_1 + \dots + p_z}{z} \ln \left( \frac{p_1 + \dots + p_z}{z} \right) = \ln z$ .

Інакше кажучи, ентропія досягає свого максимального значення за

$p_1 = \dots = p_z = \frac{1}{z}$  (рис. Д.13 для функції  $H = H(p)$  у разі, коли  $z = 2$ ).

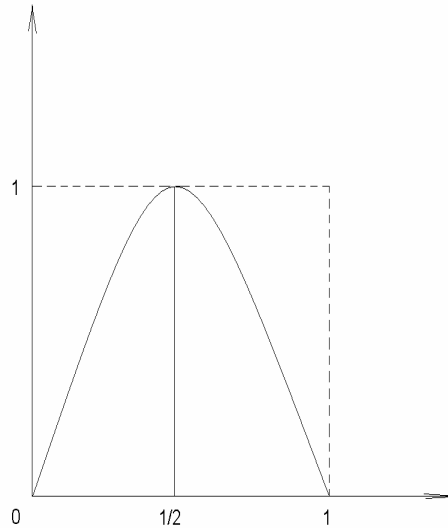


Рис. Д.13. Функція  $H(p) = -p \ln p - (1-p) \ln(1-p)$

Припустимо, що простір результатів

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \dots, a_n), a_i = 1, \dots, z\}$$

і  $p(\omega) = p_1^{v_1(\omega)}, \dots, p_z^{v_z(\omega)}$ , де  $v_i(\omega)$  – кількість елементів  $i$  в послідовності  $\omega$ , а  $(p_1, \dots, p_z)$  – деякий розподіл імовірностей.

Для  $\varepsilon > 0$  і  $n = 1, 2, \dots$  припустимо, що

$$C(n, \varepsilon) = \left\{ \omega : \left| \frac{v_i(\omega)}{n} - p_i \right| < \varepsilon, i = 1, \dots, z \right\}.$$

Тоді  $P(C(n, \varepsilon)) \geq 1 - \sum_{i=1}^z P \left\{ \left| \frac{v_i(\omega)}{n} - p_i \right| \geq \varepsilon \right\}$ ,

Для великих значень  $n$  за законом великих чисел стосовно випадкових величин

$$\xi_k(\omega) = \begin{cases} 1, & a_k = i \\ 0, & a_k \neq i \end{cases} \quad k = 1, \dots, n,$$

ймовірності  $P \left\{ \left| \frac{v_i(\omega)}{n} - p_i \right| \geq \varepsilon \right\}$  достатньо малі, тобто за великих  $n$

імовірність події  $C(n, \varepsilon)$  близька до одиниці. Тому як і у разі, коли  $z = 2$ , траєкторії, що входять у  $C(n, \varepsilon)$ , називатимемо типовими.

Якщо всі  $p > 0$ , то для будь-якого  $\omega \in \Omega$

$$p(\omega) = \exp \left\{ -n \sum_{i=1}^z \left( -\frac{v_i(\omega)}{n} \ln p_i \right) \right\}.$$

Тому, якщо  $\omega$  – типова траєкторія, то

$$\left| \sum_{i=1}^z \left( -\frac{v_i(\omega)}{n} \ln p_i \right) - H \right| \leq \sum_{i=1}^z \left| \frac{v_i(\omega)}{n} - p_i \right| \ln p_i \leq -\varepsilon \sum_{i=1}^z \ln p_i.$$

Звідси випливає, що для типових траєкторій імовірність  $p(\omega)$  близька до  $e^{-nH}$ , і за законом великих чисел за великих  $n$  типові траєкторії «майже» вичерпують  $\Omega$  – кількість таких траєкторій має бути приблизно  $e^{nH}$ .

#### Завдання 4

Для багатьох випадкових процесів характерний деякий вплив попередніх подій на наступні. Такі процеси називають марковськими. Марков вперше описав їх у своїх роботах. Марковський процес – це процес, для якого ймовірність перебуває в певному стані в конкретний момент часу, і який можна вивести з попередньої події. Ланцюгом Маркова першого порядку називають одну із форм марковських процесів, для якої кожний конкретний стан залежить тільки від безпосередньо попереднього. Такий ланцюг має кінцеву кількість станів, а ймовірності, які відповідають за перехід із одного стану в другий, називають стаціонарними, маючи на увазі те, що вони не залежать від часу. Ланцюгом Маркова другого і більш високих порядків називають процес, в якому поточні стани залежать від двох і більше попередніх. Математичні моделі, які використовують ланцюги Маркова, є перехідними між детермінованими і суто випадковими моделями.

Розглянемо систему, яку можна в будь-який момент часу описати одним із  $N$ -станів,  $S_1, S_2, \dots, S_N$ .

Через певний проміжок часу система може змінити свій стан або залишитись в попередньому згідно з імовірностями, які вказані для цих станів. Моменти часу, коли реєструється стан системи, позначимо як  $t = 1, 2, \dots, N$ , а стан у момент часу  $t$  позначимо як  $S_t$ . Повний опис розглянутої вище системи має містити поточний стан (у момент часу  $t$ ) і послідовність всіх попередніх станів, через які пройшла система. В окремих випадках опис системи зводиться до зазначення поточного і попереднього стану, тобто

$$P[q_t = S_j | q_{t-1} = S_i, q_{t-2} = S_k, \dots] = P[q_t = S_j | q_{t-1} = S_i].$$

Зазначимо, що процеси, які відбуваються в системі, не залежать від часу, а тільки від попереднього стану, тому систему можна описати безліччю ймовірностями  $p_{ij}$  у вигляді

$$p_{ij} = P[q_t = S_j | q_{t-1} = S_i], \quad \text{якщо } 1 \leq i, j \leq N,$$

де  $p_{ij}$  – це ймовірність переходу зі стану  $S_i$  у стан  $S_j$  у певний момент часу. Оскільки ці ймовірності характеризують випадковий процес, вони мають звичайні властивості, тобто

$$p_{ij} \geq 0;$$

$$\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1.$$

Описаний вище випадковий процес – це послідовність станів, реєстрованих у часі. Кожний стан відповідає певній події, що спостерігається.

Для того, щоб краще зрозуміти все зазначене, розглянемо просту марковську модель зміни рівня води в річці, у якій буде всього три стани:

- стан  $S_1$ : дощ (чи сніг);
- стан  $S_2$ : похмуро;
- стан  $S_3$ : ясно.

Припустимо, що є серія щотижневих спостережень за рівнем води в річці, що потрапляє в одну з трьох градацій – низьку, нормальну, високу. За цими даними складено таблицю (табл. Д.1) частоти переходу від одного стану до другого.

Таблиця Д.1

**Частота преходу від одного стану до другого**

Стан	До стану			Сума по рядку
	низький	нормальний	високий	
низький	12	6	0	18
нормальний	5	80	15	100
високий	0	14	16	30

Якщо поділити кожне число на суму за відповідним рядком, то отримаємо ймовірність переходу від одного стану до другого. Це, безумовно, буде не істинне значення ймовірності, а її статистична оцінка. Ці оцінки наведено в табл. Д.2.

Отже, матриця ймовірностей зміни погоди  $P$  має такий вигляд:

$$P = \{p_{ij}\} = \begin{vmatrix} 0,67 & 0,33 & 0,00 \\ 0,05 & 0,80 & 0,15 \\ 0,00 & 0,47 & 0,53 \end{vmatrix}.$$

## Статистичні оцінки ймовірностей

Стан	До стану			Сума по рядку
	низький	нормальний	високий	
низький	0,67	0,33	0,00	1,00
нормальний	0,05	0,80	0,15	1,00
високий	0,00	0,47	0,53	1,00

Враховуючи те, що рівень річки в перший день ( $t = 1$ ) низький (стан  $S_1$ ), можна припустити ймовірність (згідно з нашою моделлю) того, що наступні сім днів буде саме «низький–низький–нормальний–високий–високий–нормальний–низький» рівень води. Тобто для такої послідовності станів  $O$ , де  $O = \{S_1, S_1, S_1, S_2, S_3, S_3, S_2, S_1\}$  відповідає  $t = 1, 2, \dots, 8$ . На основі цієї моделі визначимо ймовірність спостереження послідовності  $O$ . Цю ймовірність можна виразити (і обчислити) так:

$$\begin{aligned}
 P(O|\text{Model}) &= P(S_1, S_1, S_1, S_2, S_3, S_3, S_2, S_1|\text{Model}) = \\
 &= P[S_1]P[S_1|S_1]P[S_1|S_1]P[S_2|S_1]P[S_3|S_2]P[S_3|S_3]P[S_2|S_3] \times \\
 &\times P[S_1|S_2] = 1 \cdot 0,67 \cdot 0,67 \cdot 0,33 \cdot 0,80 \cdot 0,53 \cdot 0,47 \cdot 0,05 = 1,48 \cdot 10^{-3},
 \end{aligned}$$

де  $\pi = P[q_1 = S_i]$  ( $1 \leq i \leq N$ ) ймовірність того, що початковий стан системи буде  $S_i$ .

Розглянемо інший випадок в якому ймовірність того, що протягом рівно  $d$  днів модель збереже свій стан. Цю ймовірність можна обчислити як імовірність спостереження такої послідовності:

$$O = \left\{ \begin{array}{cccccc} S_i, S_i, S_i, \dots, S_i, S_j \neq S_i \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad d \quad d+1 \end{array} \right\},$$

що дає модель, в якій

$$P(O|\text{Model}, q_1 = S_i) = (p_{ii})^{d-1} (1 - p_{ii}) = a_i(d),$$

де  $a_i(d)$  – це ймовірність того, що система перебуватиме у цьому стані рівно  $d$  разів підряд. Відповідно є функція розподілу ймовірності для тривалості перебування системи в одному стані, яка є характеристикою збереження для марковського ланцюга. Знаючи величину  $a_i(d)$ , можна розрахувати найбільш імовірний час, протягом якого система збереже свій стан

$$\bar{d}_j = \sum_{d=1}^{\infty} d a_i(d) = \sum_{d=1}^{\infty} d (p_{ii})^{d-1} (1 - p_{ii}) = \frac{1}{1 - p_{ii}}.$$

Передбачається, що низький рівень річки протримається  $1/(1-0,67)$  приблизно три дні, нормальний – приблизно п'ять днів, а високий, згідно з нашою моделлю, найімовірніше 1,8 днів.

Матриці ймовірностей переходу типу, наведеного в табл. Д.2, описують однокроковий процес – перехід від одного стану до другого, безпосередньо наступного за ним. Іноді представляє інтерес дослідження переходу більш ніж на один крок.

### Завдання 5

Накреслимо граф відповідно до матриці (рис. Д.14)

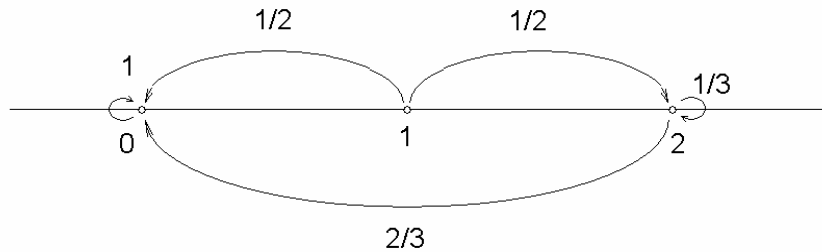


Рис. Д.14. Граф матриці

Стан 0 називають поглинаючим, якщо частинка у нього потрапила, то вона в ньому і залишається, оскільки  $p_{00} = 1$ . Зі стану 1 частинка з рівними ймовірностями переходить до стану 0 і 2; стан 2 такий, що частка залишається в ньому з ймовірністю  $1/3$  і переходить до стану 0 із ймовірністю  $2/3$ .

### Завдання 6

Нехай початкова матриця має такий вигляд:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|ccc} & S_1 & S_2 & S_3 \\ \hline S_1 & 0 & 1 & 0 \\ S_2 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ S_3 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array},$$

а вихідний стан позначимо як  $S_1$ . Проаналізуємо можливі варіанти станів, які можуть наступити через три кроки. Стан 1 може змінитись тільки станом 2. Стан 2 може зберегтись або замінитися на стан 3. Можливі переходи зручно відображати за допомогою графів, як показано на рис. Д.15.

Отже, стану  $S_3$  можна досягти двома способами. За правилами теорії ймовірностей «послідовні» кроки слід перемножувати, а «паралельні» – складати; ймовірність досягнути стану  $S_3$  через три кроки у разі вихідного стану  $S_1$ :

$${}^{(3)}\mathbf{P}_{13} = (1)(1/3)(2/3) + (1)(2/3)(1/2) = 5/9.$$

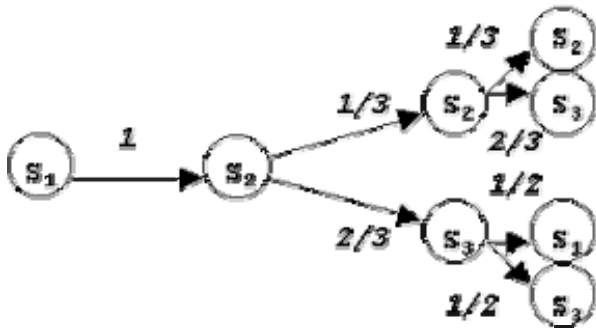


Рис. Д.15. Граф можливих переходів

Як і у випадку матриці, яка відповідає одному кроку, сума за рядками дорівнює одиниці.

Вище було розглянуто ланцюги першого порядку. Ланцюгом другого порядку називають такий, в якому ймовірність переходу до наступного стану залежить як від двох попередніх, так і від тієї послідовності, в якій ці

стани надходять (попередні стани записано в першому стовпці):

	$S_1$	$S_2$
$S_1 S_1$	$p_{11}$	$p_{12}$
$S_1 S_2$	$p_{21}$	$p_{22}$
$S_2 S_1$	$p_{31}$	$p_{32}$
$S_2 S_2$	$p_{41}$	$p_{42}$

Ця матриця записана для двох можливих станів і ланцюга другого порядку. Для ланцюга другого порядку з трьома станами матриця міститиме дев'ять рядків, а для ланцюга третього порядку і трьох станів – 27 рядків. Спільне правило полягає в тому, що кількість рядків у матриці дорівнює кількості станів, піднесених у степінь, які дорівнюють порядку ланцюга. Зрозуміло, що ланцюги високих порядків із великою кількістю станів є виключно складними.

Отже, дискретний марковський ланцюг визначають:

- 1) множиною станів  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ ;
- 2) матрицею ймовірностей переходів (перехідних ймовірностей), яка характеризує ймовірність переходу процесу з поточним станом  $s_i$  в наступний стан  $s$ :  $S_1 S_2 \dots S_k$

$$P = [p_{ij}] = \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_k \end{matrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{bmatrix};$$

- 3) вектором початкових ймовірностей (початковим розподілом)  $\pi_0 = p_1^{(0)}, \dots, p_k^{(0)}$ , що визначає ймовірності  $p_i^{(0)}$  того, що в початковий момент часу  $t, t = 0$ , процес перебуває в стані  $S_i$ .



Зауважимо, що безпосередньо марковський процес має задовольняти рівняння Чепмена–Колмагорова, який в інтегральному вигляді становить

$$P_{11}(S_3, t_3 | S_1, t_1) = \int P_{11}(S_3, t_3 | S_2, t_2) P_{11}(S_2, t_2 | S_1, t_1) dS_2.$$

Ця тотожність має задовольняти ймовірність переходу будь-якого марковського процесу, при цьому впорядкованість за часом є суттєвою:  $t_2$  перебуває між  $t_1$  та  $t_3$ . Якщо події  $S_i$  дискретні, то інтеграл замінюється на суму.

Поглиналий марковський ланцюг містить поглинальний стан, досягнувши якого процес уже ніколи його не покине, тобто припиняється. Поглинальний стан позначимо  $S$ . Імовірність переходу  $p_{00} = 1$  і, отже, всі інші ймовірності  $p_{0j} = 0, j = 1, \dots, k$ . Матриця ймовірностей переходів поглинального ланцюга має такий вигляд:

$$\mathbf{P} = [p_{ij}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_0 & S_1 & \dots & S_k \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_0 \\ S_1 \\ \dots \\ S_k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k0} & p_{k1} & \dots & p_{kk} \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

З якого б стану не почався процес, за  $n \rightarrow \infty$  з ймовірністю 1 він опиниться в поглинаючому стані  $S_0$ . Основна характеристика випадкового процесу, який породжує поглинальний марковським ланцюг, – кількість перебувань процесу в станах  $S_1, \dots, S_k$  до моменту поглинання, а в кожному зі станів  $S_i, i = 1, \dots, k$  і на множині незворотних станів  $\{S_1, \dots, S_k\}$  – випадкові величини, що характеризуються середніми значеннями, дисперсіями та розподілами. Для визначення вказаних характеристик використовують методи алгебраїчної теорії марковських ланцюгів.

Ергодичний марковський ланцюг – це множина станів, пов'язаних матрицею перехідних ймовірностей так, що з якого б стану процес не виходив, після деякої кількості кроків він може опинитися в будь-якому стані. Це означає, що в будь-який стан ергодичного ланцюга можна перейти з будь-якого іншого стану за певну кількість кроків. Тому такі стани називають *ергодичними* (зворотними). Процес, який породжує ергодичний ланцюг, почавшись у певному стані, ніколи не завершується, а послідовно переходить із одного стану в другий, потрапляючи в різні стани з різною частотою, яка залежить від перехідних ймовірностей. Тому основна характеристика ергодичного ланцюга – ймовірність перебування процесу в станах  $S_j, j = 1, \dots, k$ , – відносні частоти потрапляння процесу в стани  $S_j$  і одночасно

час, за який процес перебуває в кожному зі станів. Як додаткові характеристики ергодичних ланцюгів використовують математичне сподівання і дисперсію часу (кількість кроків) першого потрапляння в стан  $S_j$  зі стану  $S_i$  і гранична кореляція кількості потраплянь у стани  $S_i$  і  $S_j$ . Ці характеристики визначаються методами алгебраїчної теорії марковських ланцюгів.

Марковський процес із дискретними станами  $S_1, \dots, S_k$ , переходи між якими дозволені в будь-який момент, називають безперервним марковським ланцюгом. Однорідний безперервний марковський ланцюг, поведінка якого в будь-який момент підпорядковується одному і тому самому закону, задається матрицею інтенсивностей переходів  $\mathbf{Q} = [q_{ij}], i, j = 1, \dots, k$ . Інтенсивність переходів визначають так:

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t) - 1}{\Delta t}; \quad q_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},$$

де  $p_{ij}(\Delta t)$  – ймовірність переходу процесу із стану  $S_i$  у стан  $S_j$ , за час  $\Delta t$ .

Це означає, якщо процес знаходиться в стані  $S_i$ , то ймовірність переходу протягом проміжку часу  $\Delta t$  у стан  $S_j$ , відмінний від  $S_i$ , становить  $-q_{ij}\Delta t$ . Аналогічно ймовірність переходу процесу протягом проміжку часу  $\Delta t$  із стану  $S_i$  у стан  $S_j$  становить  $q_{ij}\Delta t$ . Інтенсивність переходів має задовольняти умову

$$\sum_{j=1}^k q_{ij} = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (\text{Д.1})$$

Розглянемо граф неперервного марковського ланцюга з трьома станами  $S_1, S_2, S_3$ . Припустимо, що матриця інтенсивностей переходів має такий вигляд:

$$\mathbf{Q} = [q_{ij}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\lambda & \lambda & \lambda/2 \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (\text{Д.2})$$

Під час побудови матриці значення  $q_{ii}$ ,  $i = 1, \dots, k$  з урахуванням умов (Д.1) визначають так:

$$q_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k q_{ij}.$$

Основна характеристика неперервного марковського ланцюга – стаціонарний (фінальний) розподіл імовірностей станів  $a = \{a_1, \dots, a_k\}$ , де  $a_1, \dots, a_k$  – ймовірності перебування процесу в станах  $s_1, \dots, s_k$  відповідно. Розподіл задається ймовірнісним розв’язком системи лінійних рівнянь

$$aQ = 0, \quad (\text{Д.3})$$

яка в розгорнутій формі має такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^k q_{ji} a_j = 0, \quad i=1, \dots, k.$$

Розв’язок системи, складеної з  $(k-1)$  рівнянь (Д.3) і нормувального рівняння  $a_1 + \dots + a_k = 1$ , визначає значення ймовірностей  $a = \{a_1, \dots, a_k\}$ . Рівняння Д.1, Д.2 називають рівняннями рівноваги. Вони легко складаються за графом марковського ланцюга з урахуванням того, що в кожному стані вхідний потік має дорівнювати вихідному потоку. Так, для ланцюга (див. рис. Д.15) маємо:

Стан	Інтенсивність вхідного потоку	Інтенсивність вихідного потоку
$s_1$	$\mu a_2$	$\left(\frac{\lambda}{2} + \lambda\right) a_1$
$s_2$	$\lambda a_1 + \mu a_3$	$(\mu + \lambda) a_2$
$s_n$	$\frac{\lambda}{2} a_1 + \lambda a_2$	$\mu a_3$

Із урахуванням рівності інтенсивності вхідного та вихідного потоків маємо

$$\begin{cases} \mu a_2 = \left(\frac{\lambda}{2} + \lambda\right) a_1; \\ \lambda a_1 + \mu a_3 = (\mu + \lambda) a_2; \\ \frac{\lambda}{2} a_1 + \lambda a_2 = \mu a_3. \end{cases}$$

Отримана система є системою рівнянь рівноваги для ланцюга заданого матрицею (Д.2).

Відповідно до марковських властивостей вся передісторія процесу впливає на його поведінку в майбутньому тільки через поточний стан, який і визначає подальший перебіг процесу. Тому немає необхідності знати, як довго процес знаходиться в поточному стані. Звідси випливає, що розподіл часу, що залишився

для перебування процесу в стані  $S_j$ , має залежати тільки від самого стану, а не від часу перебування в ньому. Цю властивість має лише один розподіл – експоненційний, функція густини ймовірності якого має такий вигляд:  $p(t) = 1/\tau \exp(-t/\tau)$ , де  $\tau$  – параметр розподілу, який визначає математичне сподівання випадкової величини  $t$ . Отже, неодмінна властивість неперервного марковського процесу – експоненційність розподілу часу перебування процесу в кожному зі станів.

Якщо не враховувати вказане обмеження на час перебування процесу в станах  $S_1, \dots, S_k$ , тобто допустити свавільний розподіл часу перебування, то процес стає напівмарковським. Такий процес поводить ся, відносно моментів зміни станів, як звичайний дискретний марковський ланцюг, і вважають, що у ці моменти часу наявний вкладений марковський ланцюг. Властивості напівмарковського процесу визначаються значно складніше, ніж для марковського процесу, оскільки ймовірності станів пов'язані з параметрами процесу системою диференціальних рівнянь у часткових похідних. Тому обчислення стаціонарних імовірностей у загальному випадку передбачають вирішення складної математичної задачі.

## Відповіді до розділу 20

### Випадкові сигнали. Розкладання сигналу в заданій системі ортогональних функцій.

Для характеристики та аналізу випадкових сигналів застосовують статистичний підхід. Основними характеристиками випадкових сигналів є:

- а) закон розподілу ймовірностей;
- б) спектральний розподіл потужності сигналу.

На основі першої характеристики можна знайти відносний час перебування величини сигналу в певному інтервалі рівнів, відношення максимальних значень до середньоквадратичного та низку інших важливих параметрів сигналу. Друга характеристика дає лише розподіл за частотами середньої потужності сигналу.

Для формування й обробки сигналу важливе значення має розкладання заданої функції  $f(x)$  за різними ортогональними системами функцій.

Нескінченну систему функцій, що приймає комплексні значення, визначають так:

- умова ортогональності на відрізку  $[a, b]$

$$\int_a^b Y_n(x) Y_m^*(x) dx = 0, \text{ якщо } n \neq m;$$

– квадрат норми функції  $Y_m(x)$

$$\|Y_n(x)\|^2 = \int_a^b Y_n(x)Y_n^*(x)dx = \int_a^b |Y_n(x)|^2 dx;$$

– коефіцієнт Фур'є

$$C_n = \frac{1}{\|Y_n\|^2} \int_a^b f(x)Y_n^* dx.$$

У цих виразах  $Y^*(x)$  позначає комплексно-пов'язану функцію  $Y_n(x)$ .

Щодо сигналів  $S(t)$ , що є функціями часу, ці обмежені функції можна подати у вигляді суми ряду

$$S(t) = C_0Y_0(t) + C_1Y_1(t) + \dots + C_nY_n(t) + \dots = \sum_{v=0}^n C_vY_v(t).$$

Величина  $\|S\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} S^2(t)dt = E$  є енергією сигналу електричного коливання.

Отже, енергія сигналу

$$E = \sum_{v=1}^{\infty} C_v^2 \|Y_v\|^2$$

і середня потужність сигналу за час  $t_2 - t_1$  становить

$$\overline{S^2 t} = \frac{E}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{v=1}^{\infty} C_v^2 \|Y_v\|^2.$$

Для неперіодичного сигналу  $S(t)$  на відрізку  $[t_1, t_2]$  має

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega t} \left[ \int_{t_1}^{t_2} S(x)e^{-i\Omega x} \right] d\Omega,$$

де  $\Omega$  – поточна частота. Внутрішній інтеграл

$$S(\Omega) = \int_{t_1}^{t_2} s(t)e^{-i\Omega t} dt$$

називають *спектральною щільністю* функції  $S(t)$ . Тоді

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega)e^{i\Omega t} d\Omega.$$

Останні два вирази називають відповідно *прямим* і *оберненим перетворенням Фур'є*.

Розподіл енергії в спектрі неперіодичного сигналу можна показати таким чином. Нехай  $f(t)$  і  $g(t)$  є одним і тим самим сигналом

$f(t) = g(t) = S(t)$ , тоді інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = E$$

є повною енергією сигналу  $S(t)$ , а добуток спектральних щільностей

$$G(\Omega)F^*(\Omega) = S(\Omega)S^*(\Omega) = [S(\Omega)]^2,$$

де  $S(\Omega)$  – спектр сигналу  $s(t)$ . Отже, отримуємо

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [S(\Omega)]^2 d\Omega.$$

Це відношення встановлює зв'язок між енергією сигналу (за опору 1 Ом) і його спектральною щільністю, яку називають рівністю Парсеваля.

**Імпульсний випадковий процес.** Багато задач, а також імпульсної техніки, приводять до необхідності дослідження спектрів послідовності ідентичних імпульсів. Характеризуючи геометричну форму або положення цих імпульсів, основні параметри можуть змінюватися по заданому закону або можуть бути випадковими функціями часу. Послідовність імпульсів, параметри яких є випадковими величинами, називають *імпульсним випадковим процесом*. Імпульсний випадковий процес взагалі не є стаціонарним. Середнє значення імпульсного випадкового процесу залежить від часу. Із нескінченної безлічі реалізацій виділимо деякі послідовності й розглянемо  $2N + 1$  імпульсів, розташованих по обидва боки від нульового імпульсу, пов'язаного з початком відліку часу. Позначимо  $Z_{KN}(\omega)$  спектральну щільність (перетворення Фур'є) для функції, що описує цю послідовність імпульсів, і нехай відстань між її крайніми імпульсами дорівнює  $(2N+1)T$ . Оскільки імпульсний процес не є стаціонарним, то середня потужність імпульсної послідовності

$$G_K(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{(2N+1)T} |Z_{KN}(\omega)|^2$$

буде залежати від  $k$ , тобто від того, для якої з реалізації імпульсного випадкового процесу ця потужність рахується. Для визначення енергетичного спектра  $F(\omega)$  імпульсного випадкового процесу необхідно провести додаткове усереднення  $G_K(\omega)$  за безліччю реалізацій. Отже, енергетичний спектр імпульсного процесу визначають зі співвідношення (з урахуванням моментів випадкових величин)

$$\left[ \begin{array}{l} m_k \{ \xi \} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k * \omega(x) dx \\ \text{для неперервних випадкових величин} \\ m_k \{ \xi \} = \sum_{z=1}^n x_z^k p_z \\ \text{для дискретних випадкових величин} \end{array} \right]$$

$$F(\omega) = m_1 \{ G_K(\omega) \} = m_1 \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{(2N+1)T} |Z_{kN}(\omega)|^2 \right\}.$$

Розглянемо будь-яку реалізацію  $\xi^{(k)}(t)$  імпульсного випадкового процесу. Нехай імпульс, який належить цій реалізації, з'являється в момент часу  $t_n^{(k)}$ , що описується функцією  $\xi_n^{(k)}(t - t_n^{(k)})$ . Ця функція має задовольняти умову  $\xi_n^{(k)}(t) \equiv 0$  за  $t < 0$ .

Послідовність  $2N + 1$  імпульсів із розглянутої реалізації можна виразити аналітичною сумою

$$\sum_{n=-N}^N \xi_n^{(k)}(t - t_n^{(k)}).$$

Припустимо  $t_n^{(k)} = nT + v_n^{(k)}$ , де  $T$  – додатна константа. Нехай  $F_n^{(k)}(\omega)$  – перетворення Фур'є від  $\xi_n^{(k)}(t)$ . Позначимо

$$V_n^{(k)} = F_n^{(k)}(\omega) e^{i\omega v_n^{(k)}},$$

тоді перетворення Фур'є від  $\xi_n^{(k)}(t - t_n^{(k)})$  становитиме

$$F_n^{(k)}(\omega) e^{i\omega t_n^{(k)}} = V_n^{(k)} e^{i\omega nT}.$$

Припустимо, що імпульси не перекриваються, тобто в кожному тактовому інтервалі з'являється один і тільки один імпульс. Ця умова означає, що можливі значення випадкової величини  $v_n$  та випадкової тривалості  $n$ -го імпульсу не перевершують за абсолютне значення  $T/2$ .

Запишемо тепер спектральну щільність (перетворення Фур'є) послідовності  $2N + 1$  імпульсів

$$Z_{kN}(\omega) = \sum_{n=-N}^N V_n^{(k)} e^{in\omega T}.$$

Для визначення енергетичного спектра імпульсного випадкового процесу підставимо вираз спектральної щільності в загальну формулу

$$F(\omega) = m_1 \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{(2N+1)T} \left| \sum_{n=-N}^N V_n^{(k)} e^{in\omega T} \right|^2 \right\}.$$

Змінюючи порядок переходів до межі та усереднення за множиною, отримуємо

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} m_1 \left\{ \left| \sum_{n=-N}^N V_n^{(k)} e^{i n \omega T} \right|^2 \right\}.$$

Для визначення  $F(\omega)$  необхідно знайти спочатку середнє за множиною (тобто за індексом  $k$ ) від  $|Z_{kN}(\omega)|^2$ , оскільки

$$\begin{aligned} |Z_{kn}(\omega)|^2 &= Z_{kn}(\omega) \overline{Z_{kn}(\omega)}; \\ |Z_{kn}(\omega)|^2 &= \sum_{n=-N}^N \sum_{j=-N}^N V_n^{(k)} \overline{V_j^{(k)}} e^{i \omega(n-j)T}. \end{aligned}$$

Риска над  $V$  вказує на комплексно-спряжену величину. Виділивши в сумі члени, відповідні  $n = j$ , отримуємо

$$m_1 \left\{ |Z_{kn}(\omega)|^2 \right\} = m_1 \left\{ \sum_{n=-N}^N |V_n^{(k)}|^2 + \sum_{n=-N}^N \sum_{j=-N}^N V_n^{(k)} \overline{V_j^{(k)}} e^{i(n-j)\omega T} \right\},$$

і оскільки середнє від суми дорівнює сумі середніх доданків, то

$$m_1 \left\{ |Z_{kn}(\omega)|^2 \right\} = \sum_{n=-N}^N m_1 \left\{ |V_n^{(k)}|^2 \right\} + \sum_{n=-N}^N \sum_{j=-N}^N m_1 \left\{ V_n^{(k)} \overline{V_j^{(k)}} e^{i(n-j)\omega T} \right\}.$$

Розглянемо імпульсні процеси, у яких статистичні характеристики імпульсів не залежать від його номера, а статистичні характеристики сукупності імпульсів залежать від взаємного розташування імпульсів і не залежать від того, який з них прийнятий за нуль. За цих обмежень величина

$$K(\omega) = m_1 \left\{ |V_n^{(k)}|^2 \right\}$$

не залежить від номера імпульсу  $n$ , а величина

$$H_{n-j}(\omega) = m_1 \left\{ V_n^{(k)} \overline{V_j^{(k)}} \right\}$$

залежить тільки від різниці  $n - j$  номерів двох імпульсів.

Тоді

$$\sum_{n=-N}^N m_1 \left\{ |V_n^{(k)}|^2 \right\} = (2N+1)K(\omega),$$

а подвійну суму можна подати у вигляді

$$\sum_{n=-N}^N \sum_{j=-N}^N m_1 \left\{ V_n^{(k)} \overline{V_j^{(k)}} \right\} e^{i(n-j)\omega T} = 2 \sum_{p=1}^{2N} (2N+1-p) H_p(\omega) \cos p\omega T.$$

Підставивши отримані вирази у формулу для  $F(\omega)$  знаходимо

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \left\{ K(\omega) + \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \sum_{p=1}^{2N} \left( 1 - \frac{p}{2N+1} \right) H_p(\omega) \cos p\omega T \right\}.$$



Якщо імпульси взаємно незалежні, то

$$H_{n-j}(\omega) = m_1 \{V_n^{(k)}\} m_1 \{\overline{V_j^{(k)}}\} = |H(\omega)|^2,$$

де  $H(\omega) = m_1 \{V_n^{(k)}\}$ .

Виразимо другий член виразу для  $F(\omega)$  через

$$\psi(\omega) = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{2N} \left(1 - \frac{p}{2N+1}\right) [H_p(\omega) - |H(\omega)|^2] \cos p\omega T,$$

тоді

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \left\{ K(\omega) - |H(\omega)|^2 + \psi(\omega) + |H(\omega)|^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{2N} \left(1 - \frac{p}{2N+1}\right) \cos p\omega T\right] \right\}.$$

З виразів:

$$\begin{aligned} \Lambda_N(\omega) &= 1 + 2 \sum_{p=1}^{2N} \left(1 - \frac{p}{2N+1}\right) \cos p\omega T = \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N \sum_{j=-N}^N e^{i(n-j)\omega T} = \frac{1}{2N+1} \left\{ \frac{\sin \left[ (2N+1) \frac{\omega T}{2} \right]}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right\}^2 \end{aligned}$$

та

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left\{ \frac{\sin \left[ (2N+1) \frac{\omega T}{2} \right]}{\sin \frac{\omega T}{2}} \right\}^2 = \begin{cases} 0 & \omega T \neq 2\pi r \\ \infty & \omega T = 2\pi r \end{cases}$$

за  $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , знаходимо

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N(\omega) = c \delta \left( \omega - \frac{2\pi r}{T} \right),$$

де  $r$  – будь-яке ціле число (включаючи нуль).

Для визначення невідомої константи  $c$  візьмемо інтеграл від обох частин останньої рівності в межах від  $\frac{2\pi}{T} - \frac{\pi}{T}$  до  $\frac{2\pi r}{T} + \frac{\pi}{T}$ . Тоді

$$\int_{\frac{2\pi r}{T} - \frac{\pi}{T}}^{\frac{2\pi r}{T} + \frac{\pi}{T}} c \delta \left( \omega - \frac{2\pi r}{T} \right) d\omega = c =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{2\pi r}{T}\left(r-\frac{1}{2}\right)}^{\frac{2\pi r}{T}\left(r+\frac{1}{2}\right)} \left[ 1 + 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{2N} \left( 1 - \frac{p}{2N+1} \right) \cos p\omega T \right] d\omega = \\
&= \frac{2\pi}{T} + 4 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{2N} \left( 1 - \frac{p}{2N+1} \right) \frac{\cos rp\pi \sin p\pi}{pT} = \frac{2\pi}{T}.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N(\omega) = \frac{2\pi}{T} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right).$$

Об'єднуємо формули та отримуємо такий загальний вираз енергетичного спектра імпульсного випадкового процесу:

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \left\{ K(\omega) - |H(\omega)|^2 + \Psi(\omega) + |H(\omega)|^2 \frac{2\pi}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right) \right\}.$$

Якщо імпульси взаємно незалежні, то  $H_p(\omega) = |H(\omega)|^2$ , а  $\Psi(\omega) \equiv 0$ . У цьому разі викривлення імпульсів (амплітудні, за довжиною та за положенням) подібні до білого шуму. В деяких задачах припущення про незалежність імпульсів може бути цілком небезпідставне. Кореляцією між імпульсами можна знехтувати, якщо її час  $\tau_0 \ll T$ . Наприклад, розглянемо на виході приймального пристрою послідовність відеоімпульсів, спотворених флуктуаційними шумами. Можна вважати, що ці спотворення мають властивості білого шуму, якщо ширина смуги пропускання приймального пристрою  $\Delta \gg \frac{1}{\tau}$ , де  $\tau$  – тривалість імпульсу. Однак трапляються й такі задачі, де необхідно враховувати смуги попередніх каскадів, тобто кореляцію між імпульсами.

Загальний вираз енергетичного спектра імпульсного випадкового процесу складається з неперервної частини

$$F_n(\omega) = \frac{2}{T} \{ K(\omega) - |H(\omega)|^2 + \Psi(\omega) \}$$

та дискретної частини

$$F_d(\omega) = \frac{4\pi}{T^2} |H(\omega)|^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right),$$

що містить дискретні лінії на частотах, кратних середній частоті

повторення імпульсів  $\frac{2\pi}{T}$ . Співвідношення повних потужностей складових неперервного та дискретного спектрів становить

$$\mu = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [K(\omega) - |H(\omega)|^2 + \psi(\omega)] d\omega}{\frac{2\pi}{T} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left| H\left(\frac{2\pi r}{T}\right) \right|^2}.$$

Очевидно, що якщо викривлення відсутні, то  $K(\omega) = |H(\omega)|^2 = |g(\omega)|^2$ , де  $g(\omega)$  – спектральна щільність невикривленого імпульсу. При цьому неперервна частина спектра зникає, а дискретна – співпадає зі спектром потужності періодичної послідовності не модульованих імпульсів. Викривлення зумовлені перешкодами, тому можна ототожнити неперервну частину спектра зі спектром перешкод, а дискретну – зі спектром корисного сигналу. В цьому разі відношення  $\mu$  є відношенням потужності перешкоди до потужності сигналу  $\left(\frac{3}{c}\right)$ . В інших задачах, де корисна модуляція послідовності імпульсів має статистичний характер (наприклад, модуляція мовлення в багатоканальній телефонії), неперервна частина спектра містить корисну інформацію.

Якщо параметри імпульсів (амплітуда, час виникнення, тривалість), окрім суто випадкових викривлень, піддаються модуляції заданою періодичною функцією часу, то дискретну частину енергетичного спектра необхідно доповнити членами з дельта-функціями на частотах, відповідних компонентам розкладу періодичної функції в ряд Фур'є.

Нижче розглянуто деякі поодинокі випадки імпульсних випадкових процесів, для яких випадковим є один із параметрів, що характеризує форму імпульсу або момент його виникнення. Формула дозволяє досліджувати загальні випадки, коли вказані випадкові викривлення діють загалом.

### Завдання 1

Позначимо через  $g(\omega)$  спектральну щільність імпульсів із амплітудою, яка дорівнює одиниці, що з'являється у момент часу  $t = 0$ . Нехай  $T$  – період повторення імпульсів, а  $\xi_n$  – випадкова амплітуда  $n$ -го імпульсу (рис. Д.16).

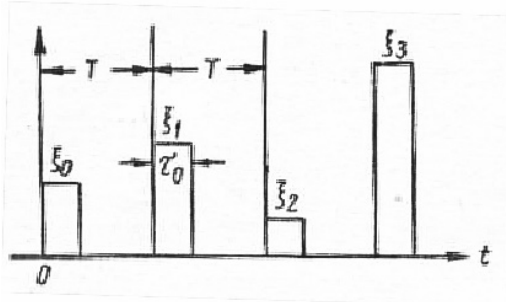


Рис. Д.16. Послідовність рівновіддалених імпульсів однакої тривалості з випадковою амплітудою

Оскільки у розглянутому випадку  $v_n^{(k)} = 0$  та  $F_n(\omega) = \xi_n g(\omega)$ , то

$$V_n = \xi_n g(\omega)$$

Підставляємо ці вирази у формули для  $K(\omega)$  і  $H_{n-j}(\omega)$ , отримуємо:

$$K(\omega) = m_1 \{ \xi^2 \} |g(\omega)|^2,$$

$$\begin{aligned} H_{n-j}(\omega) &= m_1 \{ \xi_n \xi_j |g(\omega)|^2 \} = \\ &= |g(\omega)|^2 m_1 \{ \xi_n \xi_j \}. \end{aligned}$$

Нехай  $\omega_1(x)$  – одновимірна функція розподілу випадкової амплітуди  $\xi_n$ , однакою для всіх імпульсів  $n$ . Середнє значення  $a$  та дисперсія  $\sigma^2$  випадкових амплітуд імпульсів становлять:

$$m_1 \{ \xi_n \} = a = \int_{-\infty}^{\infty} x \omega_1(x) dx,$$

$$M_2 \{ \xi_n \} = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 \omega_1(x) dx.$$

Нехай  $\omega_2(x, y, \xi)$  – двовимірна функція розподілу випадкових амплітуд  $\xi_n$ , які залежать тільки від взаємного розташування імпульсів  $\tau = (n - j)T$ , тобто лише від різниці їх номерів. Позначимо через  $R_{n-j} = R[(n - j)T]$  коефіцієнт кореляції випадкових амплітуд, тоді

$$m_1 \{ (\xi_n - a)(\xi_j - a) \} = \sigma^2 R_{n-j} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)(y - a) \omega^2 [x, y, (n - j)T] dx dy.$$

Враховуючи, що дисперсія випадкових величин дорівнює різниці її початкового моменту розподілення другого порядку та квадрату середнього значення  $M_2 = m_2 - m_1^2$ , а для незалежних  $\xi_1$  і  $\xi_2$ :

$$m_1 \{ \xi_1, \xi_2 \} = m_1 \{ \xi_1 \} m_1 \{ \xi_2 \}.$$

Тепер виразимо дисперсію через числові характеристики випадкових амплітуд імпульсів:

$$K(\omega) = |g(\omega)|^2 (\sigma^2 + a^2);$$

$$H_{n-j}(\omega) = |g(\omega)|^2 (\sigma^2 R_{n-j} + a^2).$$

Якщо амплітуди будь-якої пари імпульсів незалежні, тоді  $R_p \equiv 0$ ,  $p \neq 0$ . З попередніх рівнянь  $H(\omega) \equiv a g(\omega)$ .

Підставляючи отримані вирази в формулу для  $F(\omega)$ , знаходимо кінцевий вираз енергетичного спектра необхідного імпульсного випадкового процесу

$$F(\omega) = \frac{2}{T} |g(\omega)|^2 \left\{ G^2 [1 + \psi_1(\omega)] + \frac{2\pi}{T} a^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right) \right\},$$

де

$$\psi_1(\omega) = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{2N} \left( 1 - \frac{P}{2N+1} \right) R_p \cos p\omega T.$$

Отже, енергетичний спектр послідовності імпульсів випадкової амплітуди залежить від її кореляційної функції, а не від виду функції розподілу випадкових амплітуд.

Якщо випадкові амплітуди будь-якої пари з послідовностей прямокутних імпульсів незалежні, то такий імпульсний процес можна розглядати як амплітудну модуляцію імпульсів білим шумом.

Якщо виконануться умови  $R_p \equiv 0, p \neq 0, \psi_1(\omega) \equiv 0$ , тоді знаходимо

$$F(\omega) = \frac{2}{T} |g(\omega)|^2 \left\{ G^2 + \frac{2\pi}{T} a^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right) \right\}.$$

Неперервна частина енергетичного спектра за формою така сама, як і спектр одиничного імпульсу, а її інтенсивність пропорційна дисперсії  $G^2$ . Дискретна частина спектра відповідає періодичній послідовності імпульсів тієї самої форми, але постійної амплітуди, що дорівнює середньому значенню  $a$ . Енергетичний спектр послідовності прямокутних імпульсів довжиною  $\tau_0$ , модульованих за амплітудою білим шумом, наведено на рис. Д.17.

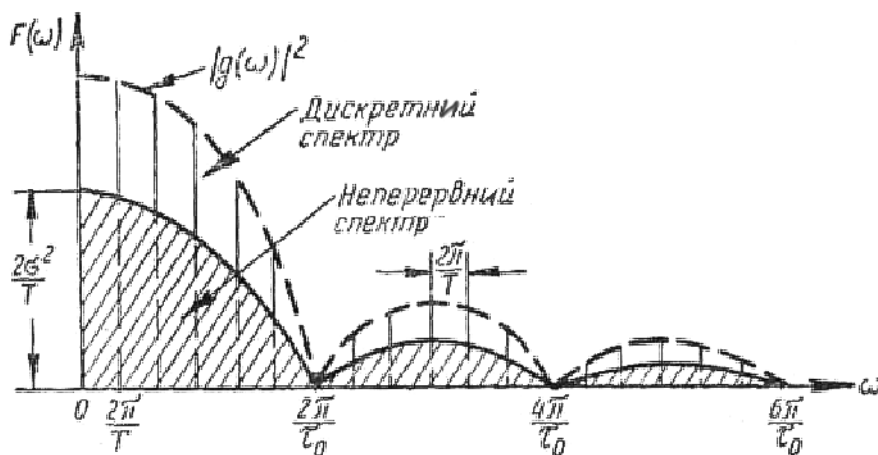


Рис. Д.17. Енергетичний спектр послідовності взаємно незалежних прямокутних імпульсів із випадковою амплітудою

Для загального випадку, за яким  $\psi_1(\omega)$  не дорівнює нулю, якщо  $\sum_{p=1}^{\infty} R_p$  збігається, то межа в правій частині формули  $\psi_1(\omega)$

існує та визначається за формулою

$$\psi_1(\omega) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_p \cos p\omega T.$$

Позначимо через  $\varphi(\omega)$  перетворення Фур'є коефіцієнта кореляції  $R(\tau)$ :

$$\varphi(\omega) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 4 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau.$$

Функція  $\varphi(\omega)$  становить енергетичний спектр випадкового процесу, яким модулюється амплітуда імпульсів. Нехай спектр  $\varphi(\omega)$  має кінцеву ширину  $2\Delta$ , тобто  $\varphi(\omega) = 0$  за  $|\omega| \geq \Delta$ .

Припустимо, що  $\Delta \leq \frac{\pi}{T}$ , тоді  $1 + \psi_1(\omega)$  є періодичною функцією з періодом  $\frac{2\pi}{T}$ , що в межах від  $\frac{\pi}{T}$  до  $\frac{2\pi}{T}$  збігається з  $\varphi(\omega)$ . Якщо  $\frac{\pi}{T} \leq \Delta \leq \frac{2\pi}{T}$ , то  $\Delta$  є сумою двох доданків  $\Delta = \frac{\pi}{T} + \Delta_1$ ,  $\Delta_1 \leq \frac{\pi}{T}$ . Отримаємо

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\Delta} \varphi(\omega) e^{+i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{T}} \varphi(\omega) \cos \omega\tau d\omega + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{T}}^{\Delta} \varphi(\omega) \cos \omega\tau d\omega = R_1(\tau) + R_2(\tau). \end{aligned}$$

Якщо  $\Delta T \ll 1$ , тоді

$$\psi_1(\omega) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_1 p \cos p\omega T + 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_2 p \cos \omega T = \psi_{11}(\omega) + \psi_{12}(\omega).$$

Функції  $\psi_{11}(\omega)$  та  $\psi_{12}(\omega)$  періодичні та збігаються з функцією  $\varphi(\omega)$ , зокрема  $\psi_{11}(\omega)$  на ділянці до  $\frac{\pi}{T}$ , а  $\psi_{12}(\omega)$  – від  $\frac{\pi}{T}$  до  $\Delta$  відповідно.

Отже, для неперервної частини енергетичного спектра послідовності прямокутних імпульсів, модульованих за амплітудою білим шумом зі спектром, рівномірним в обмеженій зоні  $\Delta$ , коефіцієнт кореляції випадкових амплітуд будь-якої пари імпульсів

$$R_p = \frac{\sin p\Delta T}{p\Delta T}.$$

Якщо  $\Delta \leq \frac{\pi}{T}$ , то спектр матиме вигляд періодично повторюваних смуг шириною  $2\Delta$  на частотах  $\frac{2\pi}{T}$ , тобто частота повторення імпульсів обмежена знизу віссю абсцис, а зверху кривою  $|g(\omega)|^2$  (рис. Д.18).

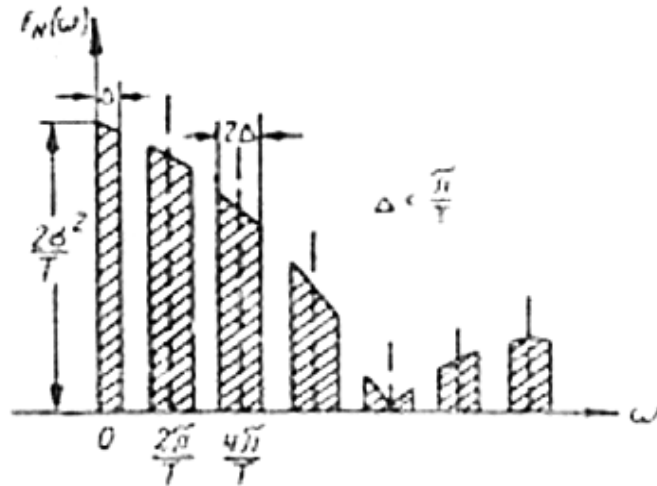


Рис. Д.18. Енергетичний спектр послідовності прямокутних імпульсів, змодульованих за амплітудою шуму, що займає обмежену полосу частот

Зі збільшенням  $\Delta$  ширина цих смуг збільшується, та якщо  $\Delta = \frac{\pi}{T}$ , проміжки між такими частотами зникають, тобто спектр не відрізняється від спектра з нескінченною смугою моделюючого шуму (рис. Д.18).

Деформація огинаючої частини неперервного спектра стає менш помітною за  $\Delta \rightarrow \infty$ . Якщо  $\Delta T \gg 1$ , можна вважати, що цей спектр не відрізняється від спектра модулюючого білим шумом.

### Завдання 2

Розглянемо послідовність імпульсів заданої форми, що мають однакову амплітуду та тривалість, але випадковий час появи (рис. Д.19).

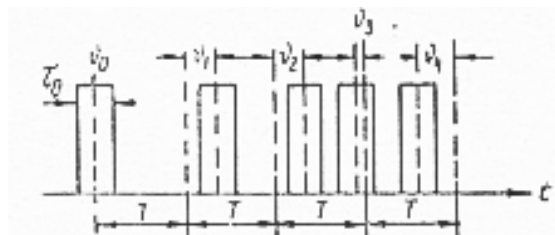


Рис. Д.19. Послідовність імпульсів, що мають однакові амплітуди й тривалість, але випадковий час появи

Нехай  $g(\omega)$  – спектральна щільність імпульсу, що з'являється в момент  $t = 0$ . У цьому разі  $F_n(\omega) = g(\omega)$ ,  $V_n = g(\omega)e^{i\omega v_n}$ .

Підставивши ці вирази для величин  $K(\omega)$  та  $H_{n-j}$ , отримаємо:

$$K(\omega) = m_1 \{|g(\omega)|^2\} = |g(\omega)|^2;$$

$$H_{n-j}(\omega) = m_1 \{|g(\omega)|^2\} e^{i\omega(v_n - v_j)} = |g(\omega)|^2 * m_1 \{e^{i\omega(v_n - v_j)}\}.$$

Нехай  $\omega_1(x)$  – одновимірна функція розподілу випадкових величин  $v_n$ , однакова для всіх імпульсів, тобто для будь-якого  $n$ , а  $\omega_2(x, y, \tau)$  – двовимірна функція розподілу цих випадкових величин, залежних лише від взаємного розташування імпульсів, тобто від різниці їх номерів  $n - j$ .

Введемо характеристичну функцію  $\Theta_2(\omega_1, \omega_2, \tau)$  двовимірного закону розподілу

$$\Theta_2(\omega_1, \omega_2, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_2(x, y, \tau) e^{i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy,$$

тоді  $H_{n-j}(\omega) = |g(\omega)|^2 \Theta_2[\omega, -\omega, (n-j)T]$ .

Якщо моменти появи будь-якої пари імпульсів незалежні, то

$$H_{n-j}(\omega) = |H(\omega)|^2 = |g(\omega)|^2 |\Theta_1(\omega)|^2,$$

де  $\Theta_1(\omega)$  – характеристична функція, яка відповідає одновимірному розподілу  $\omega_1(x)$ .

Позначимо через  $\psi_2(\omega)$  межу

$$\psi_2(\omega) = 2 \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{2N} \left( 1 - \frac{p}{2N+1} \right) \left\{ \Theta_2[\omega, -\omega, (n-j)T] - |\Theta_1(\omega)|^2 \right\} \cos p\omega T.$$

Підставивши отримані вирази для величини  $F(\omega)$ , знаходимо кінцевий вираз енергетичного спектра цього імпульсного випадкового процесу

$$F(\omega) = \frac{2}{T} |g(\omega)|^2 \left\{ 1 - |\Theta_1(\omega)|^2 + \psi_2(\omega) + \frac{2\pi}{T} |\Theta_1(\omega)|^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right) \right\}.$$

Цей енергетичний спектр залежить від характеристичних функцій законів розподілу випадкових відхилень від  $nT$  часу появи імпульсів, причому квадрат модуля спектральної щільності імпульсу слугує множником пропорціональності.

Коли випадкові моменти появи будь-якої пари імпульсів незалежні, то

$$\Theta_2(\omega, -\omega, pT) = |\Theta_1(\omega)|^2;$$



$$\psi_2(\omega) \equiv 0,$$

тоді

$$F(\omega) = \frac{2}{T} |g(\omega)|^2 \left\{ 1 - |\Theta_1(\omega)|^2 + \frac{2\pi}{T} |\Theta_1(\omega)|^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right) \right\}.$$

Інтенсивність дискретної частини енергетичного спектра за часо-вої модуляції імпульсів білим шумом пропорційна  $|\Theta_1(\omega)|^2$ , а інтенсивність неперервної частини спектра пропорційна  $1 - |\Theta_1(\omega)|^2$ .

Нехай відхилення часу появи імпульсів від середнього значення є нормальний стаціонарний випадковий процес із нульовим середнім значенням та коефіцієнтом кореляції  $R(r)$ . Одновимірні та двовимірні характеристичні функції цього процесу становлять:

$$\Theta_1(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2}{2}}; \quad \Theta_2(\omega_1, \omega_2, \tau) = e^{-\frac{\sigma^2}{2} [\omega_1^2 + 2R(\tau)\omega_1\omega_2 + \omega_2^2]}.$$

Підставивши ці вирази в формулу для функції  $\psi_2(\omega)$ , за умови, що  $\sum_{p=1}^{\infty} |R_p|$  збігається, отримаємо

$$\begin{aligned} \psi_2(\omega) &= 2 \sum_{p=1}^{\infty} [e^{-\frac{\sigma^2 \omega^2 (1-R_p)}{2}} - e^{-\sigma^2 \omega^2}] \cos p\omega T = \\ &= 2e^{-\sigma^2 \omega^2} \sum_{p=1}^{\infty} (e^{-\sigma^2 R_p \omega^2} - 1) \cos p\omega T, \end{aligned}$$

де  $R_p = R(pT)$ .

Розклавши експоненціальну функцію в ряд та змінюючи порядок підсумування, знаходимо

$$\psi_2(\omega) = e^{-\sigma^2 \omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma^{2k} \omega^{2k}}{k!} 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_p^k \cos p\omega T,$$

позначимо

$$\psi_{2k}(\omega) = 2 \sum_{p=1}^{\infty} R_p^k \cos p\omega T,$$

отримаємо

$$\psi_2(\omega) = e^{-\sigma^2 \omega^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma^{2k} \omega^{2k}}{k!} \psi_{2k}(\omega).$$

Позначимо через  $\phi_k(\omega)$  перетворення Фур'є  $k$ -го степеня коефіцієнта кореляції

$$\phi_k(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R^k(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = 2 \int_0^{\infty} R^k(\tau) \cos \omega\tau d\tau,$$

тоді, за умов  $\Delta \leq \frac{\pi}{T}$  або  $\Delta = \frac{\pi}{T} + \Delta_1$ ,  $\Delta_1 < \frac{\pi}{T}$ , вираз для  $\psi_{2k}$  є рядом Фур'є (або сумою рядів Фур'є) періодичної функції з періодом  $\frac{2\pi}{T}$ , яка збігається в межах одного періоду з  $\phi_k(\omega)$ . Якщо спектр модульованого шуму рівномірний в обмеженій смузі  $\Delta$ , то  $\psi_{2_1}$  і  $\psi_{2_2}$  є відповідно періодичною ступінчатою і періодично пилообразною функціями.

За ширини смуги  $\Delta$  модульованого шуму кратної половині частоти повтору імпульсів  $R_p = 0$  і  $\psi_z \equiv 0$ , енергетичний спектр збігається зі спектром, який відповідає нескінченній смузі модульованого шуму і має вигляд

$$F(\omega) = \frac{2}{T} |g(\omega)|^2 \left\{ 1 - e^{-\sigma^2 \omega^2} + \frac{2\pi}{T} e^{-\sigma^2 \omega^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right) \right\}.$$

Для прямокутних імпульсів висоти  $u_0$  і тривалості  $\tau_0$  спектральної щільності  $g(\omega) = \frac{2u_0}{\omega} \sin^2 \frac{\omega \tau_0}{2}$  і енергетичний спектр

$$F(\omega) = \frac{8u_0^2}{\omega^2 T} \sin^2 \frac{\omega^2 \tau_0}{2} \left\{ 1 - e^{-\sigma^2 \omega^2} + \frac{2\pi}{T} e^{-\sigma^2 \omega^2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right) \right\}.$$

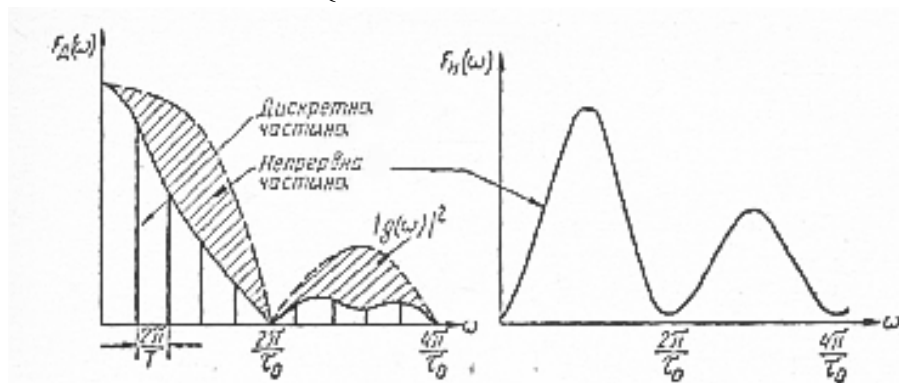


Рис. Д.20. Енергетичний спектр періодичної послідовності прямокутних імпульсів з постійною амплітудою  $u_0$  і тривалістю  $\tau_0$ , моменти появи яких спотворюються білим нормальним шумом з дисперсією  $\sigma^2 \ll \tau_0^2$ .

### Завдання 3

Розглянемо послідовність рівновіддалених імпульсів з однаковою амплітудою та випадковою тривалістю (рис. Д.21).

Нехай  $g(\omega, \xi_n)$  – спектральна щільність імпульсу, що виникає в момент часу  $t = 0$ . Задамо через  $\xi_n$  випадкову тривалість  $n$ -го імпульсу, тоді  $F_n(\omega) = g(\omega, \xi_n)$ .

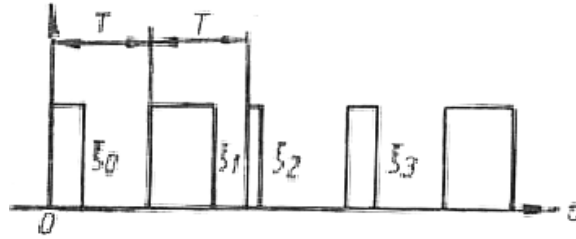


Рис. Д.21. Послідовність рівновіддалених імпульсів заданої (прямокутної) форми з однаковою амплітудою та випадковою тривалістю

Оскільки імпульси з'являються через постійні проміжки часу  $T$ , то  $v_n = 0$ , і

$$V_n = F_n(\omega) = g(\omega, \xi_n),$$

при цьому:

$$K(\omega) = m_1 \{ |g(\omega, \xi_n)|^2 \};$$

$$H_{n-j}(\omega) = m_1 \{ g(\omega, \xi_n) \overline{g(\omega, \xi_n)} \}.$$

Нехай  $w_1(x)$  – одновимірна функція розподілу випадкової тривалості  $\xi_n$ , однакова для всіх імпульсів, тобто для будь-якого  $n$ , а  $w_2(x, y, \tau)$  – двовимірна функція розподілу цих випадкових величин, що залежить лише від взаємного розташування імпульсів, тобто від різниці  $n - j$  їх номерів, тоді:

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega, \xi_n)|^2 w_1(x) dx;$$

$$H_{n-j}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, \xi_n) \overline{g(\omega, \xi_n)} w_2[x, y, (n-j)T] dx dy.$$

Якщо тривалість будь-якої пари імпульсів попарно незалежні, то

$$\begin{aligned} H_{n-j}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, x) w_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\omega, y)} w_1(y) dy = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, x) w_1(x) dx \right|^2 = |H(\omega)|^2, \end{aligned}$$

де  $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, \xi_n) w_1(x) dx$ .

Позначимо через  $\psi_3(\omega)$  межу

$$\psi_3(\omega) = 2 \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{p}{2N+1} \right) [H_p(\omega) - |H(\omega)|^2] \cos(p\omega T).$$

Кінцевий вираз для енергетичного спектра випадкового імпульсного процесу, що розглядається, має вигляд

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \left\{ K(\omega) - |H(\omega)|^2 + \psi_3(\omega) + \frac{2\pi}{T} |H(\omega)|^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right) \right\}.$$

В енергетичному спектрі статистичні характеристики процесу та спектральну щільність поодинокого імпульсу неможливо розділити, вони разом входять до функцій  $K(\omega)$  та  $H_p(\omega)$ .

Якщо випадкові тривалості будь-якої пари імпульсів незалежні, що відповідає модуляції другого роду за тривалістю білим шумом, то  $H_p(\omega) \equiv |H(\omega)|^2$ , і  $\psi_3(\omega) = 0$ , тоді маємо

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \left\{ K(\omega) - |H(\omega)|^2 + \frac{2\pi}{T} |H(\omega)|^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi r}{T}\right) \right\}.$$

За дуже малих дисперсій випадкових тривалостей імпульсів енергетичний спектр не відрізняється за структурою від спектра послідовності рівновіддалених імпульсів із випадковою амплітудою.

Дійсно, за малих  $x$  функцію  $g(\omega, x)$  можна розкласти в ряд Тейлора, обмежуючись лінійним членом

$$g(\omega, x) = g(\omega, 0) + x \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x=0}.$$

Оскільки  $g(\omega, 0) \equiv 0$ , то

$$H_p(\omega) = \left( \frac{\partial g}{\partial \chi} \right)_{\chi=0} \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_{y=0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \omega_2(\chi, y, pT) dx dy.$$

Враховуючи, що

$$\left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x=0} = \left( \frac{\partial g}{\partial y} \right)_{y=0}$$

і

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \omega(x, y, pT) dx dy = B_1(pT),$$

де  $B_1(\tau)$  – кореляційна функція випадкових тривалостей імпульсів, знаходимо

$$H_p(\omega) = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x=0} B_1(pT),$$

звідки також отримаємо:

$$\begin{aligned} |H(\omega)|^2 &= \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x=0}^2 B_1(\infty) = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x=0}^2 \tau_0^2; \\ K(\omega) &= \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x=0}^2 B_1(0) = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x=0}^2 (\sigma^2 + \tau_0^2), \end{aligned}$$

де  $\tau_0$  і  $\sigma^2$  – середнє значення і дисперсія випадкової тривалості імпульсу.

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x=0}^2 \left\{ \sigma^2 + \sigma^2 \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \sum_{p=1}^{2N} \left( 1 - \frac{p}{2N+1} \right) R_p \cos p\omega T + \frac{2\pi}{T} \tau_0^2 \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta \left( \omega - \frac{2\pi r}{T} \right) \right\},$$

де  $R_p = \frac{B_1(pT) - \tau_0^2}{\sigma^2}$ .

Порівнюючи енергетичні спектри імпульсних послідовників, модульовані шумом за амплітудою і тривалістю, переконуємося, що за малої тимчасової девіації вони мають однаковий вигляд.

## Відповіді до розділу 21

### Завдання 1

Стационарна густина ймовірності  $p_s(x)$  задовольняє рівність

$$-f(x)p_s(x) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_x g^2(x)p_s(x) = -J.$$

Введемо допоміжну функцію

$$q(x) = g^2(x)p_s(x).$$

За такої заміни РФП переходить у рівняння:

$$\frac{-f(x)g(x)}{g^2(x)} + \frac{\sigma^2}{2} \partial_x q(x) = -I; \quad \partial_x q(x) = \frac{2}{\sigma^2} \frac{f(x)}{g^2(x)} g(x) - \frac{2}{\sigma^2} I.$$

Введемо позначення:

$$\frac{2}{\sigma^2} \equiv A; \quad \frac{f(x)}{g^2(x)} \equiv B(x).$$

Розв'язуємо однорідне рівняння:

$$\frac{dq(x)}{dx} = AB(x)q(x); \quad \frac{dq(x)}{q(x)} = AB(x)dx; \quad \ln q(x) = \int^x AB(x)dx + C;$$

$$q(x) = C \exp A \int^x B(x)dx = C \exp A \int^x B(u)du.$$

Неоднорідне рівняння розв'язуємо методом варіації сталої

$$\partial_x q(x) = \frac{\partial C}{\partial x} \exp A \int^x B(u)du = -AI;$$

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -AI \left[ \exp A \int^x B(x)dx \right]^{-1}; \quad C = N - AI \int^x \left[ \exp A \int^x B(x)dx \right]^{-1} dx;$$

$$q(x) = \left\{ N - AI \int_0^x \left[ \exp A \int_0^x B(u) du \right]^{-1} dx \right\} \exp A \int B(x) dx;$$

$$q(x) = N \exp A \int B(u) du - AI \exp A \int B(u) du \int \left[ \exp A \int B(u) du \right]^{-1} dz.$$

Враховуючи, що  $e^z \int \frac{1}{e^u} du = \int_z^z e^\alpha d\alpha$ , маємо

$$q(x) = N \exp \left( \frac{2}{\sigma^2} \int \frac{f(u)}{g^2(u)} du \right) - \frac{2}{\sigma^2} I \int \exp \left( \frac{2}{\sigma^2} \int \frac{f(u)}{g^2(u)} du \right) dz.$$

## Завдання 2

Рівняння Ферхюльста  $\dot{X} = \lambda X - X^2$ .

Стаціонарний стан  $\dot{X} = 0$ ;  $X[\lambda - X] = 0$ :

1.  $X_{s1} = 0$ ;
2.  $X_{s2} = \lambda$ .

Перевірка стійкості:  $\frac{\partial \xi}{\partial t} = \lambda \xi - 2X_s \xi = \xi(\lambda - 2X_s)$ ;  $\xi = \xi \exp(\lambda - 2X_s)t$

(рис. Д.22).

1.  $X_{s1} = 0$ , якщо  $\lambda < 0$  – стійко;  
якщо  $\lambda > 0$  – нестійко;
2.  $X_{s2} = \lambda$ , якщо  $\lambda > 0$  – стійко;  
якщо  $\lambda < 0$  – нестійко.

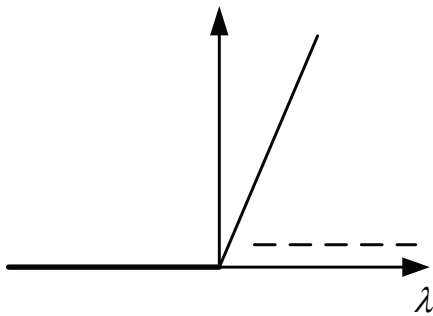


Рис. Д.22. Графік стійкості станів

## Завдання 3

$$\frac{dX}{dt} = \lambda X - X^2; \quad t = 0; \quad X = X(0).$$

$$\frac{dX}{\lambda X - X^2} = dt.$$

Знаменник доповнюємо до повного квадрата

$$\frac{dX}{-X^2 + \lambda X - \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4}} = dt \rightarrow \frac{dX}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left[X - \frac{\lambda}{2}\right]^2} = dt.$$

Табличний інтеграл:  $\int \frac{dy}{a^2 - y^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+y}{a-y} \right|;$

$$\frac{1}{2\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \ln \left| \frac{\frac{\lambda}{2} + X - \frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2} - X + \frac{\lambda}{2}} \right| \equiv \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{X}{\lambda - X} \right| = t + C;$$

$$\frac{X}{\lambda - X} = C \exp \lambda t; \quad t = 0; \quad C = \frac{X(0)}{\lambda - X(0)}.$$

$$X(t) = \frac{X(0)}{\lambda - X(0)} e^{\lambda t} [\lambda - X(t)]; \quad X(t) = \frac{X(0)e^{\lambda t}}{\lambda - X(0)} \lambda - X(t) \frac{X(0)e^{\lambda t}}{\lambda - X(0)};$$

$$X(t) \left[ 1 + \frac{X(0)e^{\lambda t}}{\lambda - X(0)} \right] = \frac{X(0)e^{\lambda t} \lambda}{\lambda - X(0)};$$

$$X(t) = \frac{X(0)e^{\lambda t} \lambda}{\lambda - X(0)} : \frac{\lambda - X(0) + X_0 e^{\lambda t}}{\lambda - X(0)} = \frac{X(0)e^{\lambda t} \lambda}{\lambda - X(0) [e^{\lambda t} - 1]};$$

$$X(t) = X(0) e^{\lambda t} \left\{ 1 + X(0) [e^{\lambda t} - 1] / \lambda \right\}^{-1}.$$

#### Завдання 4

**Класифікація границь дифузійного процесу.** В фізичних додатках простір станів випадкового процесу  $X_t$  рідко збігається з речовою прямою  $R$ . Процес зазвичай обмежений деякою підмножиною речової прямої, найчастіше множиною невід'ємних речових чисел  $R^+$  (наприклад, коли  $x$  – змінна типу концентрації). Якщо досягається межа  $\pm\infty$ , то говорять, що процес вибухає. Нехай простором станів дифузійного процесу  $X_t \in$  інтервал  $[b_1, b_2]$ , один або обидва кінці якого можуть повертатися в нескінченність:  $[b_1] = \infty$ . Вважатимемо, що  $f(x)$  і  $g(x)$  задовольняє умову Ліпшица на будь-якому замкненому просторі  $[\bar{b}_1, \bar{b}_2]$  відкритого інтервалу  $(b_1, b_2)$ , тобто існує стала  $K$ , за якої нерівність  $|f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$  виконується за будь-яких значень  $x, y \in [\bar{b}_1, \bar{b}_2]$ . Ця нерівність виконується (достатня умова), якщо функції  $f$  і  $g$  неперервно диференційовані, тобто за тією самою умовою, яка гарантує існування та єдиність розв'язку СДР.

До випадкового моменту вибуху  $\eta$ ,  $dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dW_t$ ;  $X_{t_0} = C$ , де  $t_0 < \eta \leq \infty$ , коли випадковий процес  $X_t$  вперше досягає однієї з межі, існує єдиний розв'язок дифузійного процесу. Найкращими дифузійними процесами називають такі, які ніколи не

досягають своєї межі простору станів. Такий процес «не відчуває» межі, і вони не впливають на розв'язок СДР. У цьому разі граничні умови можна не накладати. Такі межі називають недосяжними. Вони бувають двох типів.

1. Природні, які характеризуються тим, що навіть за  $t \rightarrow \infty$  вони досяжні з нульовою ймовірністю.

Характер межі визначається поведінкою переносу та дифузії. Їх класифікація основана на інтегруванні деяких функцій, складених з  $f$  та  $g$ . Аналітично, умова того, що межа  $b_i$  природня, її можна записати так:

$$\varphi(x) = \exp\left(-\int_{\beta}^x \frac{2f(x)}{\sigma^2 g^2(x)}\right),$$

та не інтегрується поблизу межі. Наприклад, межа  $b_1$  природня, якщо

$$L_1(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \varphi(x) dx \text{ повертається в нескінченність.}$$

2. Дифузійний процес поблизу межі зводиться до того, що якщо процес  $X_t$  знаходити, коли  $x_0 \in (b_1, \beta)$ , то він або залишає інтервал  $(b_1, \beta)$  за скінченний час  $\tau_{x_0}$  завжди через праву точку, або ніколи не залишає його, і тоді  $X_t \rightarrow b_1$  за  $t \rightarrow b_1$ . Таку межу називають притягувальною. Вона характеризується тим, що

$$L_1(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \varphi(x) dx < \infty$$

та

$$L_2(b_1) = \int_{b_1}^{\beta} \frac{1}{\sigma^2 g^2(x)} \int_{b_1}^y \exp\left(-\int_b^x \frac{2f(z)}{\sigma^2 g^2(z)} dz\right) dx \exp\left(\int_{\beta}^y \frac{2f(z)}{\sigma^2 g^2(z)} dz\right) dy$$

перетворюється на нескінченність,

$$L_1(b_i) < \infty, L_2(b_i) = \infty,$$

де  $b_i$  – притягувальна межа.

3. Якщо не виконуються рівності  $L_1(b_i) = \infty$  і  $L_2(b_i) = \infty$ , то з не нульовою ймовірністю деякі траєкторії дифузійного процесу  $X_t$  досягають межі  $b_i$  простору станів за скінченний час.

У цьому випадковому процесі відчувається наявність межі, і тому поведінку дифузійного процесу визначають не лише переносом і дифузіїю, але й граничними умовами.

Розрізняють такі основні типи граничних умов, що накладаються:

а) *поглинання* (досягнувши межі  $b_i$ , дифузійний процес залишається там);



б) *відбивання* (досягнувши межі  $b_i$ , дифузійний процес безперервно або миттєво повертається в інтервал  $(b_1, b_2)$ );

в) *відбивання з відскоком* (досягнувши межі  $b_1$ , дифузійний процес стрибком повертається до випадкової точки в середині інтервалу  $(b_1, b_2)$ ).

Аналітичні умови того, що  $b_i$  – *поглинаюча межа*, можна записати у вигляді рівності:

$$L_3(b_i) \int_{b_i}^{\beta} \frac{1}{g^2(y)} \frac{1}{\varphi(y)} dy = \infty, \quad (L_1 < \infty, L_2 < \infty).$$

Якщо всі три величини  $L_1, L_2, L_3$  скінченні, то цю межу називають *регулярною*. На таку межу можна накладати будь-які умови.

Класифікації можливої межі:

- природня  $L_1 = \infty$ , без граничних умов;
- притягуюча  $L_1 < \infty; L_2 = \infty$ , без граничних умов;
- поглинаюча  $L_1 < \infty; L_2 < \infty; L_3 = \infty$ , граничні умови 1 або 3;
- регулярна  $L_1 < \infty; L_2 < \infty; L_3 < \infty$ , будь-які граничні умови.

Рівнянню Ферхюльста відповідає СДР

$$dX_t = (\lambda X_t - X_t^2)dt + \sigma X_t dW_t = f(X_t)dt + \sigma g(X_t)dW_t.$$

Фізичний простір, яким обмежений дифузійний простір, є невід'ємною суттєвою напівпрямою.

Оскільки  $g(0) = 0$  і  $f(\infty) = -\infty$ , то нуль і  $\infty$  – внутрішня межа процесу

$$L_1(b_i) = \int_{b_i}^{\beta} \exp\left(-\int_{\beta}^x \frac{2f(z)}{\sigma^2 g^2(z)} dz\right) dx;$$

$$L_1(0) = \int_0^{\beta} \exp\left(-\int_{\beta}^x \frac{2[\lambda z_t - z_t^2]}{\sigma^2 z_t^2} dz\right) dx = \int_0^{\beta} \exp\left(-\left[\int_{\beta}^x \frac{2\lambda dz}{\sigma^2 z} - \frac{2}{\sigma^2} \int_{\beta}^x dz\right]\right) dx;$$

$$L_1(0) = \int_0^{\beta} \exp\left(-\frac{2\lambda}{\sigma^2} \ln z \Big|_{\beta}^x + \frac{2}{\sigma^2} z \Big|_{\beta}^x\right) dx = C \int_0^{\beta} x^{-2\lambda/\sigma^2} \exp\left(\frac{2x}{\sigma^2}\right) dx \quad (\text{Іто}).$$

Внутрішня межа природня, якщо  $\beta > 0$ ,

$$L_1(0) = C \int_0^{\beta} x^{-2\lambda/\sigma^2} \exp\left(\frac{2x}{\sigma^2}\right) dx = \infty \quad (\text{нуль – природня межа, якщо}$$

$$\lambda > \frac{\sigma^2}{2});$$

$L_1(0) = C \int_0^{\infty} x^{-2\lambda/\sigma^2} \exp\left(\frac{2x}{\sigma^2}\right) dx = \infty$  (умова завжди виконується за всіх  $\lambda$  і  $\sigma$ ).

Жодної межі з двох внутрішніх не досягнуто. Якщо  $\lambda < \frac{\sigma^2}{2}$ , маємо  $L_2(0) = \infty$ . Відповідно нуль – притягувальна межа.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лошицкий П. П. Взаимодействие биологических объектов с физическими факторами [Текст] : учеб. пособие / П. П. Лошицкий – К. : НТУУ «КПИ», 2009. – 272 с. – Библиогр. : с. 270–271. – 150 экз. – ISBN 978-966-622-297-1.

2. Романовский Ю. М. Математическое моделирование в биофизике [Текст] / Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский. – М.: Наука, 1975. – 343 с., ил. – Библиогр. : с. 335–343. – 5500 экз.

3. Лошицкий П. П. Моделивання біофізичних процесів [Текст] : метод. вказівки до викон. практич. робіт / П. П. Лошицький. – К. : НТУУ «КПІ», 2005. – 84 с. – Бібліогр. : с. 78.

4. Лошицький П. П. Взаємодія біологічних об'єктів з фізичними полями [Текст] : метод. вказівки до викон. лаборатор. робіт / П. П. Лошицький. – К. : НТУУ «КПІ», 2005. – 40 с. – Бібліогр. : с. 38.

5. Постон Т. Теория катастроф и ее приложения [Текст]; [пер. с англ.] / Т. Постон, И. Стюарт. – М. : Мир, 1980. – 607 с. – Библиогр. : с. 561–588. – Именной указ. : с. 589–593. – Предм. указ. : с. 594–600. – Перевод изд. : Catastrophe theory and its applications / Tom Poston, Ian Stewart. – 11 000 экз.

6. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках [Текст]; [пер. с англ.] / К. В. Гардинер. – М. : Мир, 1986. – 528 с., ил. – Библиогр. : с. 503–511. – Предм. указ. : с. 512–519. – Перевод 2-го изд. : Handbook of stochastic methods / C. W. Gardiner. – 4500 экз.

7. Купер Дж. Вероятностные методы анализа сигналов и систем [Текст]; [пер. с англ.] / Дж. Купер, К. Макгиллем. – М. : Мир, 1989. – 376 с. – Библиогр. : в конце глав. – Предм. указ. : с. 372–373. – Перевод 2-го изд. : Probabilistic methods of signal and system analysis / G. R. Cooper, C. D. McGillem. – 15500 экз. – ISBN 5-03-000366-5.

8. Стратонович Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике [Текст] / Р. Л. Стратонович. – М. : Советское радио, 1961. – 558 с., ил. – Библиогр. : с. 548–550. – Предм. указ. : с. 551–553. – 8000 экз.

9. Лихтенберг А. Регулярная и стохастическая динамика [Текст]; [пер. с англ.] / А. Лихтенберг, М. Либерман. – М.: Мир, 1984. – 528 с., ил. – Библиогр. : с. 506–521. – Именной и предм. указ. : с. 522–525. – Перевод изд. : Regular and stochastic motion / A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman. – 4200 экз.

10. Балеску Р. Равновесная и неравновесная статистическая механика [Текст]: в 2 т.; [пер. с англ.] / Р. Балеску – М. : Мир, 1978. – Т. 2. – Перевод изд. : Equilibrium and nonequilibrium statistical mechanics / R. Balescu. – 3500 экз.

11. Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Ч 1. Случайные процессы [Текст] : учеб. пособие для физич. специальностей вузов / С. М. Рытов. – 2-е изд. – М. : Наука, 1976. – 494 с., ил. – Библиогр. : с. 485–494. – 16 000 экз.

12. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики [Текст] : учеб. пособие для ун-тов / Н. Н. Моисеев. – 2-е изд. – М. : Наука, 1981. – 400 с. – 8000 экз.

13. Арнольд В. И. Математические методы классической механики [Текст] : учеб. пособие для ун-тов / В. И. Арнольд. – 2-е изд. – М. : Наука, 1979. – 432 с., ил. – Предм. указ. : с. 427–431. – 14 000 экз.

14. Николис Г. Познание сложного. Введение [Текст]; [пер. с англ.] / Г. Николис, И. Пригожин. – М. : Мир, 1990. – 344 с., ил. – Библиогр. : с. 326–335. – Предм. указ. : с. 336–339. – Перевод изд. : Exploring complexity. An introduction / G. Nicolis, I. Prigogine. – 16 300 экз. – ISBN 5-03-001582-5.

15. Математика. Новое в зарубежной науке / редакторы серии : А. Н. Колмогоров, С. П. Новиков. – Вып. 22: Странные аттракторы [Текст]; [пер. с англ.]. – М. : Мир, 1981. – 253 с., ил. – Библиогр. : в конце глав. – 6700 экз.

16. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики [Текст] : учеб. пособие для ун-тов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – 3-е изд. – М. : Наука, 1966. – 724с., ил. – 40 000 экз.

17. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения. Теоремы. Формулы [Текст]; [пер. с англ.] / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968. – 720 с., ил. – Библиогр. : с. 682–684. – Указ. важн. обозначений : с. 685–687. – Предм. указ. : с. 688–720. – Перевод. изд.: Mathematical handbook for scientists and engineers. Definitions. Theorems and formulas for reference and review / G. Korn, T. Korn. – 100 000 экз.

18. Ландау Л. Д. Статистическая физика [Текст] / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 2-е изд. перераб. – М. : Наука, 1964. – 568 с., ил. – Предм. указ. : с. 566–567. – 57 000 экз.

19. Арнольд В. И. Теория катастроф [Текст] / В. И. Арнольд. – 3-е изд., доп. – М. : Наука, 1990. – 128 с., ил. – Библиогр. : с. 115–128. – 84 000 экз. – ISBN 5-02-014271-9

20. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс [Текст] : учеб. пособие для математ. специальностей ун-тов / Г. Е. Шилов. – 2-е изд. – М. : Гос. изд. физ.-мат. л-ры, 1961. – 436 с., ил. – Алф. указ. : с. 433–436. – 25 000 экз.

21. Пайтген Х.-О. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем [Текст]; [пер. с англ.] / Х.-О. Пайтген, П. Х. Рихтер. – М. :

Мир, 1993. – 176 с., ил. – Библиогр. : с. 128–129. – Перевод изд. : The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems / H.-O. Peitgen, P. H. Richter – Berlin–Heidelberg–New York–Tokyo. – 5000 экз. – ISBN 5-03-001296-6.

22. Ширяев А. Н. Вероятность [Текст] : учеб. пособие для ун-тов / А. Н. Ширяев. – М. : Наука, 1980. – 575 с., ил. – Ист.-библиогр. справка: с. 562–565. – Библиогр. : с. 566–568. – Предм. указ. : с. 569–572. – Указ. обозн. : с. 573–575. – 30 000 экз.

23. Маккин Г. Стохастические интегралы [Текст]; [пер. с англ.] / Г. Маккин. – М. : Мир, 1972. – 184 с. – Библиогр. : с. 177–182. – Перевод изд. : Stochastic integrals / H. P. McKean. – New York etc, 1969.

24. Хакен Г. Синергетика [Текст]; [пер. с англ.] / Г. Хакен. – М. : Мир, 1980. – 409 с., ил. – Библиогр. : с. 388–409. – Перевод изд. : Synergetics. An introduction nonequilibrium phase transitions and self-organization in physics, chemistry and biology / H. Haken. – 1978. – 8500 экз.

25. Николис Г. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации [Текст]; [пер. с англ.] / Г. Николис, И. Пригожин. – М. : Мир, 1979. – 512 с., ил. – Библиогр. : с. 491–500. – Примеч. : с. 501–502. – Предм. указ. : с. 503–506. – Перевод изд. : Self-organization in nonequilibrium systems. From dissipative structures to order through fluctuations / G. Nicolis, I. Prigogine. – 4000 экз.

26. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений [Текст] : учеб. пособие для физ.-мат. спец. вузов / В. И. Арнольд. – М. : Мир, 1978. – 304 с., ил. – 27 000 экз.

27. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение [Текст]; [пер. с англ.] / Г. Шустер. – М. : Мир, 1988. – 240 с., ил. – Библиогр. : с. 9, 217–233. – Предм. указ. : с. 234–237. – Перевод изд. : Deterministic chaos / H. G. Schuster. – Weinheim, 1984. – 6000 экз. – ISBN 5-03-001373-3 (в пер.).

28. Боровков А. А. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие для физ.-мат. спец. вузов / А. А. Боровков. – М. : Наука, 1976. – 352 с., ил. – Предм. указ. : с. 350–352. – 70 000 экз.

29. Андронов А. А. Теория колебаний [Текст] / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М. : Наука, 1981. – 568 с., ил. – Библиогр. : с. 563–568. – 13 000 экз.

30. Блакьер О. Анализ нелинейных систем [Текст]; [пер. с англ.] / О. Блакьер. – М. : Мир, 1969. – 400 с., ил. – Имен. указ. : с. 386–387. – Предм. указ. : с. 388–395. – Библиогр. : в конце глав. – Перевод изд. : Nonlinear system analysis / A. Blaquiere. – New York–London, 1966.

31. Заславский Г. М. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса [Текст] / Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. – М. : Наука, 1988. – 368 с. – Библиогр. : с. 360–366. – Предм. указ. : с. 367–368. – 8700 экз. – ISBN 5-02-013822-3.

32. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики [Текст] : учеб. пособие для вузов по спец. прикладная математика / Г. И. Марчук. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1989. – 608 с., ил. – Библиогр. : с. 575–608. – 27 000 экз. – ISBN 5-02-014222-0.

33. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях [Текст]; [пер. с англ.] / Дж. Марри. – М. : Мир, 1983. – 398 с., ил. – Библиогр. : с. 391–394. – Перевод изд. : Lectures on nonlinear – differential equation models in biology / J. D. Murray. – Oxford, 1977. – 5000 экз.

34. Хорстемке В. Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии [Текст]; [пер. с англ.] / В. Хорстемке, Р. Лефевр. – М. : Мир, 1987. – 400 с., ил. – Библиогр. : с. 375–388. – Предм. указ. : с. 389–393. – Перевод изд. : Noise – induced transitions / W. Horsthemke, R. Lefever. – Berlin etc., 1984. – 3700 экз.

35. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения [Текст]; [пер. с англ.] / Б. Оксендаль. – М. : Мир, «АСГ», 2003. – 408 с., ил. – Библиогр.: с. 383–390. – Список обозн. : с. 391–394. – Предм. указ. : с. 395–493. – 5000 экз. – ISBN 5-17-019776-4.

36. Анищенко В. С. и др. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка // УФН. – Т. 169. – № 1. – С. 7–18.

37. Чжун К. Введение в стохастическое интегрирование [Текст]; [пер. с англ.] / К. Чжун, Р. Уильямс. – М. : Мир, 1987. – 152 с., ил. – Библиогр. : с. 146–147. – Предм. указ. : с. 149–150. – Перевод изд. : Introduction to stochastic integration / K. L. Chung, R. J. Williams. – Boston etc., 1983. – 5000 экз.

38. Волькенштейн М. В. Биофизика [Текст] : учеб. пособие для биол. и физ. ф-тов ун-тов / М. В. Волькенштейн. – М. : Наука, 1981. – 575 с., ил. – Библиогр. : с. 567–570. – Предм. указ. : с. 571–575. – 18 000 экз.

39. Эмануэль Н. М. Курс химической кинетики [Текст] : учеб. для хим. ф-тов. ун-тов / Н. М. Эмануэль, Д. Г. Кнорре. – 4-е изд. перераб. и доп. – М. : «Высш. шк.», 1989. – 463 с., ил. – Библиогр. : с. 455–457. – Предм. указ. : с. 458–461. – 10 000 экз.

40. Лефшец С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений [Текст]; [пер. с англ.] / С. Лефшец. – М. : Изд. иностр. л-ры, 1961. – 387 с., ил. – Библиогр. : с. 369–377. – Перевод изд. : Differential equations: Geometric theory / S. Lefschetz. – New York etc., 1957.

41. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] / Л. С. Понтрягин. – 6-е изд. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 400 с. – Предм. указ. : с. 390–396. – 1500 экз. – ISBN 5-93972-053-6.

42. Шлегель Г. Общая микробиология [Текст]; [пер. с нем.] / Г. Шлегель. – М. : Мир, 1987. – 567 с., ил. – Библиогр. : с. 524–531. – Предм. указ. : с. 532–552. – Указ. лат. назв. : с. 559–567. – Перевод изд. : *Allgemeine Mikrobiologie* / H. G. Schlegel. – 22 300 экз.

43. Андронов А. А. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости [Текст] / А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, А. Г. Майер. – М. : Наука, 1967. – 486 с., ил. – Библиогр. : с. 484–485. – Алфавит. указ. : с. 486–487. – 7500 экз. (в пер.).

44. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах [Текст]; [пер. с англ.] / Т. Хаяси. – М. : Мир, 1968. – 432 с., ил. – Библиогр. : с. 421–427. – Указ. : с. 428–429. – Перевод изд. : *Nonlinear oscillations in physical systems* / Ch. Hayashi. – New York. etc., 1964.

45. Федер Е. Фракталы [Текст]; [пер. с англ.] / Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 259 с., ил. – Библиогр. : с. 249–258. – Перевод изд. : *Fractals* / J. Feder. – New York etc., 1988. – ISBN 5-03-001712-7. – 5000 экз.

46. Розанов Ю. А. Случайные процессы. Краткий курс [Текст] : учеб. пособие для физ.-мат. спец. вузов / Ю. А. Розанов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1979. – 184 с., ил. – 28 000 экз.

47. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории [Текст]; [пер. с англ.]: учеб. пособие по спец. «Прикладная математика» / Р. М. Кроновер. – М. : Постмаркет, 2000. – 352 с., ил. – Библиогр. : с. 341–347. – Предм. указ. : с. 348–350. – Перевод изд. : *Introduction to fractals and chaos* / R. V. Crownever. – Boston; London, 1995. – 2000 экз. – ISBN 5-901095-03-0.

48. Чалий О. В. Процеси впорядкування та самоорганізації у флуктуаційних моделях відкритих систем [Текст] / О. В. Чалий, Я. В. Цехмістер, К. О. Чалий. – К. : НМУ ім. О. О. Богомольця; КМА післядиплом. освіти ім. Шупика, 2001. – 224 с. – Бібліогр. : с. 221–223. – 300 экз. – ISBN 5-8238-0756-2.

49. Белинцев Б. И. Физические основы биологического формообразования [Текст] / Б. И. Белинцев; под ред. М. В. Волькенштейна. – М. : Наука, 1991. – 256 с., ил. – Библиогр. : в конце глав. – 2450 экз. – ISBN 5-02-014556-4.

50. Пригожин И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой [Текст]; [пер. с англ.] / И. Пригожин, И. Стенгерс. – М. : Прогресс, 1986. – 434 с., ил. – Послесловие: с. 408–422. – Имен. и предм. указ. : с. 423–431. – Перевод изд. : *Order out of chaos. Man's new dialogue with nature.* – Heinerann; London, 1984. – 8000 экз.

51. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов [Текст] : учеб. пособие для мех.-мат. ф-тов ун-тов / А. Д. Вентцель. – М. : Наука, 1975. – 319 с., ил. – Библиогр. : с. 317. – Предм. указ. : с. 318–319. – 40 000 экз.

52. Вентцель А. Д. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений [Текст] / А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин. – М. : Наука, 1979. – 424 с., – Библиогр. : с. 415–422. – Предм. указ. : с. 423–424. – 8000 экз. (в пер.).

53. Эрроусмит Д. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями [Текст]; [пер. с англ.] / Д. Эрроусмит, К. Плейс. – М. : Мир, 1986. – 243 с., ил. – Библиогр. : с. 233–240. – Предм. указ. : с. 240–242. – Перевод изд. : Ordinary differential equations. A qualitative approach with applications / D. K. Arrowsmith, C. M. Place. – London; New York, 1982. – 8000 экз.

54. Диментберг М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний [Текст] / М. Ф. Диментберг. – М. : Наука, 1980. – 368 с., ил. – Библиогр. : с. 362–368. – 3000 экз.

55. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. Введение в теорию диссипативных структур [Текст]; [пер. с англ.] / В. Эбелинг. – М. : Мир, 1979. – 279 с., ил. – Библиогр. : с. 263–271. – Имен. и предм. указ. : с. 272–277. – Перевод изд.: Strukturbildung bei irreversiblen prozessen. Eine einfuehrung in die theorie dissipativer strukturen / W. Ebeling. – 1976. – 20 000 экз.

56. Ито К. Диффузионные процессы и их траектории [Текст]; [пер. с англ.] / К. Ито, Г. П. Маккин. – М. : Мир, 1966. – 394 с., ил. – Библиогр. : с. 371–379. – Указ. : с. 380–390. – Перевод изд. : Diffusion processes and their sample paths / K. Ito, H. P. McKean.

57. Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы [Текст]; [пер. с англ.] / С. Ватанабэ, Н. Икэда. – М. : Мир, 1986. – 445 с. – Библиогр. : с. 434–441. – Предм. указ. : с. 442–445. – Перевод изд. : Stochastic differential equations and diffusion processes / Sh. Watanabe, N. Ikeda. – Amsterdam etc., 1981. – 5800 экз.

58. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения [Текст] / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – К. : Наук. думка, 1982. – 611 с. – Библиогр. : с. 601–611. – 2500 экз.

59. Пугачев В. С. Стохастические дифференциальные системы: анализ и фильтрация [Текст] / В. С. Пугачев, И. В. Сеницын. – 2-е изд., доп. – М. : Наука, 1990. – 630 с., ил. – Библиогр. : с. 620–626. – Предм. указ. : с. 627–630. – 2500 экз. – ISBN 5-02-014382-8 (в пер.).

60. Свирежев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии [Текст] / Ю. М. Свирежев. – М. : Наука, 1987. – 368 с., ил. – Библиогр. : в конце глав. – 4000 экз.

61. Шарковский А. Н. Динамика одномерных отображений / А. Н. Шарковский, С. Ф. Коляда, А. Г. Сивак, В. В. Федоренко; отв. ред.



И. А. Луковский. – АН УССР; Ин-т математики. – К. : Наук. думка, 1989. – 214 с., ил. – Библиогр. : с. 207–213. – Предм. указ. : с. 214. – 1100 экз.

62. Скороход А. В. Стохастические уравнения для сложных систем [Текст] / А. В. Скороход. – М. : Наука, 1983. – 190 с., ил. – (Теория вероятностей и математическая статистика) – Библиогр. : с. 187–189. – 5000 экз.

63. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах: механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиотехнических системах [Текст] / В. С. Анищенко. – М. : Наука, 1990. – 310 с., ил. – Библиогр. : с. 301–311. – 2000 экз. – ISBN 5-20-014168-2 (в пер.).

64. Мун Ф. Хаотические колебания: вводный курс для научных работников и инженеров [Текст]; [пер. с англ.] / Ф. Мун. – М. : Мир, 1990. – 311 с., ил. – Библиогр. : с. 296–304. – Предм. указ. : с. 305–307. – Перевод изд. : Chaotic vibrations / F. C. Moon. – New York etc. – 5000 экз. – ISBN 5-03-001413-6 (в пер.).

65. Баблюянтц А. Молекулы, динамика и жизнь: введение в самоорганизацию материи [Текст]; [пер. с англ.] / А. Баблюянтц. – М. : Мир, 1990. – 373 с., ил. – Библиогр. : с. 356–362. – Предм. указ. : с. 363–368. – Перевод изд. : Molecules, dynamics and life / A. Babloyantz. – New York etc. – 4200 экз.

66. Томсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике [Текст]; [пер. с англ.] / Дж. М. Т. Томсон. – М. : Мир, 1985. – 254 с., ил. – Библиогр. : с. 232–245. – Им. и предм. указ. : с. 246–251. – Перевод изд. : Instabilities and catastrophes in science and engineering / J. M. T. Thomson. – Chichester etc., 1982. – 25 000 экз.

67. Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике [Текст]; [пер. с англ.] / А. Ньюэлл. – М. : Мир, 1989. – 323 с., ил. – Библиогр. : с. 311–319. – Предм. указ. : с. 320–323. – Перевод изд. : Solitons in mathematics and physics / A. C. Newell. – 10 000 экз. – ISBN 5-03-001118-8 (в пер.).

68. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы [Текст]; [пер. с англ.] / Дж. Л. Дуб. – М. : Изд. Иностранной литературы», 1956. – 605 с., ил. – Библиогр. : с. 589–598. – Перевод изд. : Stochastic processes / J. L. Doob. New York etc., 1953.

69. Марсден Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения [Текст]; [пер. с англ.] / Дж. Марсден, М. МакКракен. – М. : Мир, 1980. – 368 с., ил. – Библиогр. : с. 350–367. – Перевод изд. : The Hopf bifurcation and its applications / P. Chernoff, G. Chiedo, etc. – New York, 1976. – 8000 экз.

70. Неймарк Ю. И. Стохастические и хаотические колебания [Текст] / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. – М. : Наука, 1987. – 424 с., ил. – Библиогр. : с. 394–428. – 5100 экз.

71. Камке Э. Интеграл Лебега–Стилтьеса [Текст]; [пер. с нем.] / Э. Камке. – М. : Гос. изд-во. физ.-мат. л-ры, 1959. – 340 с. – Библиогр. : с. 321–322. – Алф. указ. : с. 324–328. – Перевод изд. : *As Lebesgue–Stieltjes Integral* / E. Kamke. – Leipzig, 1956. – 7500 экз.

72. Божокин С. В. Фракталы и мультифракталы [Текст] : учеб. пособие / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с., ил. – Библиогр. : с.126–128. – 1000 экз. – ISBN 5-93972-060-9.

73. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций [Текст] / А. Д. Базыкин; отв. ред. А. М. Молчанов. – М. : Наука, 1985. – 182 с., ил. – Библиогр. : с. 173–179. – 1200 экз.

74. Иванченко Ю. М. Флуктуационные эффекты в системах с конкурирующими взаимодействиями [Текст] / Ю. М. Иванченко, А. А. Лисянский, А. Э. Филиппов. – (АН УССР. Донецкий физ.-техн. Ин-т.) – К. : Наук. думка, 1989. – 279, [1] с., ил. – Библиогр. : с. 271–278. – 800 экз. – ISBN 5-12-000839-9 (в пер.).

75. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение [Текст]; [пер. с франц.] / П. Леви. – М. : Наука, 1972. – 375 с. – Библиогр. : с. 365–375. – Перевод изд. : *Processus stochastiques et mouvement brownien* / P. P. Levy. – Paris, 1969. – 8000 экз.

76. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов [Текст] / А. Д. Морозов. – 2-е изд., доп. – М. ; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 160 с. ил. – Библиогр. : с. 158–159. – ISBN 5-93972-172-9.

77. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем [Текст] / Г. М. Заславский. – М. : Наука, 1984. – 271 с., ил. – (Серия «Современные проблемы физики»; вып. под общим рук. ред. коллегии журн. «Успехи физ. наук»). – Библиогр. : с. 264–269. – Предм. указ. : с. 270–271. – 6300 экз.

78. Слуцкер А. И. Флуктуационная динамика [Текст] : учеб. пособие / А. И. Слуцкер, Б. А. Аверин. – Ленинград : Изд. ЛПИ, 1989. – 64 с., ил. – Библиогр. : с. 62. – 500 экз.

79. Эллиотт Р. Стохастический анализ и его приложения [Текст]; [пер. с англ.] / Р. Эллиотт. – М. : Мир, 1986. – 351 с. – Библиогр. : с. 343–346. – Указ. обозн. : с. 347. – Предм. указ. : с. 348–349. – Перевод изд. : *Stochastic calculus and applications* / P. J. Elliott. – New York etc., 1982. – 6000 экз.

80. Берже П. Порядок в хаосе: о детерминистическом подходе к турбулентности [Текст]; [пер. с франц.] / П. Берже, И. Помо, К. Видаль. – М. : Мир, 1991. – 368 с., ил. – Библиогр. : с. 363–364. – Предм. указ. :

с. 365 – 366. – Перевод изд. : L'ordre dans le chaos: Vers une approche deterministe de la turbulence / P. Berge, Y. Pomeau, Ch. Vidal. – Paris, 1988. – 6000 экз. – ISBN 5-03-001804-2.

81. Рабинович М. И. Стохастические автоколебания и турбулентность // Успехи физических наук. – 1978. – Т. 125. – вып. 1. – с. 123–147.

82. Лоскутов А. Ю. Введение в синергетику [Текст] : учеб. руководство / А. Ю. Лоскутов, А. С. Михайлов. – М. : Наука, 1990. – 272 с., ил. – Библиогр. ком. : с. 246–251. – Библиогр. : с. 252–270. – 8400 экз. – ISBN 5-02-014475-4.

83. Хакен Г. Синергетика: Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах [Текст]; [пер. с англ.] / Г. Хакен. – М. : Мир, 1985. – 423 с., ил. – Библиогр. : с. 382–411. – Предм. указ. : с. 412–414. – Перевод изд. : Advanced synergetics. Instability hierarchies of self – organizing systems and devices / H. Haken. – New York etc., 1982. – 8000 экз.

84. Хакен Г. Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии [Текст]; [пер. с нем.] / Г. Хакен. – М. ; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 320 с., ил. – Библиогр. : с. 295–306. – Ист. ил. : с. 307–309. – Предм. указ. : с. 310–319. – Перевод изд. : Erfolgsgeheimnisse der Natur. Synergetik: Die Lehre vom Zusammenwirken / H. Haken. – Deutsche Verlags – Ansalt GmbH. 1992. – ISBN 5-93972-230-X. – 1500 экз.

Навчальне видання

**Лошицький Павло Павлович**  
**Ніколов Микола Олександрович**

**Моделювання біофізичних процесів.**  
**Вступ до синергетики**

**Навчальний посібник**

Редактори: *І. В. Мурашова, С. Я. Тимчишин*  
Коректор *Н. В. Мурашова*  
Комп'ютерна верстка *А. М. Мушницький*

Темплан 2014 р., поз. 1-2-007

Підп. до друку 06.03.2013. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір офс. Гарнітура Times.  
Спосіб друку – ризографія. Ум. друк. арк. 23,95. Обл.-вид. арк. 39,82. Наклад 200 пр. Зам. № 14-37.

---

НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка»  
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.  
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15  
тел (44) 406-81-78